高等学校教材

工　程　数　学

线性代数

叶介英　侯乃戊
乌力吉　斯日古楞　庞晶　编

内蒙古教育出版社

高等学校教材

工程数学

线性代数

叶介英 侯乃戍
乌力吉 斯日古楞 庞 晶 编

内蒙古教育出版社

线性代数

组织编写/内蒙古工业大学数学系
责任编辑/其其格
出版发行/内蒙古教育出版社
(呼和浩特市新华东街维力斯大厦9层)
印　　刷/内蒙古民族印刷厂
开　　本/850×1168 毫米　1/32
印　　张/10.75
字　　数/278 千
版　　次/1997 年 8 月第 1 版
印　　次/2006 年 8 月第 4 次印刷
印　　数/1—5600 册
书　　号/ISBN7-5311-3075-0/G·2721
定　　价/15.80 元

内 容 简 介

本书内容包括矩阵的概念与运算、行列式与矩阵求逆、向量组的线性相关性与矩阵的秩、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等七章，可供选学的线性空间与线性变换安排为一个附录。每章都配有适量的习题，并以历年全国工学、经济学硕士研究生入学考试的线性代数试题为主选编了全书的总复习题，分别提供了答案或提示。

本书内容的选取与安排符合原国家教委批准印发的《线性代数课程教学基本要求》，可作为高等工科院校本科、专科的教学用书，也可作为工程技术人员进修的自学教材，还可作为报考工学、经济学硕士研究生的复习资料。

前　　言

线性代数是高等工科院校本科、专科各专业学生必修的基础理论课程，它讨论代数学中线性关系的经典理论，具有较强的逻辑性、抽象性与广泛的实用性。由于线性问题广泛地存在于科学技术的各个领域，许多非线性问题也可以在一定条件下转化为线性问题来研究，尤其在电子计算机日益普及的今天，许多工程技术问题的解决都要用到线性代数的理论与方法，因此本课程的作用与地位越来越显得重要。

在线性代数课程的教学方面，我校采用过同济大学等院校编写的多种教材，80 年代也使用过本教研室夏家瑛等同志编写的《线性代数》教材与教学参考资料。在长期的教学实践中，积累了一定的经验与体会。

本书是按照国家教委批准印发的《线性代数课程教学基本要求》，结合我校的具体情况，组织部分教师集体编写的。经过长期酝酿，反复研究，并多次征求意见，确定本书的主要编写原则是：1. 在内容的选取方面，努力贯彻本课程的教学基本要求，第一至七章是必学的基本内容（个别超出基本要求的内容打上星号标出），附录以较高的观点概括地介绍线性空间与线性变换的一般理论，作为选学的内容；2. 在体系的安排方面，以矩阵为主线安排教学内容，即以矩阵的概念与运算、矩阵的逆矩阵、矩阵的秩、矩阵的特征值与特征向量、矩阵的相似对角化、对称矩阵的正定性等内容为主要线索，讲述方阵的行列式、矩阵的行（列）向量组的线性相关性、n 维向量空间、用矩阵方法研究并求解线性方程组、用对称矩阵研究二次型；3. 在理论联系实际方面，力求指出所学内容在某

些方面的应用;4. 在适用范围方面,力求不仅适用于工科院校本科、专科各专业的教学需要,而且为准备报考工学、经济学硕士研究生的读者提供既有较高要求又比较实用的复习资料;5. 在内容的表述和推理论证方面,力求语言通俗,文字流畅,详略得当,使各民族的学生都易读易懂。

本书由五位同志集体讨论,分工撰稿。第一章由叶介英撰稿,第二章、第七章由斯日古楞撰稿,第三章和附录由乌力吉撰稿,第四章、第五章由庞晶撰稿,第六章和总复习题由侯乃成撰稿。全书由叶介英拟定编写纲目,统一修改、定稿。

由于编者的水平不高,经验不足,书中的缺点、错误肯定不少,敬请使用本书的老师和读者批评指正。

内蒙古工业大学数学系

1997 年 3 月

记 号 说 明

$a,b,c,\cdots,\lambda,\mu,\cdots$	数
$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$	矩阵
$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$	向量
$\boldsymbol{R}$	实数集
$\boldsymbol{C}$	复数集
$\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{e}$	单位矩阵或单位向量
$\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{o}$	零矩阵或零向量
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵
$\boldsymbol{A}^{*}$	$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$R(\boldsymbol{A})=r$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$t_r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
λ_i	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	对角矩阵
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)$	分块对角矩阵
$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}>0$ 或 $\boldsymbol{A}<0$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定或负定
$[a_{ij}]_{m\times n}$	a_{ij} 为元素的 $m\times n$ 型矩阵
$D=\lvert\boldsymbol{A}\rvert=\det(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\Delta}(a_{ij})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\boldsymbol{R}^n$	$\boldsymbol{n}$ 维向量空间
$\boldsymbol{V}$	线性空间

$\dim(\boldsymbol{V})$	线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\|\boldsymbol{\alpha}\|$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度
$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 正交

目　　录

附　录　线性空间与线性变换

第一章　矩阵的概念与运算

矩阵在线性代数中既是主要的研究对象又是重要的研究工具.本书以矩阵的运算、矩阵的逆矩阵、矩阵的秩、矩阵的特征值与特征向量、矩阵的相似对角化、对称矩阵的正定性等内容为主线，介绍行列式、向量组、向量空间、线性方程组、二次型等基本内容，并在最后的附录中介绍比较抽象的线性空间与线性变换，进一步探讨了本课程内容的内在联系.矩阵的理论与方法在自然科学、工程技术、经济管理等许多领域中有着广泛的应用.

§1—1　矩阵的基本概念

一、什么是矩阵

1.引例

在自然科学、工程技术、管理科学、甚至日常生活中，人们需要处理各种各样的数据，这些数据在许多情况下是排列成长方形数表的形式出现的.

例1　平面上两条直线

$$a_1x+b_1y=c_1,$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

是否相交？相交时有多少个交点？交点的坐标如何表示？这是一个几何问题.换成一个代数问题，二元一次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}\tag{1}$$

是否有解?有解时它的解有多少?这个方程组的解应该怎样表示?

这个问题的答案完全决定于方程组(1)中的系数 a_1、b_1、a_2、b_2 以及右端的常数 c_1、c_2，也就是完全决定于一张两行三列的矩形数表：

$$\begin{matrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{matrix}$$

例 2 某工厂的三个车间 A_1、A_2、A_3，对于五种主要原材料 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 的月平均需要量(吨)，记录于下表：

材料品种 / 车间	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}

略去这张表的具体意义，就是一张三行五列的矩形数表：

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\end{matrix}$$

例 3 京包线上的四个大站，北京、大同、呼和浩特、包头之间的铁路里程(公里)可以列表于下：

	北　京	大　同	呼和浩特	包　头
北　　京	0	382	667	832
大　　同	382	0	285	450
呼和浩特	667	285	0	165
包　　头	832	450	165	0

略去此表的具体意义，就是一张四行四列的正方形数表：

0	382	667	832
382	0	285	450
667	285	0	165
832	450	165	0

类似的矩形数表在许多问题中大量地存在着，经过科学的抽象就形成一个重要的数学概念——矩阵.

2. 矩阵的概念

定义 1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1.\ 2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

称为一个 $m\times n$ 型矩阵，或 $m\times n$ 矩阵. 记作

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=[a_{ij}],$$

也可简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

矩阵的记号是在数表的两旁加一对方括号，或一对圆括号.

组成矩阵 **A** 的 $m\times n$ 个数，称为矩阵 **A** 的元素，a_{ij} 表示矩阵中第 i 行第 j 列的元素.

元素为实数的矩阵称为实矩阵；元素为复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵，除有特别说明者外，都是实矩阵.

按此定义，我们在前面的引例中所看到的三张矩形数表，依次为 2×3 型、3×5 型和 4×4 型的三个矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 382 & 667 & 832 \\ 382 & 0 & 285 & 450 \\ 667 & 285 & 0 & 165 \\ 832 & 450 & 165 & 0 \end{bmatrix}.$$

回顾我们以往学过的数学课程，基本上是以一个数或一个图形作为研究对象的．在高等数学课程的向量代数部分，开始把三个有序的数 x、y、z 构成的数组——向量 $\{x、y、z\}$，作为一个整体进行研究．现在我们进一步把 $m\times n$ 个数构成的矩形数表——矩阵，作为研究对象.随着工程科学与计算机技术的发展，矩阵已经成为不可缺少的数学工具.

定义 2　全部元素均为零的 $m\times n$ 型矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

称为 $m\times n$ 型的零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或简记为 $\boldsymbol{O}$.

定义 3　由矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 元素的相反的数构成的矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix} = [-a_{ij}]_{m\times n}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $-\boldsymbol{A}$.

定义 4　把矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的各行换成序号相同的列，同时把各列换成同序号的行，所得到的 $n\times m$ 型矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$，也可记作 $\boldsymbol{A}'$.

二、几种特殊矩阵

1. 行矩阵、列矩阵、单元素矩阵

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n] = \boldsymbol{A}_{1\times n}$$

是 $1\times n$ 型矩阵，称为行矩阵.

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_{m\times 1}$$

是 $m\times 1$ 型矩阵，称为列矩阵．为了书写上的简便，往往应用矩阵转置的记号，记作

$$\boldsymbol{A} = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_m]^T.$$

只有一行一列的 1×1 型矩阵，称为单元素矩阵，它是由一个数 a 构成的数表．当它出现于一个算式的计算结果时，可以记作

$$\boldsymbol{A} = [a]_{1\times 1} = a.$$

2. 方阵

行数与列数相等的 $n\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$，称为 n 阶矩阵，也称为 n 阶方阵.

在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 中，连结左上角元素 a_{11} 与右下角元素 a_{nn} 的线段，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线；连结右上角元素 a_{1n} 与左下角元素 a_{n1} 的线段，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的副对角线.

3. 三角矩阵

主对角线左下方或右上方的元素均为零的方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

分别称为上三角矩阵或下三角矩阵.

4. 对角矩阵

主对角线以外的元素均为零的方阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

称为对角矩阵，可以简记作

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

或

$$\mathrm{diag}[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$