苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学教学参考书 5

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

（必修）

数学 5

SHU XUE

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

苏教版普通高中课程标准实验教科书

高中数学教学参考书

数学 5(必修)

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　陆云泉

编写人员　陆云泉　于明　寇恒清　徐稼红

责任编辑　蔡　立

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的数学学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,促进学生进行观察、操作、探究和运用等活动感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识、应用意识.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.教科书面向所有学生,使每一个学生都获得必备的数学素养,都能获得最佳发展.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.以基本教学要求为核心,通过这个载体,学生可以获得全方位的发展.学生学好核心内容后,根据需要,有多种选择.

本套教科书的体例安排主要有以下特点.

1. 根据《标准》的要求,按知识发展顺序把整套教材分成几条主线,组合成一个有机整体,每个模块有自己整体贯通的主线,每章有核心的概念或原理,各章相互联系.

2. 每章内容由章头图、引言、正文、本章回顾、复习题、探究案例、实习作业等构成.引言包括:

① 本章的主背景.以入口较浅的、学生能理解的生活实例或其他实例,引发学生思考.这个背景又是本章核心内容的原型,在一章中将多次按不同层次或方向出现,统领全章.

② 引领本章内容的问题.这是本章的生长点,是本章核心内容或研究方法的出发点,它将激发学生探索新知识的欲望.

3. 节包括内容组织、活动开展、拓展栏目、习题、阅读等内容.节为教学的基本单元,每节有自己的小系统.每节开头在章的背景下,给出分支背景,围绕章的问题,提出相应问题.这些问题就是本节的起点、核心内容的出发点.

4. 内容组织主要形式为:

问题情境 → 学生活动 → 意义建构 → 数学理论 → 数学运用 → 回顾反思

问题情境包括实例、情景、问题、叙述等.编写意图是提出问题.

学生活动包括观察、操作、归纳、猜想、验证、推理、建立模型、提出方法等个体活动,也包括讨论、合作、交流、互动等小组活动.编写意图是体验数学.

意义建构包括经历过程、感受意义、形成表象、自我表征等.编写意图是感知数学.

数学理论包括概念定义、定理叙述、模型描述、算法程序等.编写意图是建立数学.

数学运用包括辨别、解释、解决简单问题、解决复杂问题等.编写意图是运用数学.

回顾反思包括回顾、总结、联系、整合、拓广、创新、凝缩(由过程到对象)等.编写意图是理解数学.

5. 拓展栏目有思考、实验、探究、阅读、链接等,穿插在各个环节中.

6. 习题、复习题分为紧密联系的三个层次——感受·理解、思考·运用、探究·拓展,教师可根据教学需要选择.

本套教师教学参考用书与《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套,供教师教学使用.每册书按章编排,每章包括本章教育目标、本章设计意图、本章教学建议、本章内容分析、本章教学案例、本章参考答案等内容.

《普通高中课程标准实验教科书·数学》编写组

2005年12月

目　录

第1章 解三角形

三角形是最基本的几何图形.三角形中的数量关系在天文、地理、航海等领域中有着极其广泛的应用.本章我们将在以前学习的三角形、三角函数和解直角三角形等知识的基础上,通过对任意三角形边角关系的研究,发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系,运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

一、本章教育目标

通过对任意三角形边角关系的研究,培养学生的归纳、猜想、论证能力以及分析问题和解决问题的能力,同时让学生在学习中感受数学的对称美与和谐美.通过解决一些实际问题,培养学生的数学应用意识,激发学生学习数学的兴趣,让学生感受到数学知识既来源于生活,又服务于生活.

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.

2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量学、力学、运动学以及几何计算等有关的实际问题.

二、本章设计意图

解三角形是在学习了三角函数与平面向量的基础上,对任意三角形的边长和角度关系所作的进一步探索和研究.正弦定理和余弦定理的证明让学生经历了运用向量工具解决三角形的度量问题的过程,从而为运用向量解决几何度量问题奠定基础.

围绕本章的教学目标,教材注重数学知识的应用性,体现学以致用的原则,让学生自主体验数学在解决问题中的作用,提高学生的分析问题和解决问题的能力,培养数学应用意识;注重数学内部不同分支之间的联系、数学与日常生活的联系、数学与其他学科的联系,从而提高学生对数学的整体认识,体现数学的文化价值.

本章分为"正弦定理"、"余弦定理"、"正弦定理、余弦定理的应用"三大节.

第一节是"正弦定理".教材首先由学生熟悉的直角三角形中的边角关系得出正弦定理的形式,猜想对于任意三角形该结论也成立,然后引导学生按不同的思路尝试证明正弦定理.这一过程与以往教材的设计不同,它有助于发挥学生学习的主动性,使学生的学习过程成为在教师引导下的"发现"过程,从而培养学生的"数学探究"能力,体现了由特殊到一般的思维规律.

教材通过例题说明了正弦定理在两类解斜三角形问题中的应用,并解决了与三角形形状有关的几何问题,让学生认识到三角问题与几何问题的密切联系,以及它们之间的相互转化.

第二节是"余弦定理".教材通过向量的数量积将向量等式化为数量等式,得出余弦定理,体现了向量方法在解三角形中的作用,让学生进一步感受数学的和谐美.

教材通过问题的解决来体现余弦定理在解三角形、几何问题、实际问题中的运用,让学生体会数学中的转化思想.

第三节是"正弦定理、余弦定理的应用".教材通过具体实例体现解三角形在测量学、运动学、力学等领域的应用,以及正弦定理、余弦定理在几何证明或计算、最值探求等方面的应用.

教材注意了信息技术在探索问题中的作用,如正弦定理的探索和验证、使用计算器进行近似计算等.一方面,学生借助信息技术手段,从事一些富有探索性和创造性的数学活动,可以培养学生的探索精神和创新精神;另一方面,借助计算器可以解决计算量大的问题,也可以根据实际需要进行近似计算,有利于激发学生学习数学的兴趣.

三、本章教学建议

1. 充分利用教材中的引言，介绍本章所蕴涵的数学文化背景，激发学生的学习兴趣.

2. 注重知识形成的过程，通过从特殊到一般，再从一般到特殊的过程，引导学生从猜想、验证到证明等环节自主探究，从而培养学生良好的学习习惯. 让学生在学习数学和运用数学解决问题的过程中，不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、抽象概括、符号表示、运算求解、演绎证明、反思与建构等思维过程.

3. 重视课本内容的教学，强化课本例题的教学功能，不要在恒等变形上进行过于繁琐的训练. 重点引导学生体验数学在解决问题中的作用，感受数学与日常生活及其他学科的联系，发展数学应用意识，提高实践能力.

4. 教学形式灵活多样，不只限于让学生接受、记忆、模仿和练习，应当引导学生独立思考，尊重学生的学习主体地位，倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学；课堂教学应适当运用多媒体手段辅助教学；课外活动应设计一些研究性、开放性题材，让学生自行探索解决，同时还可以引导学生尝试用向量的方法去解决三角形的度量问题，培养学生的实践能力和数学建模能力.

5. 注意挖掘课本习题培养学生能力的功能. 与以往的教材相比，新教材增添了探究拓展题，目的是通过学生的自主探究，发现规律，让学生体验数学的发现和创造过程，培养学生的"数学探究"意识和创新意识.

6. 从正弦定理和余弦定理的推导过程，以及对公式结构特征的分析，引导学生领会数学的美育价值.

本章的教学大约安排 8 课时，具体如下：

1.1 正弦定理	约 2 课时
1.2 余弦定理	约 2 课时
1.3 正弦定理、余弦定理的应用	约 2 课时
实习作业	约 1 课时
本章复习与小结	约 1 课时

四、本章内容分析(见下)

1.1 正弦定理

为了探索任意三角形中的边角关系，我们先回忆直角三角形中的边角关系.

如图 1-1-1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，我们有

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c},\ \sin C=1=\frac{c}{c}.$$

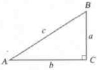


图 1-1-1

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

● 上述结论，对任意三角形也成立吗？

如图 1-1-2 所示，任意画一个三角形，然后测量此三角形三个内角的大小及三条边的长，再对每条边计算其长度与它的对角的正弦值之比，三个比值相等吗？改变三角形的形状再试一试.

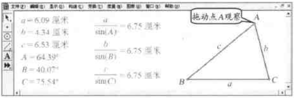


图 1-1-2

本章如无特别说明，a，b，c 分别表示 $\triangle ABC$ 中角 A，B，C 所对边的长.

于是我们猜想：对于任意三角形 ABC，都有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

即在一个三角形中，各边和它所对角的正弦之比相等.

我们可以通过下面的途径尝试证明上述结论：

(1) 转化为直角三角形中的边角关系；

(2) 建立直角坐标系，利用三角函数的定义；

(3) 通过三角形的外接圆，将任意三角形问题转化为直角三角形问题；

(4) 利用向量的投影或向量的数量积(产生三角函数).

证法 1　不妨设$\angle C$为最大角.

(1) 若$\angle C$为直角，我们已经证得结论成立.

编写意图与教学建议

1. 教材为了探索三角形的边角关系，首先通过对直角三角形边角关系的归纳，得出直角三角形的正弦定理，并提出问题：对任意三角形也成立吗？接着进行验证，然后作出猜想. 这样处理有利于培养学生的归纳、猜想能力.

2. 教学时要按课本要求用几何画板演示(如果不具备条件的话也可通过纸笔或计算器来计算)任意三角形三边长与其对角的正弦值之比，让学生通过验证感受到：对任意三角形，都有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

3. 教学时应当强调，验证不能代替证明. 如何进行证明，可组织学生进行讨论，最好能由学生给出证明思路.

教学目标

1. 掌握正弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

2. 初步运用正弦定理解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

1. 证法1是通过作BC边上的高AD将任意三角形中的边角关系转化为直角三角形中的边角关系，由于垂足D的位置不同，所以要分类讨论.

2. 证法2是用向量方法证明的. 证明的关键是将向量等式转化为数量等式. 在向量的数量积中，由向量的投影可产生三角函数，从而得到相应的边角关系.

(2) 若$\angle C$为锐角(图1-1-3(1))，过点A作$AD\perp BC$于D，此时有

$$\sin B=\frac{AD}{c},\ \sin C=\frac{AD}{b},$$

所以$c\sin B=b\sin C$，即

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理可得
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(1) (2)

图1-1-3

(3) 若$\angle C$为钝角(图1-1-3(2))，过点A作$AD\perp BC$，交BC的延长线于D，此时也有

$$\sin B=\frac{AD}{c},$$

且

$$\sin\angle ACB=\sin(180^\circ-\angle ACB)=\frac{AD}{b}.$$

仿(2)可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

由(1)，(2)，(3)知，结论成立.

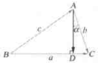


图1-1-4

向量的数量积是将向量等式转化为数量等式的常用工具.

证法2 在$\triangle ABC$中，有$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$. 不妨设$\angle C$为最大角，过点A作$AD\perp BC$于D(图1-1-4)，于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

即

$$0=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AD}|\cos(90^\circ+B)+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\alpha,$$

其中，当$\angle C$为锐角或直角时，$\alpha=90^\circ-C$；当$\angle C$为钝角时，$\alpha=C-90^\circ$.

故可得

$$c\sin B - b\sin C = 0,$$

即

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得 $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

上述等式表明，三角形的各边和它所对角的正弦之比相等. 这样，我们得到正弦定理(sine theorem)：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

思　考

尝试用其他方法证明正弦定理.

例1 如图 1-1-5，在△ABC 中，$A = 30°$，$C = 100°$，$a = 10$，求 b，c(精确到 0.01).

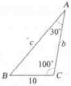


图 1-1-5

解　因为 $A = 30°$，$C = 100°$，所以 $B = 50°$.

因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$，所以

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{10\sin 50°}{\sin 30°} \approx 15.32,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{10\sin 100°}{\sin 30°} \approx 19.70.$$

因此，b，c 的长分别为 15.32 和 19.70.

解斜三角形是指由六个元素(三条边和三个角)中的三个元素(至少有一个是边)，求其余三个未知元素的过程.

例2 根据下列条件解三角形(边长精确到 0.01，角度精确到0.1°)：

(1) $a = 16$，$b = 26$，$A = 30°$；

(2) $a = 30$，$b = 26$，$A = 30°$.

解　(1) 由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30°}{16} = \frac{13}{16},$$

1. [思考]　根据第 5 页的途径(2)，(3)，我们可以得到以下的证明方法.

方法 1　建立如图 1 所示的平面直角坐标系，则有 $A(c\cos B, c\sin B)$，$C(a, 0)$，

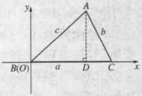


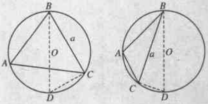
图 1

所以 △ABC 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B$. 同理 △$ABC$ 的面积还可以表示为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$ 及 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$. 所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

方法 2　如图 2，设 ⊙O 是△ABC 的外接圆，直径 $BD = 2R$. (1) 如图 2(1)，当 A 为锐角时，连 CD，则 $\angle BCD = 90°$，$a = 2R\sin D$. 又 $\angle D = \angle A$，所以 $a = 2R\sin A$. (2) 如图 2(2)，当 A 为钝角时，连 CD，则 $\angle BCD = 90°$，$a = 2R\sin D$. 又 $\angle A + \angle D = 180°$，可得 $\sin D = \sin(180° - A) = \sin A$，所以 $a = 2R\sin A$. (3) 当 A 为直角时，$a = 2R$，显然有 $a = 2R\sin A$. 所以不论 A 是锐角、钝角、直角，总有 $a = 2R\sin A$.

同理可证 $b = 2R\sin B$，$c = 2R\sin C$. 所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

由此可知，三角形的各边与其所对角的正弦之比是一个定值，这个定值就是三角形外接圆的直径.



(1)　(2)

图 2

2. 例 2 是已知两边及其中一边的对角解三角形的问题，教学中应让学生明白产生两解的原因以及具体地怎样判断增解. 一般地，根据给定条件来判定能否确定三角形的问题不必过于加深.

所以 $B_1 \approx 54.3^\circ$，或 $B_2 = 180^\circ - 54.3^\circ = 125.7^\circ$.

由于 $B_2 + A = 125.7^\circ + 30^\circ = 155.7^\circ < 180^\circ$，故 B_2 也符合要求.从而 B 有两解(图 1-1-6)：

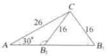


图 1-1-6

$$B_1 = 54.3^\circ, \text{或 } B_2 = 125.7^\circ.$$

当 $B_1 = 54.3^\circ$ 时，

$$C_1 = 180^\circ - (A + B_1) = 180^\circ - (30^\circ + 54.3^\circ) = 95.7^\circ,$$

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A} = \frac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 31.84.$$

当 $B_2 = 125.7^\circ$ 时，

$$C_2 = 180^\circ - (A + B_2) = 180^\circ - (30^\circ + 125.7^\circ) = 24.3^\circ,$$

$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A} = \frac{16\sin 24.3^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 13.17.$$

(2) 由正弦定理，得

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{26\sin 30^\circ}{30} = \frac{13}{30},$$

所以 $B_1 = 25.7^\circ$，或 $B_2 = 180^\circ - 25.7^\circ = 154.3^\circ$.

由于 $B_2 + A = 154.3^\circ + 30^\circ = 184.3^\circ > 180^\circ$，故 B_2 不符合要求，从而 B 只有一解(图 1-1-7).

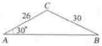


图 1-1-7

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (30^\circ + 25.7^\circ) = 124.3^\circ,$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{30\sin 124.3^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 49.57.$$

利用正弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1) 已知两角与任一边，求其他两边和一角；

(2) 已知两边与其中一边的对角，求另一边的对角(从而进一步求出其他的边和角).

CALCULATOR

(1) 在上面例 2(1)中，用计算器由 $\sin B = \frac{13}{16}$ 求锐角 B 时，要先确认角度的显示单位. 按 MODE MODE 1 键，以度为单位显示结果；按 MODE MODE 2 键，则以弧度为单位显示结果. 然后按 SHIFT $\sin^{-1}$ (1 3 ÷ 1 6) = 键，得锐角 B，这里的括号不能省.

(2) B 型函数(如 sin, cos, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, log, 10^x, $\sqrt{\ }$ 等)值的计算,应先按函数键再输入数值,且这类函数前的乘号可省,如计算 $\dfrac{16\sin 95.7^\circ}{\sin 30^\circ}$ 时,只需按 1 6 sin 9 5 . 7 ÷ sin 3 0 =.

练　习

1. 一个三角形的两个内角分别为 30°和 45°,如果 45°角所对的边长为 8,那么 30°角所对边的长是(　　).

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{6}$

2. 在$\triangle ABC$中,

(1) 已知 $A=75^\circ$, $B=45^\circ$, $c=3\sqrt{2}$,求 a, b;

(2) 已知 $A=30^\circ$, $B=120^\circ$, $b=12$,求 a, c.

3. 根据下列条件解三角形:

(1) $b=40$, $c=20$, $C=25^\circ$;

(2) $b=13$, $a=26$, $B=30^\circ$.

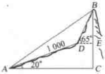


图 1-1-8

例 3 如图 1-1-8,某登山队在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 35°,沿倾斜角为 20°的斜坡前进 1 000 m 后到达 D 处,又测得山顶的仰角为 65°,求山的高度 BC(精确到 1 m).

分析　要求 BC,只要求 AB,为此考虑解$\triangle ABD$.

解　过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E,因为 $\angle DAC=20^\circ$,所以 $\angle ADE=160^\circ$,于是

$$\angle ADB = 360^\circ - 160^\circ - 65^\circ = 135^\circ.$$

又 $\angle BAD = 35^\circ - 20^\circ = 15^\circ$,所以 $\angle ABD = 30^\circ$.

在$\triangle ABD$中,由正弦定理,得

$$AB = \frac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD} = \frac{1\,000\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 1\,000\sqrt{2}(\text{m}).$$

在 Rt$\triangle ABC$ 中,

$$BC = AB\sin 35^\circ = 1\,000\sqrt{2}\sin 35^\circ \approx 811(\text{m}).$$

答　山的高度约为 811 m.

例 4 在$\triangle ABC$中,已知 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$,试判断$\triangle ABC$的形状.

解　令 $\dfrac{a}{\sin A}=k$,由正弦定理,得

$$a = k\sin A,\ b = k\sin B,\ c = k\sin C.$$

1. 例 3 是正弦定理在高度测量问题中的应用,教学时应引导学生寻找和分析条件与结论所涉及的三角形中的边角关系.

2. 例 4 是关于三角形形状判断的问题,判断三角形形状,通常是指等腰三角形、等边三角形、直角三角形或等腰直角三角形等特殊三角形. 教学时应引导学生运用正弦定理将三角形中的边的关系与角的关系相互转化.

1. 例5是平面几何中的三角形内角平分线定理，教学时应通过分析指出，解题的关键是运用正弦定理将线段之比转化成三角函数之比. 可以建议学生课后去探求和证明三角形外角平分线定理，从而给学生创设活动空间.

代入已知条件，得

通过正弦定理，可以实现边角互化.

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C},$$

即

$$\tan A=\tan B=\tan C.$$

又 $A, B, C\in(0,\pi)$，所以 $A=B=C$，从而$\triangle ABC$为正三角形.

例5 在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线(图1-1-9)，用正弦定理证明

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

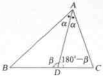


图1-1-9

证 设$\angle BAD=\alpha$，$\angle BDA=\beta$，则$\angle CAD=\alpha$，$\angle CDA=180^\circ-\beta$. 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中分别运用正弦定理，得

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\beta)}{\sin\alpha}.$$

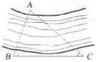
又$\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$，所以

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC},$$

即

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

练 习



(第1题)

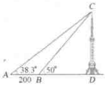
1. 为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩A，B(如图). 要测算出A，B两点间的距离，测量人员在岸边定出基线BC，测得$BC=78.35$ m，$\angle B=69^\circ43'$，$\angle C=41^\circ12'$，试计算AB的长(精确到0.01 m).
2. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$的形状：
(1) $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$；
(2) $a\cos A=b\cos B$.
3. 在$\triangle ABC$中，若$A=60^\circ$，$a=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$等于(　　).

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

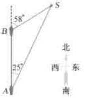
习题 1.1

感受·理解

1. 在$\triangle ABC$中，
(1) 已知$A=135^\circ$，$B=15^\circ$，$c=1$，求这个三角形的最大边的长；
(2) 已知$A=26^\circ$，$C=47^\circ$，$b=16$，求a，c，B.
2. 根据下列条件解三角形：
(1) $b=25$，$c=12$，$C=23^\circ$；
(2) $b=47$，$c=38$，$C=110^\circ$；
(3) $a=14$，$b=7\sqrt{6}$，$B=60^\circ$.
3. 如图，从A点和B点测得上海东方明珠电视塔顶C的仰角分别为38.3°和50°，$AB=200$ m，求东方明珠电视塔的高度(精确到1 m).



(第3题)



(第4题)

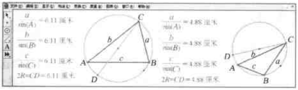
4. 一艘船以42 n mile/h的速度向正北航行. 在A处看灯塔S在船的北偏东25°，30 min后航行到B处，在B处看灯塔S在船的北偏东58°. 求灯塔S与B之间的距离(精确到0.1 n mile).
5. 在$\triangle ABC$中，已知$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

思考·运用

6. 仿照正弦定理的证法1，证明$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，并运用这一结论解决下面的问题：
(1) 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$b=3$，$C=150^\circ$，求$S_{\triangle ABC}$；
(2) 在$\triangle ABC$中，已知$c=10$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$，求b和$S_{\triangle ABC}$；
(3) 证明正弦定理.
7. 在$\triangle ABC$中，设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$. 已知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，证明$\triangle ABC$为正三角形.
8. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的外角平分线交BC的延长线于D，用正弦定理证明：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

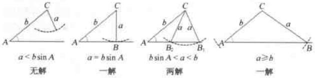
探究·拓展

9. 在Rt$\triangle ABC$中，斜边c等于Rt$\triangle ABC$外接圆的直径$2R$，故有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，这一关系对任意三角形也成立吗(如图)？探索并证明你的结论.



（第9题）

10. （阅读题）在已知两边 a，b 和一边的对角 A，求角 B 时，如果 A 为锐角，那么可能出现以下情况（如图）：



（第10题）

如果 A 为钝角，那么可能会出现哪几种情况？试画出草图加以说明.

1.2 余弦定理

在上节中,我们通过等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 的两边与 $\overrightarrow{AD}$(AD 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高)作数量积,将向量等式转化为数量关系,进而推出了正弦定理.

● 还有其他途径将向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化吗?

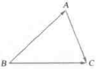


图 1-2-1

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$(图 1-2-1),所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\\&=|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-A)+|\overrightarrow{AC}|^2\\&=c^2-2cb\cos A+b^2,\end{aligned}$$

即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

上述等式表明,三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 这样,我们得到余弦定理(cosine theorem):

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

思考 回顾正弦定理的证明,尝试用其他方法证明余弦定理.

余弦定理也可以写成如下形式:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

13

1. 教材先引导学生回顾用向量的数量积证明正弦定理的方法,然后提出,还能有其他方法将向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化吗? 从而通过研究得出任一三角形的三边及其一角之间的关系,即余弦定理. 教学时应重点在如何将向量等式 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ 数量化上下功夫.

2. 教学时指出,由于 $\cos 90^\circ=0$,所以余弦定理可以看成是勾股定理的推广,勾股定理是余弦定理的特例.

3. [思考] **方法 1** 如图 1 建立直角坐标系,则 $A(0,0)$, $B(c\cos A, c\sin A)$, $C(b,0)$. 所以 $a^2=(c\cos A-b)^2+(c\sin A)^2=c^2\cos^2 A+c^2\sin^2 A-2bc\cos A+b^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

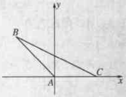


图 1

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

注:此法的优点在于不必对 A 是锐角、直角、钝角进行分类讨论.

方法 2 若 A 是锐角,如图 2,由 B 作 $BD\perp AC$,垂足为 D,则 $AD=c\cos A$. 所以

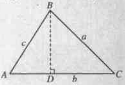


图 2

$a^2=DC^2+BD^2=(AC-AD)^2+BD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD+BD^2=AC^2+(AD^2+BD^2)-2AC\cdot AD=b^2+c^2-2bc\cos A$, 即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

类似地,可以证明当 A 是钝角时,结论也成立,而当 A 是直角时,结论显然成立.

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

方法 3 由正弦定理,得 $a=2R\sin A=2R\sin(B+C)$.

所以 $a^2=4R^2\sin^2(B+C)=4R^2(\sin^2 B\cos^2 C+\cos^2 B\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos B\cos C)=4R^2[\sin^2 B(1-\sin^2 C)+(1-\sin^2 B)\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos B\cos C]=4R^2[\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos(B+C)]=4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C-2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

教学目标

1. 掌握余弦定理,并能解决一些简单的度量问题.
2. 初步运用余弦定理解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

1. 例3表明，要判断角 C 是锐角还是钝角，只需判断 a^2+b^2 与 c^2 的大小.

例1 在 $\triangle ABC$ 中，

(1) 已知 $b=3$，$c=1$，$A=60°$，求 a；

(2) 已知 $a=4$，$b=5$，$c=6$，求 A（精确到 $0.1°$）.

解 (1) 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos 60°\\&=7,\end{aligned}$$

所以

$$a=\sqrt{7}.$$

(2) 由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=0.75,$$

所以

$$A\approx41.4°.$$

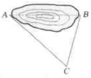


图 1-2-2

例2 A，B 两地之间隔着一个水塘（图 1-2-2），现选择另一点 C，测得 $CA=182\text{ m}$，$CB=126\text{ m}$，$\angle ACB=63°$，求 A，B 两地之间的距离（精确到 1 m）.

解 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}AB^2&=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos C\\&=182^2+126^2-2\times182\times126\cos 63°\\&\approx28\,178.18,\end{aligned}$$

所以 $AB\approx168(\text{m})$.

答 A，B 两地之间的距离约为 168 m.

例3 用余弦定理证明：在 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle C$ 为锐角时，$a^2+b^2>c^2$；当 $\angle C$ 为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

证 当 $\angle C$ 为锐角时，$\cos C>0$，由余弦定理，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C<a^2+b^2,$$

即

$$a^2+b^2>c^2.$$

余弦定理可以看做是勾股定理的推广.

同理可证，当 $\angle C$ 为钝角时，$a^2+b^2<c^2$.

利用余弦定理，可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1) 已知三边，求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.