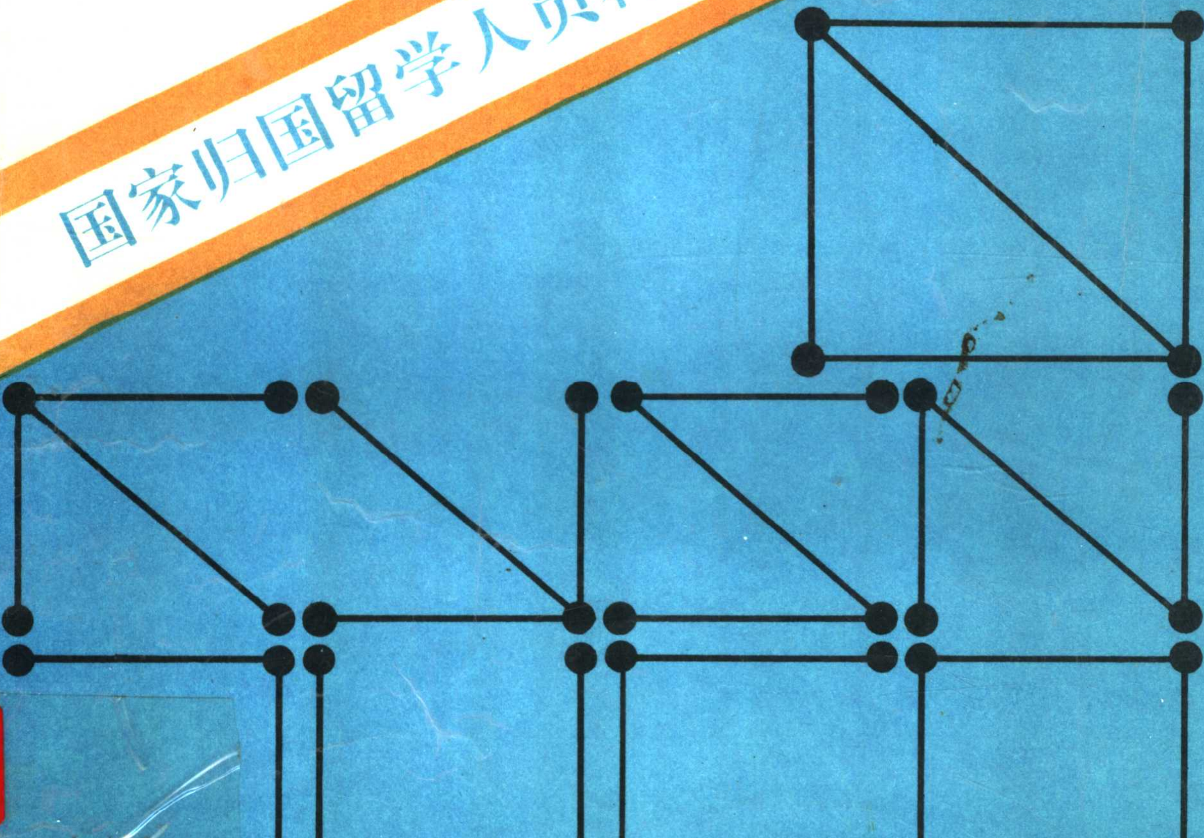
图中树的数目

计算及其在网络可靠性中的作用

李晓明　黄振杰　著

国家归国留学人员科研基金资助项目



哈尔滨工业大学出版社

图中树的数目

——计算及其在网络可靠性中的作用

李晓明　黄振杰　著

哈尔滨工业大学出版社

（黑）新登字第4号

图中树的数目

——计算及其在网络可靠性中的作用

李晓明　黄振杰　著

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/16　印张9.75　字数233千字
1993年12月第1版　1993年12月　第1次印刷
印数　1—1000
ISBN 7-5603-0801-5/TP·58　定价9.80元

前　言

树的概念在许多领域都有着广泛的应用。图中支撑树的数目 $t(G)$，作为图 G 的一个不变量，作为图论，组合计数，线性代数这三个数学分支的一个交叉点，一百多年来一直是一个活跃的研究课题，新的研究结果不断出现；特别它在网络可靠性中起着举足轻重的作用。本书旨在网络可靠性研究的背景下，尽量较全面地介绍有关情况，其中一部分是作者近年来的研究成果。

第一章是预备知识。概述下面各章将要用到的有关图论、线性代数及初等数论等方面的概念、术语及一些基本定理。在图论的基本知识中，主要复习图、支撑树、图的矩阵表示、图的基本运算、子图、截集、连通度等概念。这些都是和网络可靠性密切相关的。有关线性代数的知识包括与矩阵的特征值、特征多项式有关的概念和结果、Binet-Cauchy定理、矩阵的Kronecker 和与积等；许多关于支撑树个数的结论都是由它们得到的。初等数论的知识只是在讨论无误差计算支撑树个数时用到，主要有同余的概念及其运算、有限域（Z_m，+，·）等。

第二章讨论图G的支撑树个数$t(G)$的计算。首先介绍了Kirchhoff定理及其推广，然后指出用典型算法在现代计算机上来实现该定理要求的计算常会出现误差，并以 Gauss 消去法为例进行了误差分析，最后介绍了一种利用同余性质的无误差算法，并在附录中给出了相应程序。

第三章内容较多，力求较全面地介绍求 $t(G)$ 的解析式的各种方法和技巧以及到目前为止所取得的成果。首先研究了 Kirchhoff 矩阵的有关性质，介绍了由特征值或特征多项式所给出的 $t(G)$ 的公式；接着研究图的支撑树数目与其子图的支撑树数目的关系，提供了求一些非规则图的支撑树数目的解析式的方法，还讨论了复合图的支撑树数目的一般求法；最后介绍了求 $t(G)$ 解析式的其它一些方法，并列举出目前我们所知的全部$t(G)$解析表达式。

第四章讨论所谓"t-优图"，即在同点同边数的图中具有最多支撑树个数的图。分析了t-优图的一些性质，给出了人们目前得到的t-优图类。从中读者可以看到这是一个引人入胜的课题，还有许多有趣的问题尚待解决，为此，在附录中提供了一个猜想清单。在这一章里，还介绍了具有最小$t(G)$的图的构造。

第五章讨论网络可靠性问题。主要从边故障的角度提出网络可靠性分析与综合的概念，以及图的支撑树数目在网络可靠性中的地位。网络的截率向量在网络可靠性中起着决定性的作用，本书介绍了它的概念、性质及其估算。所谓"一致最可靠网络"是近几年才提出的新概念，本章介绍了到目前为止关于它的研究状况。

本书深入浅出，尽量避免生涩的数学推导，以便于初次接触此领域的读者能很快了解问题的全貌。本书的读者对象是关心图论在网络可靠性研究中应用的学者，也可作为一本入门书籍供初次涉足于此领域的人员使用。对读者的基本要求是学过图论和线性代数等课程。

本书采用的主要符号

G	图
$V(G)$	图G的结点集
u,v,w	图的结点
$E(G)$	图G的边集
x,y,z	图的边
$A(G)$	图G的邻接矩阵
$M(G)$	图G的关联矩阵
$H(G)$	图G的Kirchhoff矩阵
$D(G)$	图G的度矩阵
$G(n,e)$	n个结点，e条边的图
$t(G)$	图G所含的支撑树的个数
Z	整数集合
Z_m	集合$\{0,1,\cdots,m-1\}$
$\Omega(n,e)$	所有n个结点，e条边的图的集合
K_n	有n个结点的完全图
$K_{n,n}$	有$2n$个结点的正则完全二部图
$m_i(G)$	也记为m_i，图G中i-截集的个数
$G-x$	从图G中删去边x所得到的图
G/x	在图G中“收缩”边x所得到的图
$R(G,\rho)$	边故障概率为ρ时的网络可靠性
$P(G,\rho)$	边故障概率为ρ时的网络故障概率
ρ	边故障概率
σ	边工作概率
$\hat{G}(n,e)$	一个n个结点，e条边的t-优图
$\hat{t}(n,e)$	n个结点，e条边t-优图的支撑树个数

目　　录

第一章 预备知识

本章介绍一些在后面的章节中要用到的基本知识，以便读者能顺利地阅读本书。内容主要包括图论、线性代数、初等数论等方面的一些基本概念和结论。

§ 1.1 图论的基本知识

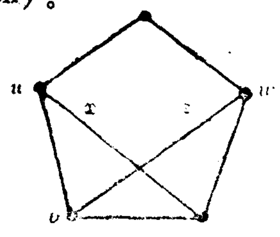
从欧拉（Euler）1736 年解决著名的哥尼斯堡（Königsberg）七桥问题开始，尽管图论已有二百多年的历史，但其术语和记号到现在也没有完全统一。许多图论学者在他们的书、论文和讲演中，为了避免产生歧义，都事先对所要用到的概念作一个说明。因此，本节的目的有二，一是对本书将使用的有关图论的概念、术语给出一个明确的定义；二是介绍一些图论中最基本的，也是本书其它章节将要用到的结果。

一个图（graph）G由两个有限集合$V(G)$和$E(G)$构成，其中$E(G)$的每个元素与$V(G)$的一个或两个不同元素对应，记$G=(V(G),E(G))$，且$V(G)\neq\phi$。我们称$V(G)$中的元素为图G的结点（node），通常用u、v、w等记号来表示；称$V(G)$为图G的结点集，简记为V。称$E(G)$中的元素为图G的边（edge），通常用x、y、z等记号来表示；称$E(G)$为图G的边集，简记为E，从而记$G=(V,E)$。把结点集的元素个数记为n，称为图G的结点数；边集的元素个数记为e，称为图G的边数；即有$|V|=n$，$|E|=e$。设边x与结点u、v相对应，则称边x连接（join）结点u和v，记$x=uv$，且称u和v是边x的端点（endpoint），u与v是相邻的（adjacent），记作u adj v，结点u与边x是互相关联的（incident），v与x也关联。若两条不同的边x、y与一个公共结点关联，则称是相邻的边（adjacent edges）。一个有n个结点与e条边的图称为一个(n, e)图，所有(n, e)图所构成的集合称为(n,e)图类，记为$\Omega(n,e)$。“图类”的说法在本书中将经常用到，基本含义是满足某些特定性质的所有图的集合。除了上述(n,e)图类外，当然还可以从其它角度定义不同的图类。

采用图这个名称，是因为它们可以用图形来表示，而这种图形表示有助于理解图的许多性质。每一个结点用一个点来表示，每一条边用一条线来表示，此线连接着该边的两个端点，但不经过其它结点。一个图的图形仅描绘出它的结点与边之间所具有的关联关系，然而，我们常常画出一个图的图形，把它看作是这个图本身，并且将它的点称为结点，它的线称为边。如图1-1中的图G，结点u与结点v是相邻的，结点u与结点w则不相邻；边x与边y是相邻的，而边x与边z则不相邻；结点v、w是边z的端点，称边z连接结点v与w。

为了避免因为边的交叉而引起误会，本书中将用一个实心小圆来代表图的一个结点。

这里应该提到几种“特殊”情况：第一种，只与一个结点对应的边叫作环(loop)，不含有环的图叫作无环图。因为本书将讨论的主要问题与环无关，所以我们约定本书讨论的图均为无环图。第二种，如果图G中连接某两个结点的边不止一条，则这些边叫作重边，有重边的图G叫作多重图（multigraph）。第三种，如果一个图没有环，也没有重边，则称之为简单图（simple graph）。图1-1中的图G是简单图，而图1-2中的图就不是简单图，它有环 x，有重边 y_1，y_2。另外，只有一个结点的图称为平凡图（trivial graph）。



G

图 1-1

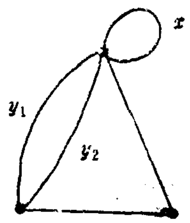
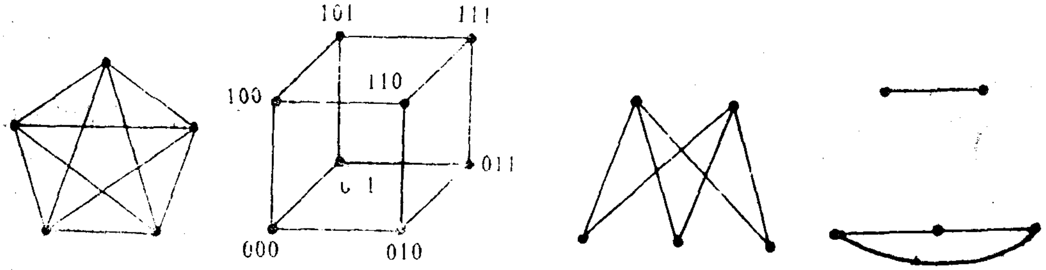


图 1-2

有几类简单图是重要的。每一对不同的结点都有一条边相连的简单图称为完全图（complete graph），有n个结点的完全图记为K_n。所谓二部图（bipartite graph）指的是它的结点集可以分成两个非空子集V_1和V_2，使得每条边都有一个端点在V_1中，另一个端点在V_2中，这样一种划分（V_1,V_2）称为图的一个二划分（bipartition）。完全二部图（complete bipartite graph）是具有二划分（V_1,V_2）的简单二部图，且V_1中任一结点都与V_2的每个结点相邻。若$|V_1|=m$，$|V_2|=n$，则这样的完全二部图记为$K_{m,n}$。类似地，可以定义n部图(n-partite graph)和完全n部图(complete n-partite graph)。简单图G的补图（complement），记为$\overline{G}$，是指和G有相同结点集V的一个简单图，在$\overline{G}$中两个结点相邻，当且仅当它们在G中不相邻。所谓k方体（k-cube），记为Q_k，是一个有2^k个结点的简单图，它的结点可由k位二进制数编码，使得两个结点相邻，当且仅当它们的编码只有一位不相同。图1-3中，（a）是完全图K_5，（b）是立方体Q_3，它也是一个二部图，（c）是完全二部图$K_{2,3}$，（d）是$K_{2,3}$的补图$\overline{K}_{2,3}$。



(a)　(b)　(c)　(d)

图 1-3

图G的结点v的度（degree），记为$d_G(v)$或d_v，是指G中与v关联的边的数目。常用$\delta(G)$和$\Delta(G)$来分别表示G的结点的最小度和最大度。图论的第一个定理揭示了一个图各结点度的总和与边数之间的关系，即

定理 1.1.1 $\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2e$

称图G是k-正则图（k-regular graph），如果对所有 $v\in V(G)$ 都有 $d_G(v)=k$。显然，完全图K_n是$(n-1)$-正则图，完全二部图$K_{n,n}$是n-正则图，k方体 Q_k 是k-正则图。

如果一个图 G 的 n 个结点都标以不同的名称，如 v_1、v_2、…、v_n，则称G为标定图（labeled graph）。如图1-4中图G_1、G_2是标定图，图G_3则不是。

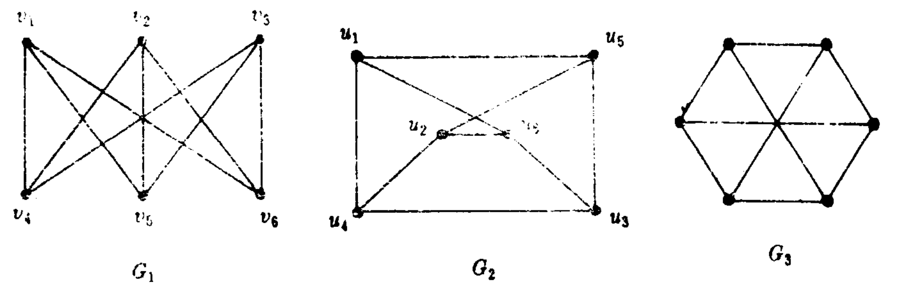


图 1-4

若两个图G_1 和 G_2 满足①结点集、边集之间都存在一一对应关系；②对应边关联着对应的结点，称图G_1与G_2同构（isomorphism），记为 $G_1\cong G_2$。换一句话说，两个同构图中的结点数与边数必须相同，而且对应点、边间的相邻关系必须保持。例如图1-4中图G_1和G_2是同构的。同构关系是图的一个等价关系。

图G 的一个子图（subgraph）是所有的结点和边都属于G的一个图。若G_1是G 的一个子图，则G是G_1的一个母图（supergraph）。图G的一个支撑子图（spanning subgraph）是一个含有G的所有结点的子图。对于$V(G)$的任何一个子集S，点导出子图 $\langle S\rangle$（induced subgraph）是G的以S为结点集的最大子图，即S 中的两个结点在 $\langle S\rangle$ 中相邻，当且仅当它们在G中相邻。对于$E(G)$ 的任一个子集 $X\subset E(G)$，边支撑子图 $\langle X\rangle$（edge-spanning subgrph）是指以$V(G)$为结点集，以X为边集的G的子图。在图1-5中G_2是G的一个边支撑子图，G_1则不是。G_1是G的一个点导出子图。

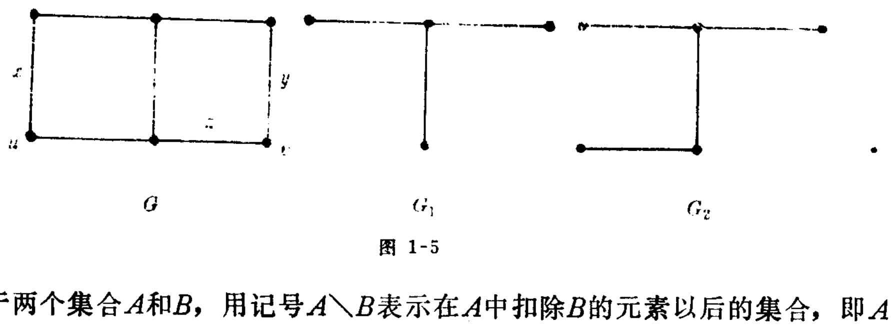


图 1-5

对于两个集合A和B，用记号$A\setminus B$表示在A中扣除B的元素以后的集合，即$A\setminus B=\{a|a\in A且a\notin B\}$。设$V'\subset V(G)$，则$V(G)\setminus V'$导出的子图常记为$G-V'$，它是从$G$中删除$V'$中的结点以及与这些结点相关联的边所得到的子图。若$V'=\{v\}$，则把$G-\{v\}$简记为$G-v$。在图1-5中，$G_1=G-\{u,v\}$。同样地，若$E'\subset E(G)$，则边集为 $E\setminus E'$的 G 的

支撑子图记为$G-E'$，它是从G中删除E'中的边所得到的子图。若$E'=\{x\}$，则把$G-\{x\}$简记为$G-x$。如图1-5中$G_2=G-\{x,y,z\}$。

有时候要提到边对称图的概念。图G是边对称的（edge symmetric），当且仅当对$\forall x,y\in E(G)$，有$G-x\cong G-y$。

设G_1和G_2是G的子图，若G_1和G_2没有公共结点，则称它们是不相交子图（disjoint subgraphs）；若G_1和G_2没有公共边，则称它们是边不交子图（edge-disjoint subgraphs）。

图的最基本性质之一是它是否连通，下面介绍与之有关的一些概念。一个图的一条通道（walk）是结点与边的一个交替序列v_0，x_1，v_1，$\cdots$，v_{n-1}，x_n，v_n。它以点开始，以点结束，其中每条边关联于直接在其前后的两个结点。这条通道连接v_0与v_n，也可以记作$v_0v_1\cdots v_n$，有时也将它称为一条v_0-v_n通道。如果$v_0=v_n$，则它称为闭的(closed walk)，否则，它就称为开的（oper walk）。若它的所有的边都不同，则称为一条迹（trace）。又若它的所有结点都不同（从而所有的边当然都不同），则称为一条路（path）。若一条通道是闭的，而且它的n个点都不同，（$n\geqslant3$），则称它为一个圈（cycle）。一条通道$v_0v_1\cdots v_n$的长度（length of walk）是指这条通道中的边的数目n。长度为k的圈称为k-圈（k-cycle)，按k是奇数还是偶数，称k-圈是奇圈(odd cycle)或偶圈（even cycle）。一个图G中最短的圈（假如G中有圈）的长度记作$g(G)$，称为G的围长（girth）；G中任何一个最长的圈的长度称为G的周长（circumference)，记为$c(G)$。

我们用C_n记由一个长度为n的圈构成的图；用P_n记由一条有n个点的路构成的图。C_3常称为一个三角形（triangle）。

在图1-6中的标定图G中，$v_1v_2v_5v_2v_3$是一条通道，但不是迹；而$v_1v_2v_5v_4v_2v_3$是一条迹，但不是路；$v_1v_2v_5v_4$是一条路，而$v_2v_4v_5v_2$是一个圈，它是一个三角形。

若一个图的每一对结点都有一条路连接它们，这个图称为连通图（connected graph）。G的一个极大的连通子图称为一个连通分支（connected component），简称为分支。不是连通图的图称为不连通图（disconnected graph）。一个不连通图至少有两个分支。图1-7中的图有7个分支。

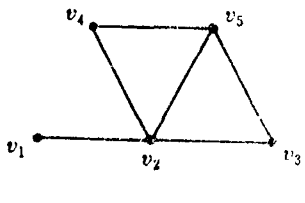


图 1-6

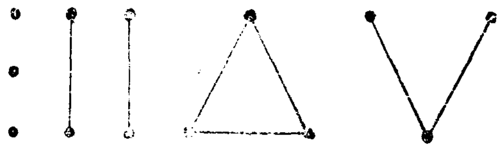


图 1-7

对于连通图G，若V的子集V'使得G-V'为不连通图或者平凡图，则V'称为图G的一个点截集（node cutset）。有k个点的点截集称为k-点截集。G所具有的k-点截集中最小的k称为G的连通度（connectivity)，记为$\kappa(G)$。当G是平凡的或不连通时，$\kappa(G)=0$。若$\kappa(G)\geqslant k$，称G为k-连通图（k-connected graph）。所有非平凡的连通

图都是1-连通的。同样地，对于连通图G，若E的子集E'使得$G-E'$不连通，则E'称为G的边截集（edge cutset）。有k条边的边截集为k-边截集。G的所有k-边截集中最小的k称为G的边连通度（edge-connectivity），记为$\lambda(G)$。当G是平凡的或不连通时，$\lambda(G)=0$。若$\lambda(G)\geqslant k$，称G为k-边连通图（k-edge-connected graph），所有非平凡连通图都是1-边连通的。对于图1-8中的图G，$\{u,v\}$是一个2-点截集，$\{x,y,z\}$是一个3-边截集，且G中不存在任何1-点截集和2-边截集，因此有$\kappa(G)=2$，$\lambda(G)=3$。即G是2-连通图，也是3-边连通图。

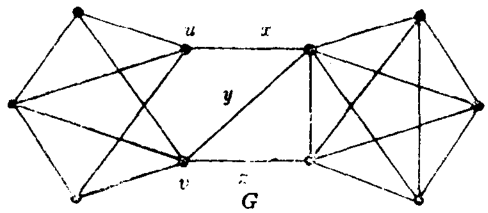


图 1-8

关于连通度有

定理 1.1.2 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$

特别地，构成图G的1-点截集的结点称为图G的割点（cutpoint）；构成图G的1-边截集的边称为图G的桥（bridge）。截集的概念是对于连通图而言的，而割点和桥的概念却通常对非连通图也适用。一般地，图的一个割点是指这样的一个结点，移去它后剩下的图的分支数比原来的图有所增加。桥也可以类似定义。利用割点的概念，我们定义不可分图(nonseparable graph)为连通的非平凡的，而且没有割点的图。图1-8就是一个不可分图。图的一个块(block)是一个极大的不可分子图。G若是不可分的，G本身就称为一个块。图1-9中图G有四个块B_1、B_2、B_3、B_4，v是一个割点，而w则不是割点；x是一条桥，而y不是。

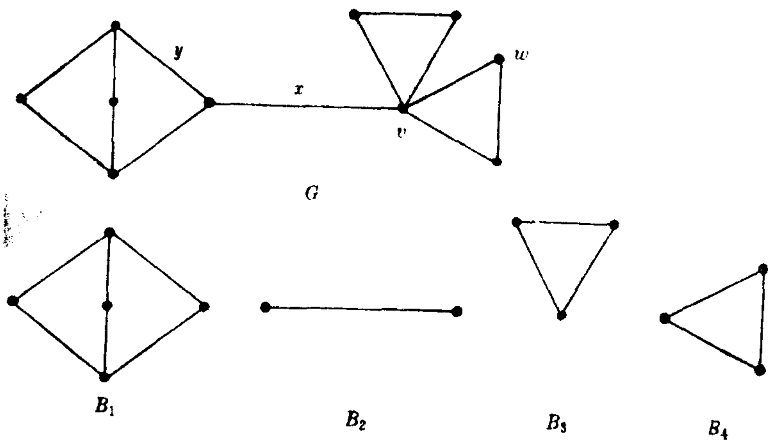


图 1-9

关于块，有下面的结论：

定理 1.1.3 设G是至少有三个结点的一个连通图，下列陈述是等价的。

(1) G是一个块；

(2) G的任何两结点在图G的同一个圈上；

(3) G是2-连通图；

(4) G的任何两条边在图G的同一个圈上；

(5) G的任何一个点和任何一条边在图G的同一个圈上。

下面，介绍本书的重点研究对象树及关于树的一些最基本的性质。

一个图中如果没有圈就称为无圈图（acyclic graph），一个连通的无圈简单图称为树（tree），任何一个没有圈的简单图称为一个林（forest）。可见一个林的各个分支都是树。我们可以有许多等价的方式来定义树。

定理 1.1.4 对于一个图G，下列陈述是等价的。

（1） G是一棵树；

（2） G的任意两个结点由唯一的一条路连接；

（3） G是连通的，且$e=n-1$；

（4） G是无圈的简单图，且$e=n-1$；

（5） G是无圈的简单图，且若将G的任何两个不相邻的点连以一条边x，则$G+x$恰有一个圈。

还有这么一个非常直观的结果

定理 1.1.5 每棵非平凡树至少有两个1度点。

图G的支撑子图如果是树，则称为G的支撑树（spanning tree)。图G所含的支撑树的数目记为$t(G)$。在这里，如果两棵支撑树所含的边集不相等，则认为它们是不同的支撑树，尽管它们可能是同构的。图1-10中，T_1、T_2、T_3是G的所有支撑树，所以$t(G)=3$。虽然T_1、T_2、T_3相互是同构的，但我们还是说它们是G的三棵不同的支撑树。

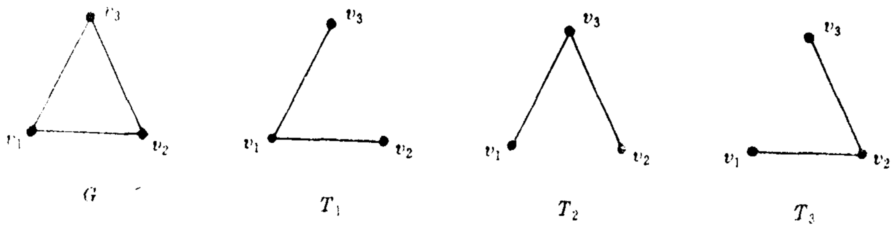


图 1-10

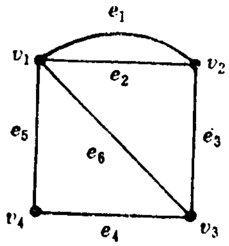
一个图完全由它的相邻性或关联性决定，这种信息可以用矩阵很方便地表示出来。事实上，将一个图适当地标定以后就可以跟某些矩阵建立对应关系，从而使我们能用代数的方法来处理图的问题，在本书的后面章节里将看到在图论中引入矩阵的重要作用。

有n个结点的标定图G的邻接矩阵（adjacency matrix）$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$是一个$n\times n$阶方阵，其中$a_{ij}$是连接$v_i$与$v_j$的边的数目，$v_1$、$v_2$、…、$v_n$为其结点标号。因为我们只考虑无环图，所以$a_{ii}=0$，$i=1, 2, \cdots, n$。这样，有$n$个结点的无环标定图与$n\times n$阶主对角线元素为零的整数对称矩阵之间建立了一个一一对应，也就是说，给定一个无环图就决定一个矩阵，给定一个具有上述性质的矩阵就决定一个无环图。如果图G是简单图，$A(G)$的元素不是0就是1。$A(G)$的任一行（列）的元素之和刚好等于该行所对应的结点在G中的度。

可以完全表示一个图的另一个矩阵是关联矩阵。设v_1，v_2，…，v_n和x_1，x_2，…，x_e分别为图G的结点和边，则G的关联矩阵（incidence matrix）是指矩阵$M(G)=$

$(m_{ij})_{n\times e}$，其中m_{ij}是结点v_i与边x_j关联的次数。对于无环图来说，m_{ij}只能取0或1。

一般来说，图的邻接矩阵要比它的关联矩阵小得多。如图1-11所给出的图G，它的邻接矩阵$A(G)$及关联矩阵$M(G)$分别是



G

图 1-11

$$A(G)=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \left\{\begin{array}{cccc}0&2&1&1\\2&0&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\end{array}\right\}\end{array}\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}$$

$$M(G)=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\ \left\{\begin{array}{cccccc}1&1&0&0&1&1\\1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{array}\right\}\end{array}\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}$$

关于图的矩阵本书用得更多的是Kirchhoff矩阵。设$D(G)$是以图G的结点度为元素的对角矩阵，有时称它为图G的度矩阵（degree matrix），则图G的Kirchhoff矩阵（Kirchhoff matrix）定义为$H(G)=D(G)-A(G)$。有时也称为导纳矩阵，或Nodal admittance矩阵。图1-11中图G的度矩阵和Kirchhoff矩阵分别为：

$$D(G)=\left\{\begin{array}{cccc}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&2\end{array}\right\}\qquad H(G)=\left\{\begin{array}{cccc}4&-2&-1&-1\\-2&3&-1&0\\-1&-1&3&-1\\-1&0&-1&2\end{array}\right\}$$

Kirchhoff 矩阵也是对称矩阵，而且其每行（列）的元素之和等于零。另外，如果将关联矩阵$M(G)$每一列中的两个1的任意一个改写为-1，得到矩阵$S(G)$，则不难看到$H(G)=S(G)\cdot S(G)^T$。

能用较小的或较为简单的图来表示一个图的结构是很有用处的。因此，本节的最后，将介绍图的几种基本运算。对于图G_1和G_2，它们的并（union of graphs），记为$G=G_1\cup G_2$，定义为$V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$，$E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$；它们的交（intersection of graphs），记为$G=G_1\cap G_2$，定义为$V(G)=V(G_1)\cap V(G_2)$，$E(G)=E(G_1)\cap E(G_2)$，如果$V(G_1)\cap V(G_2)\neq\phi$。图1-12给出了两个图$G_1$和$G_2$的并和交的例子。对于一个图$G$，常用$nG$来表示$n$个$G$的并，如图1-7所示的图可以写成$3K_1\cup 2K_2\cup K_3\cup K_{1,2}$。

下面我们假设图G_1和G_2是不相交的，则它们的和（sum of graphs），记为G_1+G_2，是指由$G_1\cup G_2$再加上所有一端在$V(G_1)$另一端在$V(G_2)$的边所组成的图。特别地，有$K_{m,n}=\overline{K}_m+\overline{K}_n$。两个图的积（product of graphs），记为$G_1\times G_2$，是以$V(G_1\times G_2)=\{(u, v_j)|u_i\in V(G_1), v_j\in V(G_2)\}$为结点集，而其任意两个结点$(u_i, v_j)$与$(u_k, v_l)$相邻，当且仅当$u_i=u_k$且$v_j$ adj v_l；或$v_j=v_l$且u_i adj u_k。特别地，

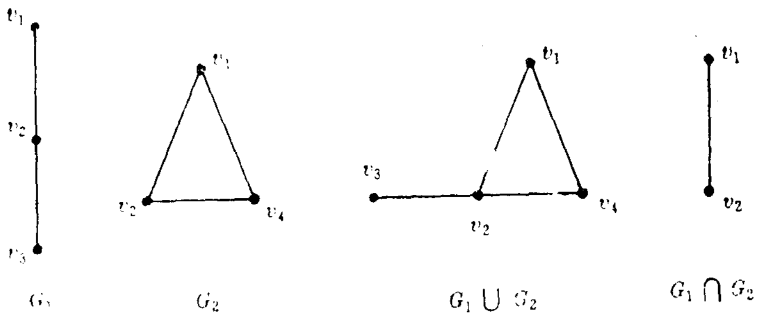


图 1-12

有$Q_1 = K_2$，$Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$。图1-13给出了$G_1 = P_2$和$G_2 = P_3$的和与积。

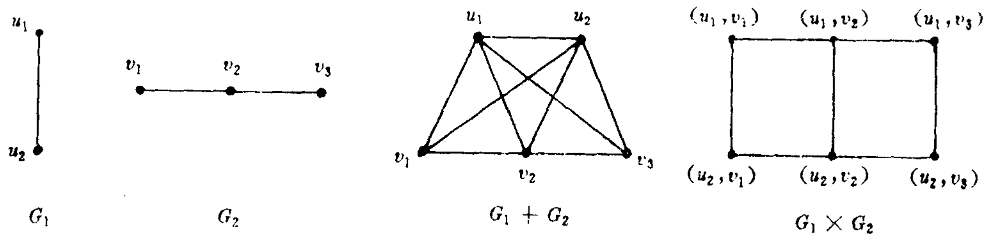


图 1-13

两个图的合成（composition of graphs），记为$G_1[G_2]$，也以$V(G_1 \times G_2)$为结点集，而(u_i, v_j)与(u_k, v_l)相邻，当且仅当$u_i \operatorname{adj} u_k$；或$u_i = u_k$且$v_j \operatorname{adj} v_l$。对于图1-13的两个图$G_1$和$G_2$，两种合成$G_1[G_2]$和$G_2[G_1]$都画在图1-14中，它们显然并不同构，这说明合成是有次序的。

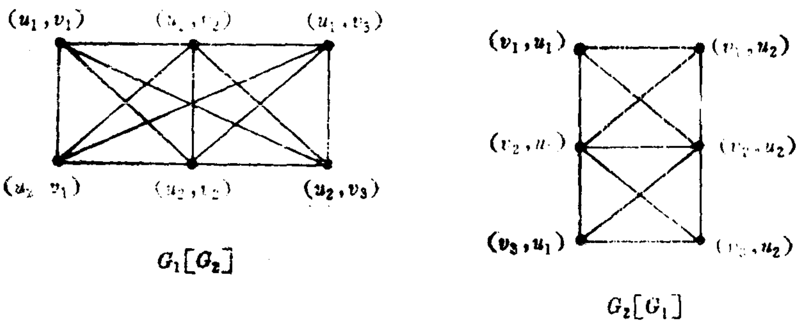


图 1-14

两个图的结合（conjunction of graphs），记为$G_1 \wedge G_2$，以$V(G_1 \times G_2)$为结点集，且(u_i, v_j)与(u_k, v_l)相邻，当且仅当$u_i \operatorname{adj} u_k$且$v_j \operatorname{adj} v_l$。图1-15给出$G_1 = K_2$，$G_2 = K_3$的结合。值得一提的是，两个连通图的结合未必也连通，如图1-13中的图G_1与G_2的结合就不连通。事实上，有下面定理。

定理 1.1.6 两个连通图的结合$G_1 \wedge G_2$是连通图，当且仅当G_1中或G_2中有奇圈。

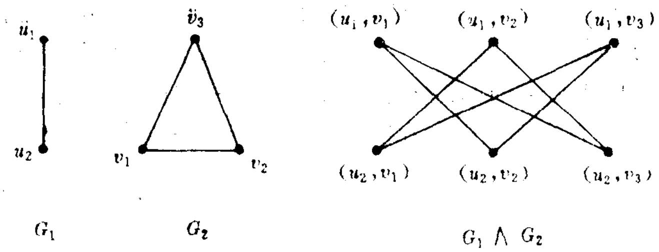


图 1-15

有了图的运算的概念之后，可以定义复合图（composite graph）为一个或几个运算作用于不相交的图上所得到的结果图。设G_1与G_2是不相交的，且$G_1 \in \Omega(n_1,e_1)$，$G_2 \in \Omega(n_2,e_2)$，则对于上述的图的运算（除交以外），可以计算出运算后的复合图中的结点数和边数，这些数目如下表：

运　算	结　点　数	边　数
并$G_1 \cup G_2$	n_1+n_2	e_1+e_2
和G_1+G_2	n_1+n_2	$e_1+e_2+n_1n_2$
积$G_1 \times G_2$	n_1n_1	$n_1e_1+n_2e_1$
合成$G_1[G_2]$	n_1n_2	$n_1e_2+n_2e_1$
结合$G_1 \wedge G_2$	n_1n_2	$2e_1e_2$

§ 1.2　线性代数的基本知识

正如在 §1.1 中所提到的，一个图可以用矩阵来表示，这就使我们有可能用代数方法来研究图的各种性质。事实上，在图论中已形成了代数图论这一分支。本书的主题——支撑树数目的许多结果，正好提供了用代数方法得到图论结果的例证。因此，在这一节将介绍一些有关行列式和矩阵的基本知识，以便在下面的章节中引用。假设读者已经学习过线性代数课程，或已经读过这方面的书籍，熟悉行列式、矩阵的一些最基本的概念和运算。因此，在这里仅列举本书将直接引用到的一些概念和结果，读者可以在有关的代数书中找到它们的证明。

记$A=(a_{ij})_{n\times n}$为一个n阶方阵，$\det(A)$为其行列式，有时也记作$|A|$。

定义 1.2.1　在n阶行列式中划去元素a_{ij}所在的第i行与第j行，剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$阶行列式，称它为元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，而$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式。

这样可以用代数余子式来计算行列式的值$\det(A)$。

定理 1.2.1　$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

更一般地有下面定义：

定义 1.2.2 在一个n阶行列式中任意选定k行k列（$k \leqslant n$），位于这些行和列的交点上的k^2个元素按照原来的排法组成一个k阶行列式M，称为原行列式的一个k级子式。划去这k行k列后余下的元素按照原来的排法组成的$n-k$阶行列式M'称为k级子式M的余子式。设k级子式M在行列式中所在的行、列的指标分别为i_1，i_2，$\cdots$，i_k；j_1，j_2，$\cdots$，j_k，设$s=\sum\limits_{t=1}^{k}(i_t+j_t)$，称$(-1)^s \cdot M'$为$M$的代数余子式，它是一个$n-k$级代数余子式。

定义 1.2.3 如果矩阵A有一个r级子式不为零，而所有的$r+1$级子式全为零，则称数r为矩阵A的秩，记为rank(A)，即rank(A)$=r$。

定义 1.2.4 设A_{ij}是矩阵

$$A=\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\}$$

中元素a_{ij}的代数余子式，则矩阵

$$A^*=\left\{\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}\right\}$$

称为A的伴随矩阵。

因为在证明本书的一个重要定理时，要用到对行列式的求导，这在一般线性代数书中没有介绍，所以，在这里简单介绍一下。

设行列式

$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

是一个含有变量的行列式，如果其中每个$a_{ij}(x)$（i，$j=1$，2，$\cdots$，n）对x都可微，则行列式$D(x)$对x也可微，且

$$D'(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a'_{1j}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a'_{2j}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a'_{nj}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{i2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}
$$

例 1.2.1 设

$$
D(X) = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 3x^2 \end{vmatrix}
$$

则

$$
D'(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2 & 6x \end{vmatrix}
$$

$$
= 6x^2 + 12x^2 = 18x^2
$$

下面介绍一个关于分块行列式的计算方法

定理 1.2.2 设A、B、C、D都是$n\times n$矩阵，如果$AC=CA$，且$\det(A)\neq 0$或$\det(C)\neq 0$则有

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|
$$

例 1.2.2

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right|
$$

$$
= \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 29 & 35 \end{vmatrix} = 8
$$

下面介绍的 Binet-Cauchy 定理，对证明图的支撑树计数方面的一个重要定理将起关键性的作用。首先引入一个记号。设P为$k\times l$矩阵，而

$$
1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant k
$$

$$
1\leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leqslant l
$$

把在矩阵P中位于第i_1，i_2，…，i_p行和第j_1，j_2，…，j_q列交叉点上的元素按原来的排法构成的子阵记为$P\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_q \end{pmatrix}$。

比如，设 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，则