经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2–1

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-1

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　邱万作

编　　者　　李建才　邱万作　高存明

责任编辑　　张唯一

美术编辑　　王　喆　李宏庆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2－1

B 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米 × 1 240 毫米　1/16　印张：8.25　字数：165 000

2005 年 6 月第 1 版　2005 年 11 月第 2 次印刷

ISBN 7－107－18627－2 / G·11717（课）　定价：9.05 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

本册导引

本册是高中数学选修课程系列 2 的组成部分，提供给希望在理工（包括部分经济类）等方面发展的学生学习．同学们根据自己的兴趣和对未来发展的愿望选择了系列 2，本书将为你展现一个新的学习天地，自信和勤奋将伴你走向成功．

本册内容分设三章，一是“常用逻辑用语”，二是“圆锥曲线与方程”，三是“空间向量与立体几何”．这些内容与数学必修课程联系紧密，是相关内容的进一步完善和发展，也是数学基础的进一步充实和加强．

逻辑用语是数学的基本语言，在思维表达、数学论证、人际交流中有重要作用．其实大家对常用的逻辑用语并不陌生，而且也经常使用，只是在数学规范性要求和符号化表达方面了解不多．第一章“常用逻辑用语”，是以同学们已有的知识和生活经验为基础，着重对命题及其关系进行一般化的研究，有助于同学们准确地理解数学内容，有条理地进行思考和分析，简明、准确地进行表达和交流．这一章只是对逻辑用语进行初步的整理和研究，今后要结合具体数学内容的学习，不断加深对逻辑用语的理解，进一步体会它的运用，并在使用的过程中逐步掌握它的用法．

圆锥曲线是常见的图形，并且具有广泛的应用．同学们已经有了利用坐标法研究直线和圆的经验，第二章“圆锥曲线与方程”将以研究圆锥曲线为载体，引导大家进一步学习坐标法，同时获取有关圆锥曲线的基本知识．解析几何是数学的一个重要分支，直线、圆以及圆锥曲线是解析几何入门研究的基本图形，通过这一章的学习，同学们对解析几何的思想、内容和方法会有更加深刻的认识．

在“立体几何初步”的学习中，同学们利用直观分析和演绎推理的方法，获得了立体几何的基础知识．向量是进行几何研究的有力工具，它不仅形象直观，而且有效能算．第三章“空间向量与立体几何”将把向量及其运算由平面推广到空间，再利用向量工具对空间直线和平面的位置关系及其度量问题进行研究．同学们从中可以体会到向量方法在几何研究中的作用；再联系解析几何，会更清晰地看到几何代数化是几何发展的出路所在．

有了“逻辑”的基石，数学的严谨就有了依托；有了“数与形”的结合，数学的腾飞就添上了翅膀．本册内容的学习，既是数学知识的延拓、思想方法的哺育，又是理性精神的磨砺、数学观念的提升，必将为同学们的进一步发展奠定更加厚实的数学基础．

目　录

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题与量词

1.2 基本逻辑联结词

1.3 充分条件、必要条件与命题的四种形式

你已经学习了不少数学知识，是否觉得数学是很美的学科，数学学习能使你准确、严格地思考，数学精神能使你一丝不苟、追求完满. 但是在学习过程中，有时也会发生一些似乎同数学思想格格不入的事情. 例如，考察以下推导：

设 $a=b$，则有

$$
\begin{aligned}
& a^2=ab \\
& \Rightarrow a^2-b^2=ab-b^2 \\
& \Rightarrow (a+b)(a-b)=b(a-b) \\
& \Rightarrow a+b=b \\
& \Rightarrow 2b=b \\
& \Rightarrow 2=1.
\end{aligned}
$$

这是怎么回事？哪儿出错了，是数学失灵了吗？你要找出问题及其原因，就要学习逻辑，学会用正确的逻辑规则去检验推导过程，去分析导出结论.

本章将以你已有的数学知识为基础，学习常用的逻辑用语及其符号化表达方式，以提高你的逻辑分析、数学表达和逻辑思维能力.

1.1 命题与量词

1.1.1 命　题

在数学中，我们常常碰到许多用语言、符号或式子表达的语句. 例如：

(1) $\lg 100=2$；

(2) 所有无理数都是实数；

(3) 垂直于同一条直线的两个平面平行；

(4) 函数 $y=2x+1$ 是单调增函数；

(5) 设 a，b，c，d 是任意实数，如果 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$；

(6) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta\,(\alpha,\beta$ 是任意角).

这些语句都可以判断真假，其中(1)(2)(3)(4)都是真(正确的)，(5)(6)都是假(不正确的).

像这样一些能判断真假的语句就是我们初中已学习过的命题.

一个命题要么是真，要么是假，但不能既真又假，也不能模棱两可、无法判断其真假.

应该指出：(1) 并不是任何语句都是命题，只有那些能够判断真假的语句才是命题. 一般来说，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题，如“三角函数是周期函数吗?”“但愿每一个三次方程都有三个实数根!”“指数函数的图象真漂亮!”等，都不是命题；(2) 在数学或其他科学技术中，还有一类陈述句也经常出现，如“每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和.”(哥德巴赫猜想)“在 2020 年前，将有人登上火星.”等，虽然目前还不能确定这些语句的真假，但是随着科学技术的发展与时间的推移，总能确定它们的真假，人们把这一类猜想仍算为命题.

一个命题，一般可以用一个小写英文字母表示，如：p，q，r，….

练习A

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) $2+2\sqrt{2}$是有理数；

(2) $1+1>2$；

(3) 非典型肺炎是怎样传染的？

(4) 奇数的平方仍是奇数；

(5) 2^{100}是个大数；

(6) 好人一生平安！

2. 判断下列命题的真假：

(1) 方程 $2x=5$ 只有一解；

(2) 凡是质数都是奇数；

(3) 方程 $2x^2+1=0$ 有实数根；

(4) 函数 $y=\sin x$ 是周期函数；

(5) 每个数列都有周期.

练习B

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) $(25-6)\times(35-8)=128$；

(2) 968 能被 11 整除；

(3) $x^2=2$；

(4) $4x^2=2x-1+3x^2$，$x\in\mathbf{R}$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 0 不能作除数；

(2) 没有一个无理数不是实数；

(3) 如果两直线不相交，则这两条直线平行；

(4) 集合 A 是集合 $A\cap B$ 的子集；

(5) 集合 A 是集合 $A\cup B$ 的子集；

(6) 空集是任何集合的子集.

1.1.2 量 词

前边已经讨论过，在数学中，我们经常见到一些含有变量 x 的语句，如“$x^2-1=0$”“$5x-1$ 是整数”等，可用符号 $p(x)$，$q(x)$等表示. 由于不知道 x 代表什么数，无法判断它们的真假，因而它们不是命题. 然而，当赋予变量 x 某个值或一定的条件时，这些含有变量的语句又变成可以判定真假的语句，从而成为命题. 例如：

$p(x)$：$x^2-1=0$，不是命题；

$q(x)$：$5x-1$ 是整数，也不是命题.

如果赋予变量 x 某个数值(如 $x=5$)，可以分别得出

$p(5)$：$5^2-1=0$；

$q(5)$：$5\times5-1$ 是一个整数.

想一想，$p(5)$，$q(5)$ 是命题吗？为什么？

如果在语句 $p(x)$或 $q(x)$前面加上“对所有整数 x”的条件，又可以得出

p_1：对所有整数 x，$x^2-1=0$；

q_1：对所有整数 x，$5x-1$ 是整数.

思考与讨论

p_1，q_1 是命题吗？你能判断它们的真假吗？

这里，短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫做**全称量词**，并用符号“$\forall$”表示. 含有全称量词的命题，叫做**全称命题**.

事实上，全称命题就是陈述某集合所有元素都具有某种性质的命题，用符号表示上述两个全称命题为

p_1：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$；(假)

q_1：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数. (真)

一般地，设 $p(x)$是某集合 M 的所有元素都具有的性质，那么全称命题就是形如“对 M 中的所有 x，$p(x)$”的命题. 用符号简记为

$$\boxed{\forall x \in M,\ p(x).}$$

如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加上“有一个整数 x”的条件，还可以得到命题：

p_2：有一个整数 x，$x^2-1=0$；（真）（为什么?）

q_2：至少有一个整数 x，$5x-1$ 是整数.（真）

短语“有一个”或“有些”或“至少有一个”在陈述中表示所述事物的个体或部分，逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号“$\exists$”表示，含有存在量词的命题，叫做**存在性命题**.

事实上，存在性命题就是陈述在某集合中有(存在)一些元素具有某性质的命题，用符号表示上述两个存在性命题为

p_2：$\exists x \in \mathbf{Z}$，$x^2-1=0$；（真）

q_2：$\exists x \in \mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数.（真）

一般地，设 $q(x)$ 是某集合 M 的有些元素 x 具有的某种性质，那么存在性命题就是形如“存在集合 M 中的元素 x，$q(x)$”的命题，用符号简记为

$$\boxed{\exists x \in M,\ q(x).}$$

例 1 试判断以下命题的真假：

(1) $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+2>0$；

(2) $\forall x \in \mathbf{N}$，$x^4 \geqslant 1$；

(3) $\exists x \in \mathbf{Z}$，$x^3<1$；

(4) $\exists x \in \mathbf{Q}$，$x^2=3$.

分析：要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立；但要判定全称命题是假命题，却只要能举出集合 M 中的一个 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可（这就是通常所说的“举出一个反例”）.

要判定一个存在性命题是真命题，只要在限定集合 M 中，能找到一个 $x=x_0$，使 $p(x_0)$ 成立即可；否则，这一存在性命题就是假命题.

解：(1) 由于 $\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $x^2 \geqslant 0$，因而有

$$x^2+2 \geqslant 2>0，即\ x^2+2>0.$$

因此命题“$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+2>0$”是真命题.

(2) 由于 $0 \in \mathbf{N}$，当 $x=0$ 时，$x^4 \geqslant 1$ 不成立. 因此命题“$\forall x \in \mathbf{N}$，$x^4 \geqslant 1$”是假命题.

(3) 由于 $-1 \in \mathbf{Z}$，当 $x=-1$ 时，能使 $x^3<1$. 因此命

题“$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$”是真命题.

(4) 由于使 $x^2=3$ 成立的数只有$\pm\sqrt{3}$，而它们都不是有理数，因而没有任何一个有理数的平方能等于 3. 因此命题“$\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=3$”是假命题.

一个全称命题，可以包含多个变数，例如：

$$\forall a,\ b\in\mathbf{R},\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

全称命题真，意味着对限定集合中的每一个元素都具有某性质，使所给语句真. 因此，当给出限定集合中的任一个特殊的元素时，自然应导出“这个特殊元素具有这个性质”(这类似于“代入”思想). 例如，因为

“$\forall a,\ b\in\mathbf{R},\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$”真，

所以，当 $a=3$，$b=5$时，

$$(3+5)(9-15+25)=3^3+5^3$$

自然是正确的.

用以上思想去分析本章引言中的“$2=1$”错误，就可以说清道理了. 由 $a=b$ 命题真，可以导出以下三个命题真：$a^2=ab$，$a^2-b^2=ab-b^2$，$(a+b)(a-b)=b(a-b)$. 但下一步导出 $a+b=b$ 是错误的，由于它引用了一个不真的全称命题“$\forall d\in\mathbf{R}$，等式两边可以除以 d”(因为 $d=0$ 时它是假命题). 同样的错误是由 $2b=b$ 导出 $2=1$.

练习A

1. 判断下列语句是不是全称命题或者存在性命题，如果是，用量词符号表达出来：
   (1) 中国的所有江河都流入太平洋；
   (2) 0 不能作除数；
   (3) 任何一个实数除以 1，仍等于这个实数；
   (4) 每一个向量都有方向.
2. 判断下列命题的真假：
   (1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+2=0$；
   (2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1=0$.
3. 试用两种以上的表达方法，叙述以下命题：
   (1) 正方形都是矩形；
   (2) 有一个质数是偶数.

练习B

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) 人会长生不老；

(2) 有的人会长生不老；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x<\tan x$；

(4) $\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x<\tan x$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 在平面直角坐标系中，任意有序实数对(x, y)，都对应一点P；

(2) 存在一个函数，既是偶函数又是奇函数；

(3) 每一条线段的长度都能用正有理数表示；

(4) 存在一个实数，使等式$x^2+x+8=0$成立.

习题1-1 A

1. 判断下列语句是不是命题，如果是，说明其真假：

(1) 奇数不是偶数；

(2) 无理数是$\sqrt{2}$；

(3) 有两个无理数的乘积等于有理数；

(4) 两个向量的夹角可以大于180°；

(5) 指数函数是递增函数吗？

2. 设语句$q(x)$：$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

(1) 写出$q\left(\frac{\pi}{2}\right)$,并判判它是不是真命题？

(2) 写出"$\forall a\in\mathbf{R}$，$q(a)$"，并判判它是不是真命题？

3. 判断下列语句是不是命题，如果是，说明其是全称命题还是存在性命题：

(1) 有一个实数a，a不能取对数；

(2) 所有不等式的解集A，都有$A\subseteq\mathbf{R}$；

(3) 三角函数都是周期函数吗？

(4) 有的向量方向不定.

4. 用量词符号"$\forall$""$\exists$"表示下列命题：

(1) 实数都能写成小数形式；

(2) 凸n边形的外角和等于2π；

(3) 任一个实数乘以-1都等于它的相反数；

(4) 对任意实数 x，都有 $x^3>x^2$；

(5) 对任意角 α，都有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

5. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数；

(3) $\exists\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$；

(4) $\exists x$，$y\in\mathbf{Z}$，$3x-2y=10$；

(5) $\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，方程 $ax+b=0$ 恰有一个解.

6. 试试看：

(1) 找一条你们班上所有学生共有的“性质”，把它写成一个全称真命题；

(2) 确定一条你们班上有些学生具有的“性质”，把它写成存在性真命题.

习题 1-1 B

1. 用全称量词和存在量词表示下列语句：

(1) 有理数都能写成分数形式；

(2) n 边形的内角和等于$(n-2)\times180°$；

(3) 两个有理数之间，都有另一个有理数；

(4) 有一个实数乘以任意一个实数都等于 0.

2. 举反例证明下列命题是假命题：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^2+2x-3>0$；

(3) 对任意一元二次方程都有实数解.

3. 设 $p(x)$：$2^x>x^2$，问：

(1) 当 $x=5$ 时，$p(5)$是真命题吗？

(2) $p(-1)$是真命题吗？

(3) x 取哪些整数值时，$p(x)$是真命题？

4. 为使下列 $p(x)$为真命题，求 x 的取值范围：

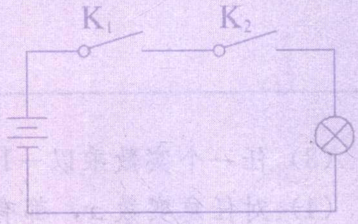
(1) $p(x)$：$x+1>x$；

(2) $p(x)$：$x^2-5x+6>0$；

(3) $p(x)$：$\sin x>\cos x$.

5. 下列各命题中变量的取值范围都为整数，确定它们的真假：

(1) $\forall n$，$n^2\geqslant n$；　　(2) $\forall n$，$n^2<n$.



1.2 基本逻辑联结词

1.2.1 “且”与“或”

1. 且

设命题

p：2 是质数；　　q：2 是偶数.

用“且”联结而构成新命题

2 是质数且是偶数.

一般地，用逻辑联结词“且”把命题 p 和 q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p \wedge q,$$

读作“p 且 q”.

现在的问题是，如何由命题 p，q 的真假，来确定新命题 $p \wedge q$ 的真假呢？

“且”与日常语言中的“并且”“及”“和”相当. 在日常语言中常用“且”联结两个语句. 例如，“他是共青团员，并且学习成绩全班第一”，这个语句表达的意义是，这个同学既是共青团员，他的学习成绩又是全班第一. 显然，这个语句只有在以上两层意思都真时，它表达的才是真实的. 否则，只要有一层意思为假，它表达的就不是真实的.

由此，我们可以得出：

如果 p，q 都是真命题，则 $p \wedge q$ 是真命题；如果 p，q 两个命题中，至少有一个是假命题，则 $p \wedge q$ 是假命题. 反过来，如果 $p \wedge q$ 是真命题，则 p，q 一定都是真命题；如果 $p \wedge q$ 为假命题，则 p，q 两个命题中，至少有一个是假命题，即以下三种情况一定有一种情况出现：

(1) p 真，q 假；(2) p 假，q 真；(3) p 假，q 假.

注 在数理逻辑的书中，通常把如何判定 $p\wedge q$ 真假的几种情况总结成表Ⅰ.

表Ⅰ

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

想一想，这张表是不是清楚地表达了，如何由 p，q 的真假来确定 $p\wedge q$ 的真假？

思考与讨论

如图1-1 所示，一个电路串联一个灯泡和两个开关 K_1，K_2. 当两个开关 K_1 和 K_2 都闭合时，灯就亮；当两个开关 K_1，K_2 只有一个闭合或两个都不闭合时，灯都不会亮. 从中你能理解和体会逻辑联结词“且”的意义吗？

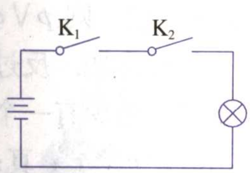


图 1-1

例 1 把下列各组命题用“且”联结组成新命题，并判定其真假：

(1) p：$\lg 0.1<0$，　　q：$\lg 11>0$；

(2) p：$y=\cos x$ 是周期函数，q：$y=\cos x$ 是奇函数.

解：(1) 因为 $\lg 0.1<0$ 为真命题，$\lg 11>0$ 也为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

(2) 因为 $y=\cos x$ 是周期函数为真命题，$y=\cos x$ 是奇函数为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

2. 或

逻辑联结词“或”的意义和日常语言中的“或者”是相当的. 但是日常语言中的“或者”有两类用法：其一是“不可兼”的“或”，如“向东或向西走”，这里不可能同时向东又向西；其二是“可兼”的“或”，如“要苹果或