高等医学院校本科教材

MEDICAL

HIGHER MATHEMATICS

医用高等数学

主编 黄大同

郑州大学出版社

高 等 医 学 院 校 本 科 教 材

医用高等数学

Medical Higher Mathematics

主　编　黄大同

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/黄大同主编．—郑州:郑州大学出版社,2002.9
ISBN 7-81048-670-5

Ⅰ.医…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.医用数学—医学院校—教材　Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 068684 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:谷振清　　发行部电话:0371-6966070
全国新华书店经销
郑州文华印刷厂印制
开本:787 mm×1 092 mm　　1/16
印张:15.25
字数:352 千字
版次:2002 年 9 月第 1 版　　印次:2002 年 9 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81048-670-5/R·538　　定价:28.00 元

《医用高等数学》作者名单

主　编　黄大同

副主编　李锁柱

编　委　黄大同　李锁柱　孙千仞

　　　　梅秉强　陈铁生

内容提要

本书根据卫生部1981年修订的《五年制医学院校教学计划》要求，结合21世纪初的教学实际需要编纂而成。全书包括函数和极限、导数与微分、不定积分、定积分、微分方程基础、多元函数积分基础、概率论基础、统计初步等内容。在保持学科系统性的基础上，力求教学内容具有基础性、医用性、时代性和少而精的特点，着重讲述基本概念、基本原理和基本方法。本书可作为高等医学院校教材及综合大学、师范学院生物学专业的高等数学教材，也可供医学工作者参考。

前　言

本书是根据21世纪初教学改革的新形势及现代医学对高等数学的需求，参考国内外的有关教材，结合近几年各作者院校的教学改革经验而编写的。

高等数学是各门自然科学的基础，数学原理、方法与计算机技术的应用，有力地促进了生命科学的研究和现代医学的发展。自1982年以来，医用高等数学一直是我国高等医学院校的一门公共基础课，它的任务是：①培养学生的抽象思维和数值运算能力，更好地处理今后在实践中出现的数学问题；②授予学生比较系统的数学基础知识，为学习后继课程（包括医学课程）打下必要的基础；③使学生了解数学在医学上的应用以及由此产生的一些边缘学科，拓展其知识面。总的来说，我们编写教材的指导思想是紧紧围绕新世纪人材培养目标，着重培养学生的逻辑推理和定量分析能力，提高医学生的综合素质。

在本书编写过程中，我们注意突出基本理论、基础知识和基本技能，在保证学科系统性的前提下，结合医学院校的教学实际，尽量更新教学内容，配合教学方法的改进，使教材具有思想性、科学性、先进性、启发性和适用性。根据近几年各院校普遍缩减理论课学时的情况，编者注意精简内容、控制难度，通过适量典型实例进行深入浅出的讲解，做到“教师易教，学生易学”，力求突出教学重点并且密切结合医学应用。

本教材包括函数和极限、导数与微分、不定积分、定积分、微分方程、多元函数、微积分、概率论基础和统计学初步共8章，书末附有数学用表和习题参考答案。内容编排基本上参照50～70学时教学计划，对于40学时左右的数学课程，建议选择第一章至第五章节（从函数与极限到微分方程）讲授。本书可供五年制高等医学院校的临床医学、医学检验、医学影像、预防医学、护理、口腔和法医等专业学生使用，同时也可供医学工作者参考。

参加本书编写的教师有广州医学院黄大同（主编）、梅秉强，郑州大学医学院李锁柱（副主编）、孙千仞、陈铁生。本书的编写得到广州医学院和郑州大学医学院等单位的领导和有关部门的支持，特此表示衷心的感谢。

黄大同

2002年8月

目 录

第一章　函数和极限

在现代科学技术的各个领域中，函数是被广泛应用的数学概念之一。初等数学研究的对象主要是常量，高等数学研究的对象则是变量。函数关系是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章着重介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的主要性质。

第一节　函数的概念

一、函数的概念

1. 常量与变量

在研究实际问题时，会经常遇到各种不同的量，如长度、面积、温度、时间、体重等。其中有的量在变化过程中保持同一数值，称为常量；有的量在变化过程中能取不同的数值，称为变量。例如，在热胀冷缩过程中，一圆盘的半径 R 和周长 C 都是变量，但周长与半径的比 $C/R=2\pi$ 不变，是常量。

常量和变量是对一确定过程而言的。同一个量，在某一条件下可以认为是常量，而在另一条件下就可能是变量。例如，人的身高，在一个短暂的时间里是常量，但在较长的时间中就是变量。

常量也可以看做一特殊的变量，即在某一过程中，该变量都取相同的数值。

2. 函数的概念

定义　在某一变化过程中有 2 个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的每个允许取的值，变量 y 按照一定的规律都有惟一确定的值与之对应，则变量 y 称为变量 x 的函数。变量 x 称为自变量，y 称为因变量，记作

$$y=f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的定义域。如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，与 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$。所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域。

函数的定义域常用区间来表示。设 a、b 是 2 个实数，而且 $a<b$。把满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为 $[a,b]$；把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为 (a,b)；把满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合都叫做半开半闭区间，分别表示为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$，其中实数 a 与 b 叫做相应区间的端点。

同理，把满足 $x\geqslant a,x>a,x\leqslant b,x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$。

此外,邻域是常用的一种区间概念。设 x_0 是某一定点,δ 是大于 0 的某实数,开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,点 x_0 称为邻域中心,δ 称为邻域半径。

例 1 婴儿的体重在 0 ~6 个月的时间内可由如下经验公式确定:

$$y=3+0.6x$$

式中,x 表示婴儿的年龄(月),是自变量;y 表示其体重(kg),是函数,函数的定义域为 $[0,6]$。

例 2 气象台用温度自动记录仪记录了当地一段时间内温度 T 的变化曲线,如图 1-1 所示。13 ~23 时内的任意时刻 t 都对应着一个 T,$T=T(t)$。

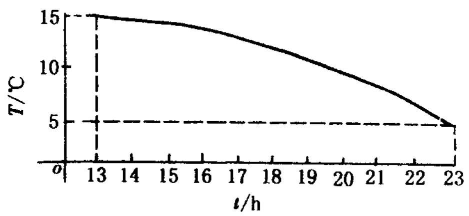


图 1-1 温度 T 随时间 t 的变化曲线

其中,t 是自变量,T 是函数。

$y=C$ 或 $f(x)=C$(C 是常数),也是变量 x 的函数。因为,当变量 x 给出任何一确定值时,y 的值都是 C(图 1-2)。

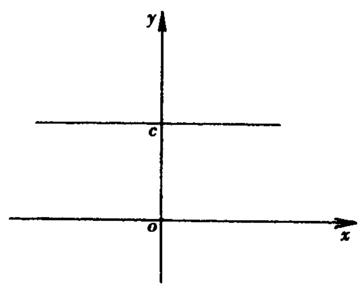


图 1-2 函数 $f(x)=C$ 的变化曲线

当所研究的函数 $y=f(x)$ 用一个式子表示时,如果不加说明,函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的全体。

二、分 段 函 数

例 3 某药物的常用量 y,对 16 岁及 16 岁以上的成年人是一定的,设为 a;对于 16 岁以下的未成年人,则正比于年龄 x,设比例常数为 k,则有函数关系(图 1-3)为

$$y=\begin{cases}kx, & \text{当 } 0<x<16\\ a, & \text{当 } x\geqslant 16\end{cases}$$

式中,药物量 y 是年龄 x 的函数,但其函数关系是用 2 个解析式表示的。像这种在定义域

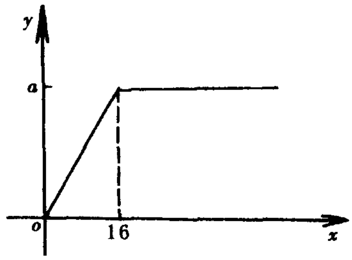


图 1-3 药物用量 y 与年龄的函数关系曲线

内的不同部分用不同的解析式表示的函数称为分段函数。

分段函数是 1 个函数，而不是 2 个或几个函数。应注意，求分段函数的函数值时，不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算。

例 4 示波器上显示的三角波(图 1-4)，其电压 V 与时间 t 的函数关系为

$$V=\begin{cases}2t, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 1\\ 4-2t, & \text{当 } 1<t\leqslant 2\end{cases}$$

求在时间 $t=\frac{1}{2}, t=\frac{3}{2}$ 时电压 V 的值。

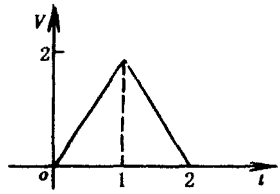


图 1-4 电压 V 与时间 t 的函数关系曲线

解 将自变量的值代入相应范围内的函数表示式中，得

$$V_{t=\frac{1}{2}}=2t\big|_{t=\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$V_{t=\frac{3}{2}}=(4-2t)\big|_{t=\frac{3}{2}}=4-2\times\frac{3}{2}=1$$

三、复 合 函 数

定义 设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即

$$y=f(u), u=\varphi(x)$$

如果变量 x 的某些值通过中间变量 u 可以确定变量 y 的值时，则称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

例 5 试通过 $y=1+u^2, u=\sin x$，求出 y 关于 x 的复合函数。

解 由 $y=1+u^2, u=\sin x$ 确定的复合函数是 $y=1+\sin^2 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

例 6 试通过 $y=\ln u, u=\operatorname{arctg} x$，求出 y 关于 x 的复合函数。

解 $y=\ln u, u=\operatorname{arctg} x$ 的复合函数是 $y=\ln \operatorname{arctg} x$，其定义域为 $(0,+\infty)$。

如果由 2 个函数复合成的函数的定义域为空集时，则此复合函数无意义(或称它们不能复合)。例如，由 $y=\arcsin u, u=2+x^2$ 复合成的函数 $y=\arcsin(2+x^2)$，因 $2+x^2>1$，其定义域为空集，即函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 无意义。

同理，可以将复合函数的概念推广到有限个函数构成的复合函数。例如，3 个函数

$$y=\sqrt{u}, u=\ln v, \quad v=2x+3$$

构成的复合函数是

$$y=\sqrt{\ln(2x+3)}, \quad x\in[-1,+\infty)$$

在一些计算问题中,要把复合函数的中间变量找出来,把它“分解”为若干个简单函数,使计算简化。

例 7 将下列复合函数“分解”为简单函数:

(1) $y=a\sin(bx+c)$

(2) $y=a^{\sin(3x^2-1)}$

(3) $y=\mathrm{tg}\sqrt{\lg\arcsin x}$

解 (1) $y=a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y=a\sin u$ 和 $u=bx+c$ 复合而成。

(2) $y=a^{\sin(3x^2-1)}$ 可以看成是由 $y=a^u$, $u=\sin v$ 和 $v=3x^2-1$ 复合而成。

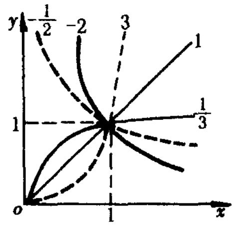
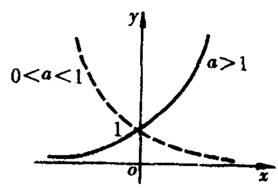
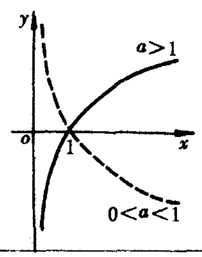
(3) $y=\mathrm{tg}\sqrt{\lg\arcsin x}$ 可以看成是由 $y=\mathrm{tg}\,u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg t$ 和 $t=\arcsin x$ 复合而成。

四、初 等 函 数

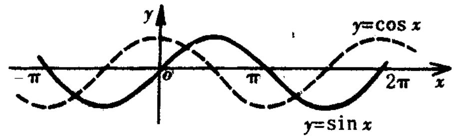
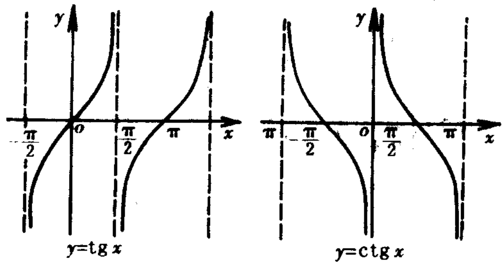
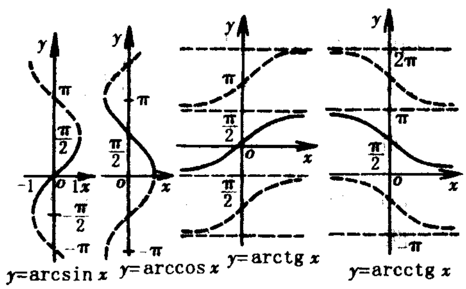
1. 基本初等函数

在中学里已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这些函数统称为基本初等函数。为复习和应用的方便,将其归纳成表 1-1。

表 1-1 基本初等函数表

类别及解析式	定义域	值 域	图 形
幂函数 $y=x^\mu$ $\mu>0$ μ 次抛物线 $\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$, m 次双曲线	因 μ 而异,但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域 公共定义域为 $(0,+\infty)$	因 μ 而异,但 $[0,+\infty)$ 是公共值域 公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	

续表

类别及解析式	定义域	值域	图形
三角函数			
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,+1]$	
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
$y=\mathrm{tg}\,x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	
$y=\mathrm{ctg}\,x$	$x\neq n\pi$	$(-\infty,+\infty)$	
	$(n=0,\pm1,\cdots)$		
反三角函数			
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
$y=\mathrm{arctg}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	
$y=\mathrm{arctg}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	

2. 初等函数

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合所得到的函数，统称为初等函数。

例如，$y=\ln\cos^2 x$，$y=\dfrac{1+a^2x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=\arcsin x+\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}$等都是初等函数。分段函数一般不是初等函数。本教材所讨论的函数主要是初等函数。

第二节 极限的概念

极限思想、极限方法的产生，是对那些用初等数学方法不能解决的问题(如切线问题，面积、体积问题等)进行长期探索的结果，由此形成的极限概念奠定了微积分学的理论基础。在自然科学中有许多重要的量，要用极限方法才能作出精确的定义和计算。本节在简要复习数列极限的基础上，引入函数极限的概念，着重介绍无穷小量和几种常用求极限的方法。