

高等医学院校本科教材

MEDICAL
HIGHER MATHEMATICS

医用高等数学

主编 黄大同

郑州大学出版社

高等医学院校本科教材

医用高等数学

Medical Higher Mathematics

主 编 黄大同

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/黄大同主编. —郑州:郑州大学出版社,2002.9

ISBN 7-81048-670-5

I. 医… II. 黄… III. 医用数学—医学院校—教材 IV. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 068684 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

出版人:谷振清

全国新华书店经销

郑州文华印刷厂印制

开本:787 mm × 1 092 mm

印张:15.25

字数:352 千字

版次:2002 年 9 月第 1 版

邮政编码:450052

发行部电话:0371-6966070

1/16

印次:2002 年 9 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81048-670-5/R·538

定价:28.00 元

本书如有印装质量问题,由承印厂负责调换

《医用高等数学》作者名单

主 编 黄大同

副主编 李锁柱

编 委 黄大同 李锁柱 孙千仞

梅秉强 陈铁生

内容提要

本书根据卫生部 1981 年修订的《五年制医学院校教学计划》要求,结合 21 世纪初的教学实际需要编纂而成。全书包括函数和极限、导数与微分、不定积分、定积分、微分方程基础、多元函数积分基础、概率论基础、统计初步等内容。在保持学科系统性的基础上,力求教学内容具有基础性、医用性、时代性和少而精的特点,着重讲述基本概念、基本原理和基本方法。本书可作为高等医学院校教材及综合大学、师范学院生物学专业的高等数学教材,也可供医学工作者参考。

前 言

本书是根据 21 世纪初教学改革的新形势及现代医学对高等数学的需求,参考国内外的有关教材,结合近几年各作者院校的教学改革经验而编写的。

高等数学是各门自然科学的基础,数学原理、方法与计算机技术的应用,有力地促进了生命科学的研究和现代医学的发展。自 1982 年以来,医用高等数学一直是我国高等医学院校的一门公共基础课,它的任务是:①培养学生的抽象思维和数值运算能力,更好地处理今后在实践中出现的数学问题;②授予学生比较系统的数学基础知识,为学习后继课程(包括医学课程)打下必要的基础;③使学生了解数学在医学上的应用以及由此产生的一些边缘学科,拓展其知识面。总的来说,我们编写教材的指导思想是紧紧围绕新世纪人才培养目标,着重培养学生的逻辑推理和定量分析能力,提高医学生的综合素质。

在本书编写过程中,我们注意突出基本理论、基础知识和基本技能,在保证学科系统性的前提下,结合医学院校的教学实际,尽量更新教学内容,配合教学方法的改进,使教材具有思想性、科学性、先进性、启发性和适用性。根据近几年各院校普遍缩减理论课学时的情况,编者注意精简内容、控制难度,通过适量典型实例进行深入浅出的讲解,做到“教师易教,学生易学”,力求突出教学重点并且密切结合医学应用。

本教材包括函数和极限、导数与微分、不定积分、定积分、微分方程、多元函数、微积分、概率论基础和统计学初步共 8 章,书末附有数学用表和习题参考答案。内容编排基本上参照 50~70 学时教学计划,对于 40 学时左右的数学课程,建议选择第一章至第五章(从函数与极限到微分方程)讲授。本书可供五年制高等医学院校的临床医学、医学检验、医学影像、预防医学、护理、口腔和法医等专业学生使用,同时也可供医学工作者参考。

参加本书编写的教师有广州医学院黄大同(主编)、梅秉强,郑州大学医学院李锁柱(副主编)、孙千仞、陈铁生。本书的编写得到广州医学院和郑州大学医学院等单位的领导和有关部门的支持,特此表示衷心的感谢。

黄大同
2002 年 8 月

目 录

| | |
|-------------------------------------------------|----|
| 第一章 函数和极限 | 1 |
| 第一节 函数的概念 | 1 |
| 一、函数的概念 | 1 |
| 二、分段函数 | 2 |
| 三、复合函数 | 3 |
| 四、初等函数 | 4 |
| 第二节 极限的概念 | 5 |
| 一、数列的极限 | 6 |
| 二、函数的极限 | 7 |
| 三、无穷小量及其性质 | 9 |
| 四、极限的四则运算 | 9 |
| 五、2个重要极限 | 11 |
| 六、无穷大量、无穷小的比较 | 13 |
| 第三节 函数的连续性 | 14 |
| 一、函数的连续点与间断点 | 14 |
| 二、在区间上连续的函数 | 16 |
| 三、初等函数的连续性 | 17 |
| 习题一 | 18 |
| 第二章 导数与微分 | 20 |
| 第一节 导数的概念 | 20 |
| 一、2个实例 | 20 |
| 二、导数——函数的变化率 | 21 |
| 三、导数的几何意义 | 22 |
| 四、函数的连续性与可导性之间的关系 | 23 |
| 第二节 基本初等函数的导数 | 24 |
| 一、常数的导数 | 24 |
| 二、幂函数 $y = x^n$ (n 为正整数) 的导数 | 25 |
| 三、正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的导数 | 25 |
| 四、对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数 | 26 |
| 第三节 函数的和、差、积、商的导数 | 26 |
| 第四节 复合函数的导数 | 29 |
| 第五节 反函数和隐函数的导数 | 31 |
| 一、反函数的导数 | 31 |

| | |
|-----------------------|----|
| 二、隐函数的导数 | 32 |
| 三、对数求导法 | 33 |
| 四、初等函数的导数公式和运算法则 | 34 |
| 第六节 高阶导数 | 35 |
| 第七节 拉格朗日中值定理 | 36 |
| 第八节 罗必塔(L'Hospital)法则 | 38 |
| 第九节 函数的递增性和递减性 | 41 |
| 第十节 函数的极值、最大值和最小值 | 43 |
| 一、函数的极值 | 43 |
| 二、函数的最大值和最小值 | 46 |
| 第十一节 函数的作图 | 47 |
| 一、曲线的凹凸和拐点 | 47 |
| 二、曲线的渐近线 | 49 |
| 三、函数的作图 | 50 |
| 第十二节 微分的概念与公式 | 53 |
| 一、微分概念的引进 | 53 |
| 二、微分的定义 | 54 |
| 三、微分与导数的关系 | 55 |
| 四、微分的几何意义 | 55 |
| 五、微分的求法 | 56 |
| 六、微分形式不变性 | 57 |
| 第十三节 微分的应用 | 58 |
| 一、近似计算 | 58 |
| 二、误差估计 | 59 |
| 习题二 | 60 |
| 第三章 不定积分 | 64 |
| 第一节 不定积分的概念 | 64 |
| 第二节 不定积分的性质和基本公式 | 65 |
| 一、不定积分的性质 | 65 |
| 二、不定积分的基本公式 | 66 |
| 第三节 3种积分法 | 68 |
| 一、直接积分法 | 68 |
| 二、换元积分法 | 69 |
| 三、分部积分法 | 76 |
| 习题三 | 79 |
| 第四章 定积分 | 81 |
| 第一节 定积分的概念 | 81 |
| 一、曲边梯形的面积 | 81 |

| | |
|--------------------------|------------|
| 二、非匀速直线运动的路程 | 82 |
| 三、定积分的概念 | 82 |
| 第二节 定积分的性质 | 84 |
| 第三节 牛顿-莱布尼兹公式 | 85 |
| 一、定积分的换元积分法 | 87 |
| 二、定积分的分部积分法 | 89 |
| 第四节 定积分的应用 | 90 |
| 一、平面图形的面积 | 90 |
| 二、平行截面面积为已知的立体的体积 | 91 |
| 三、旋转体的体积 | 92 |
| 四、连续函数在已知区间上的平均值 | 93 |
| 五、变力所做的功 | 94 |
| 六、转动惯量 | 95 |
| 七、医学上的应用 | 95 |
| 第五节 定积分的近似计算 | 97 |
| 一、矩形法 | 97 |
| 二、梯形法 | 98 |
| 三、抛物线法 | 98 |
| 第六节 广义积分 | 100 |
| 一、积分区间为无限的广义积分 | 100 |
| 二、被积函数有无穷间断点的广义积分 | 102 |
| 习题四 | 103 |
| 第五章 微分方程基础 | 105 |
| 第一节 微分方程的一般概念 | 105 |
| 一、微分方程的阶 | 106 |
| 二、微分方程的解 | 106 |
| 第二节 一阶微分方程 | 107 |
| 一、可分离变量的微分方程 | 107 |
| 二、一阶线性微分方程 | 110 |
| 第三节 可降阶的高阶微分方程 | 112 |
| 一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程 | 112 |
| 二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 | 113 |
| 三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 | 113 |
| 第四节 二阶常系数线性齐次微分方程 | 114 |
| 第五节 微分方程在医学上的应用 | 120 |
| 一、细菌的繁殖 | 121 |
| 二、药物动力学模型 | 122 |
| 三、流行病数学模型 | 123 |

| | |
|----------------------|------------|
| 习题五 | 124 |
| 第六章 多元函数微积分基础 | 127 |
| 第一节 一般概念 | 127 |
| 一、空间直角坐标系 | 127 |
| 二、多元函数概念 | 129 |
| 第二节 二元函数的极限及连续性 | 130 |
| 一、二元函数的极限 | 130 |
| 二、二元函数的连续性 | 131 |
| 第三节 偏导数 | 132 |
| 一、偏导数的概念 | 132 |
| 二、偏导数的几何意义 | 133 |
| 三、二阶偏导数 | 134 |
| 第四节 全微分 | 135 |
| 一、全微分 | 135 |
| 二、全微分在近似计算中的应用 | 136 |
| 第五节 复合函数的偏导数 | 137 |
| 一、一般类型 | 137 |
| 二、全导数 | 138 |
| 三、全微分形式不变性 | 138 |
| 第六节 二元函数的极值 | 138 |
| 一、极值与极值点 | 139 |
| 二、极值的必要条件 | 140 |
| 三、极值的充分条件 | 141 |
| 四、最大值与最小值 | 143 |
| 五、最小二乘法 | 143 |
| 六、相关系数 | 148 |
| 第七节 二重积分的概念和性质 | 149 |
| 一、二重积分的概念 | 149 |
| 二、二重积分的基本性质 | 151 |
| 第八节 二重积分的计算 | 151 |
| 一、利用直角坐标计算二重积分 | 151 |
| 二、利用极坐标计算二重积分 | 156 |
| 习题六 | 159 |
| 第七章 概率论基础 | 163 |
| 第一节 随机事件及其运算 | 163 |
| 一、随机试验与随机事件 | 163 |
| 二、事件间的关系和运算 | 163 |
| 第二节 概率的定义 | 165 |

| | |
|------------------------|------------|
| 一、概率的统计定义 | 165 |
| 二、概率的古典定义 | 167 |
| 第三节 概率的加法和乘法公式 | 168 |
| 一、概率的加法公式 | 168 |
| 二、条件概率 | 169 |
| 三、概率的乘法公式 | 170 |
| 四、独立事件及其概率乘法公式 | 171 |
| 第四节 全概率公式和贝叶斯公式 | 173 |
| 一、全概率公式 | 173 |
| 二、逆概率公式 | 174 |
| 第五节 贝努里概型 | 177 |
| 第六节 离散型随机变量及其分布 | 178 |
| 一、随机变量的概念 | 178 |
| 二、离散型随机变量与分布列 | 179 |
| 三、两点分布 | 180 |
| 四、二项分布 | 180 |
| 五、泊松分布 | 181 |
| 六、离散型随机变量的概率分布函数 | 182 |
| 第七节 连续型随机变量及其分布 | 182 |
| 一、概率密度函数 | 182 |
| 二、概率分布函数 | 183 |
| 三、均匀分布 | 184 |
| 四、指数分布 | 185 |
| 第八节 正态分布 | 186 |
| 一、正态分布的概念 | 186 |
| 二、正态曲线 | 187 |
| 三、正态分布的分布函数 | 187 |
| 四、标准正态分布 | 188 |
| 五、非标准正态分布概率的计算 | 189 |
| 第九节 随机变量的数字特征 | 191 |
| 一、数学期望 | 191 |
| 二、方差 | 194 |
| 习题七 | 197 |
| 第八章 统计学初步 | 202 |
| 第一节 总体和样本 | 202 |
| 一、总体和个体 | 202 |
| 二、样本 | 202 |
| 第二节 样本的数字特征 | 203 |

| | |
|------------------------|-----|
| 一、样本均数、中位数、众数 | 203 |
| 二、样本方差、标准差、极差 | 203 |
| 三、变异系数 | 204 |
| 四、统计量及其分布 | 204 |
| 第三节 参数估计 | 206 |
| 一、点估计 | 207 |
| 二、区间估计 | 208 |
| 第四节 假设检验 | 211 |
| 一、假设检验的基本思想与检验步骤 | 211 |
| 二、 U 检验 | 212 |
| 三、 t 检验 | 213 |
| 四、单侧检验与双侧检验 | 214 |
| 习题八 | 216 |
| 附录 | 218 |
| 习题答案 | 221 |
| 习题一 | 221 |
| 习题二 | 222 |
| 习题三 | 224 |
| 习题四 | 226 |
| 习题五 | 227 |
| 习题六 | 228 |
| 习题七 | 230 |
| 习题八 | 232 |

第一章 函数和极限

在现代科学技术的各个领域,函数是被广泛应用的数学概念之一。初等数学研究的对象主要是常量,高等数学研究的对象则是变量。函数关系是变量之间的依赖关系,极限方法是研究变量的一种基本方法。本章着重介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的主要性质。

第一节 函数的概念

一、函数的概念

1. 常量与变量

在研究实际问题时,会经常遇到各种不同的量,如长度、面积、温度、时间、体重等。其中有的量在变化过程中保持同一数值,称为常量;有的量在变化过程中能取不同的数值,称为变量。例如,在热胀冷缩过程中,一圆盘的半径 R 和周长 C 都是变量,但周长与半径的比 $C/R=2\pi$ 不变,是常量。

常量和变量是对一确定过程而言的。同一个量,在某一条件下可以认为是常量,而在另一条件下就可能是变量。例如,人的身高,在一个短暂的时间里是常量,但在较长的时间中就是变量。

常量也可以看做一特殊的变量,即在某一过程中,该变量都取相同的数值。

2. 函数的概念

定义 在某一变化过程中有 2 个变量 x 和 y ,如果对于变量 x 的每个允许取的值,变量 y 按照一定的规律都有惟一确定的值与之对应,则变量 y 称为变量 x 的函数。变量 x 称为自变量, y 称为因变量,记作

$$y=f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的定义域。如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义,与 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$ 。所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域。

函数的定义域常用区间来表示。设 a, b 是 2 个实数,而且 $a < b$ 。把满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间,表示为 $[a, b]$;把满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间,表示为 (a, b) ;把满足 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合都叫做半开半闭区间,分别表示为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$,其中实数 a 与 b 叫做相应区间的端点。

同理,把满足 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$ 。

此外,邻域是常用的一种区间概念。设 x_0 是某一定点, δ 是大于 0 的某实数,开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,点 x_0 称为邻域中心, δ 称为邻域半径。

例 1 婴儿的体重在 0 ~ 6 个月的时间内可由如下经验公式确定:

$$y = 3 + 0.6x$$

式中, x 表示婴儿的年龄(月), 是自变量; y 表示其体重(kg), 是函数, 函数的定义域为 $[0, 6]$ 。

例 2 气象台用温度自动记录仪记录了当地一段时间内温度 T 的变化曲线, 如图 1-1 所示。13 ~ 23 时的任意时刻 t 都对应着一个 $T, T = T(t)$ 。

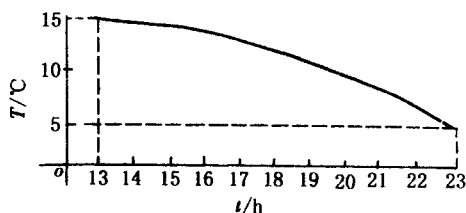


图 1-1 温度 T 随时间 t 的变化曲线

其中, t 是自变量, T 是函数。

$y = C$ 或 $f(x) = C$ (C 是常数), 也是变量 x 的函数。因为, 当变量 x 给出任何一确定值时, y 的值都是 C (图 1-2)。

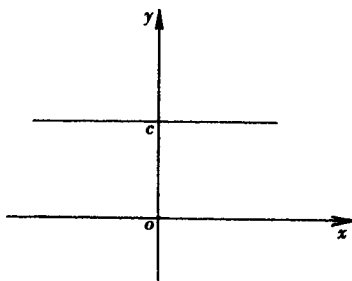


图 1-2 函数 $f(x) = C$ 的变化曲线

当所研究的函数 $y = f(x)$ 用一个式子表示时, 如果不加说明, 函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的全体。

二、分段函数

例 3 某药物的常用量 y , 对 16 岁及 16 岁以上的成年人是一定的, 设为 a ; 对于 16 岁以下的未成年人, 则正比于年龄 x , 设比例常数为 k , 则有函数关系 (图 1-3) 为

$$y = \begin{cases} kx, & \text{当 } 0 < x < 16 \\ a, & \text{当 } x \geq 16 \end{cases}$$

式中, 药物量 y 是年龄 x 的函数, 但其函数关系是用 2 个解析式表示的。像这种在定义域

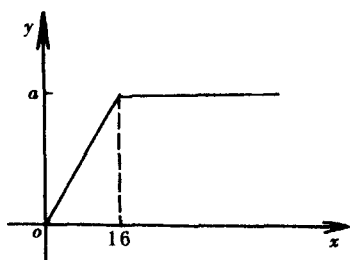


图 1-3 药物用量 y 与年龄的函数关系曲线

内的不同部分用不同的解析式表示的函数称为分段函数。

分段函数是 1 个函数,而不是 2 个或几个函数。应注意,求分段函数的函数值时,不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算。

例 4 示波器上显示的三角波(图 1-4),其电压 V 与时间 t 的函数关系为

$$V = \begin{cases} 2t, & \text{当 } 0 \leq t \leq 1 \\ 4 - 2t, & \text{当 } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

求在时间 $t = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{2}$ 时电压 V 的值。

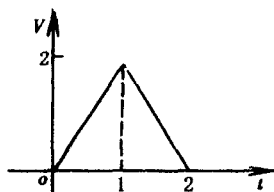


图 1-4 电压 V 与时间 t 的函数关系曲线

解 将自变量的值代入相应范围内的函数表示式中,得

$$V_{t=\frac{1}{2}} = 2t \Big|_{t=\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$V_{t=\frac{3}{2}} = (4 - 2t) \Big|_{t=\frac{3}{2}} = 4 - 2 \times \frac{3}{2} = 1$$

三、复合函数

定义 设变量 y 是变量 u 的函数,变量 u 又是变量 x 的函数,即

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

如果变量 x 的某些值通过中间变量 u 可以确定变量 y 的值时,则称 y 是 x 的复合函数,记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

例 5 试通过 $y = 1 + u^2, u = \sin x$, 求出 y 关于 x 的复合函数。

解 由 $y = 1 + u^2, u = \sin x$ 确定的复合函数是 $y = 1 + \sin^2 x$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

例 6 试通过 $y = \ln u, u = \arctg x$, 求出 y 关于 x 的复合函数。

解 $y = \ln u, u = \arctg x$ 的复合函数是 $y = \ln \arctg x$, 其定义域为 $(0, +\infty)$ 。

如果由 2 个函数复合成的函数的定义域为空集时,则此复合函数无意义(或称它们不能复合)。例如,由 $y = \arcsin u, u = 2 + x^2$ 复合成的函数 $y = \arcsin(2 + x^2)$, 因 $2 + x^2 > 1$, 其定义域为空集,即函数 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 无意义。

同理,可以将复合函数的概念推广到有限个函数构成的复合函数。例如,3 个函数

$$y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = 2x + 3$$

构成的复合函数是

$$y = \sqrt{\ln(2x+3)}, x \in [-1, +\infty)$$

在一些计算问题中,要把复合函数的中间变量找出来,把它“分解”为若干个简单函数,使计算简化。

例7 将下列复合函数“分解”为简单函数:

(1) $y = a \sin(bx + c)$

(2) $y = a^{\sin(3x^2-1)}$

(3) $y = \operatorname{tg} \sqrt{\lg \arcsin x}$

解 (1) $y = a \sin(bx + c)$ 可以看成是由 $y = a \sin u$ 和 $u = bx + c$ 复合而成。

(2) $y = a^{\sin(3x^2-1)}$ 可以看成是由 $y = a^u, u = \sin v$ 和 $v = 3x^2 - 1$ 复合而成。

(3) $y = \operatorname{tg} \sqrt{\lg \arcsin x}$ 可以看成是由 $y = \operatorname{tg} u, u = \sqrt{v}, v = \lg t$ 和 $t = \arcsin x$ 复合而成。

四、初等函数

1. 基本初等函数

在中学里已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这些函数统称为基本初等函数。为复习和应用的方便,将其归纳成表 1-1。

表 1-1 基本初等函数表

| 类别及解析式 | 定义域 | 值域 | 图形 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 幂函数 $y = x^\mu$ $\mu > 0$ μ 次抛物线 $\mu < 0$ 令 $\mu = -m (m > 0)$ $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, m 次双曲线 | 因 μ 而异,但 $[0, +\infty)$ 是公 共定义域 公共定义域为 $(0, +\infty)$ | 因 μ 而异,但 $[0, +\infty)$ 是公 共值域 公共值域为 $(0,$ $+\infty)$ | |
| 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ | $(-\infty, +\infty)$ | $(0, +\infty)$ | |
| 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ | $(0, +\infty)$ | $(-\infty, +\infty)$ | |

续表

| 类别及解析式 | 定义域 | 值域 | 图形 |
|--------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|----|
| 三角函数 | | | |
| $y = \sin x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $[-1, +1]$ | |
| $y = \cos x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $[-1, 1]$ | |
| $y = \operatorname{tg} x$ | $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ | $(-\infty, +\infty)$ | |
| $y = \operatorname{ctg} x$ | $x \neq n\pi$ $(n=0, \pm 1, \dots)$ | $(-\infty, +\infty)$ | |
| 反三角函数 | | | |
| $y = \arcsin x$ | $[-1, 1]$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | |
| $y = \arccos x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ | |
| $y = \operatorname{arctg} x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | |
| $y = \operatorname{arctctg} x$ | $(-\infty, +\infty)$ | $(0, \pi)$ | |

2. 初等函数

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合所得到的函数，统称为初等函数。

例如， $y = \ln \cos^2 x$, $y = \frac{1+a^2x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \arcsin x + \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ 等都是初等函数。分段函数一般不是初等函数。本教材所讨论的函数主要是初等函数。

第二节 极限的概念

极限思想、极限方法的产生，是对那些用初等数学方法不能解决的问题（如切线问题、面积、体积问题等）进行长期探索的结果，由此形成的极限概念奠定了微积分学的理论基础。在自然科学中有许多重要的量，要用极限方法才能作出精确的定义和计算。本节在简要复习数列极限的基础上，引入函数极限的概念，着重介绍无穷小量和几种常用求极限的方法。