TIANJINSHIPUTONGGAOXIAOGAOZHISHENGBENKE
ZHAOSHENGTONGYIKAOSHI

GAODENGSHUXUEZHENTIJIEXIYUMONISHIJUAN

天津市普通高校高职升本科
招生统一考试

高等数学真题解析与模拟试卷

末 萌　君 喆 主编

天津市教育招生考试院高职升本科统一考试配套教材

命题专家与阅卷老师按照新考试大纲要求倾力编写

历年真题与最新全真模拟试卷及精解

揭秘命题规律与思路，提高解题技巧与成绩

押题百分百，升本必备！

南开大学出版社

天津市普通高校高职升本科招生统一考试

高等数学真题解析与模拟试卷

朱萌　君喆　主编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据
高等数学真题解析与模拟试卷 / 未萌,君喆主编.
天津:南开大学出版社,2006.5
(天津市普通高校高职升本科招生统一考试)
ISBN 7-310-02529-6

Ⅰ.高...　Ⅱ.①未...②君...　Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—解题—升学参考资料　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 008659 号

南开大学出版社出版发行
出版人:肖占鹏
地址:天津市南开区卫津路 94 号　　邮政编码:300071
营销部电话:(022)23508339　23500755
营销部传真:(022)23508542　　邮购部电话:(022)23502200
*
天津市宝坻区第二印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
*
2006 年 5 月第 1 版　　2006 年 5 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　16 开本　9 印张　224 千字
定价:16.00 元
如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前 言

“天津市高等院校高职升本科招生统一考试”是我市普通高等学校招生考试的重要组成部分，是连接我市高职教育专科层次与本科层次教育的桥梁。

在以往几年成功招生考试的基础上，2006 年开始将按照新修订的考试大纲进行招生考试。为了使考生更好地掌握高等数学新考试大纲和命题精髓，提高应试技巧，从而全面提升考试成绩，我们编写了此书。

本书的编者多年从事“高职升本科”高等数学的辅导和命题研究，经验丰富，并且在本书编写过程中，周密分析新考纲的知识要求、试卷结构和以往命题规律，在此基础上精心编制了每份模拟试卷。考生若能在掌握基本知识的前提下，认真演练模拟试题，定能取得事半功倍的效果。

本书分两部分，第一部分是对 2003～2005 年“高职升本科”高等数学考试真题进行全面详细的解读，目的在于使考生了解命题的思路、解题的完整过程和应注意的问题、易犯的错误，从而提高考生备考的针对性与有效性。第二部分为模拟试卷与分析解答，编者根据新修订的考试大纲要求，真实再现各类题型、题量和试卷结构，按照考纲知识范围和程度要求，对考查知识点进行难易适当、布局合理的组配，同时对模拟试卷给出了翔实的解答。

由于时间仓促，本书难免有不足和疏漏之处，恳请读者指正。

编 者

2006 年 1 月

目 录

第一部分 真题精析

第二部分 模拟试卷及参考解答

附 录

第一部分

真题精析

2003年天津市高等院校高职升本科招生统一考试
高等数学试题精析

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

第一大题是选择题,本大题共10个小题,每小题4分,共40分.下面按照小题顺序进行具体的分析.

1. 下列极限中,正确的是(　　)

A. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$　　　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}e^t\mathrm{d}t}{x}=1$　　　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=1$

答案　D

分析　本题重点考查运用函数极限的概念、极限的不同求法及求极限的能力.

本题四个极限式子涉及极限的概念,极限存在的充要条件,两个重要极限,未定式的极限及积分上限函数的导数和等价无穷小代换等问题,每个题目没有繁复的计算,但涉及的概念较多,综合性较强.若上述问题掌握较好,则较易获得正确答案.

解法　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0,\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ 不存在,且不为$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$.

故A错.

由于当 $x\to 0$ 时,x 是无穷小量,$\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

故B错.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}e^t\mathrm{d}t}{x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 2}{1}=2$,

所以C错.

当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x$,

所以,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.

上式还可用罗必达法则来求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}=1.$$

故应选D.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3,\\ a\ , & x=3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处连续，则 $a=$（　　）

A. 0　　B. 3　　C. 6　　D. 9

答案　C

分析　本题主要考查运用函数在某点处连续的概念具体解决函数相关问题的能力.

函数在某点处连续，一般有几个等价定义，其一是利用函数增量 Δy 定义，其二是利用极限定义，其三是利用 $\varepsilon-\delta$ 语言定义，以及由此推出的“有定义，有极限，极限值等于函数值”三个条件，这些都是连续的充要条件，是解决函数连续性相关问题的依据之一. 本题是给出函数，特别是分段函数在分段处连续的条件下，来确定函数解析式中的未知参数，其方法是由连续的条件决定参数 a 的取值. 理论上讲，几个连续的等价定义都可使用，但对本题利用“极限值等于函数值”是比较适宜的，这也是本题要考查的. 同时，本题也考查了极限的运算技法.

解法 1　因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6, f(3)=a.$

又　$f(x)$ 在 $x=3$ 处连续，得

$$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3),$$

所以 $a=6$.

解法 2　$f(x)$ 在点 $x=3$ 处的增量 $\Delta y=\dfrac{x^2-9}{x-3}-a$，$f(x)$ 在 $x=3$ 处连续，故有 $\lim\limits_{x\to 3}\Delta y=0$，即

$$\lim_{x\to 3}\Delta y=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}-a\right)=\lim_{x\to 3}(x+3-a)=\lim_{x\to 3}(x+3)-\lim_{x\to 3}a=6-a=0,$$

因此　$a=6$.

此题由于分段函数表达式比较简单，解法 1、解法 2 的难易程度比较接近，但解法 1 是这类问题比较常用的方法.

3. 设 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$（　　）

A. $f'(x)$　　B. $-f'(x)$　　C. $2f'(x)$　　D. $-2f'(x)$

答案　D

分析　本题主要考查导数的概念，以及简单变化推理能力.

本题的解答要点是将给出的极限式子作适当变化，使其变成与导数定义式相关的表达式，再进一步分析. 另外，对于这类选择题或填空题（不需写出推导过程）还可以有简便的方法，是将分子中两函数自变量相减比分母，其比值即为导数前的系数. 这是因为

若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{c\Delta x}=\dfrac{a-b}{c}f'(x_0)$（其中，$a$、$b$、$c$ 为常数），由此可以看出 $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{(x_0+a\Delta x)-(x_0+b\Delta x)}{c\Delta x}$.

解法 1　

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-2\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-2\Delta x)-f(x)}{-2\Delta x}(-2)\xlongequal{令 h=-2\Delta x}-2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=-2f'(x).\end{aligned}$$

解法 2 应用以上分析中给出结论的方法即可得出. 但需注意在应用这个结论时,(1) 条件是 $f'(x_0)$ 存在,(2) 这个结论不是定理形式,不能直接利用,所以在非选择题或非填空题中不宜直接使用结论.

4. 设 $y = f(\cos x)$,其中 $f(u)$ 为可导函数,则 $\mathrm{d}y =$ ( )

A. $f'(\cos x)\mathrm{d}x$ B. $-\sin x f'(\cos x)\mathrm{d}x$

C. $\sin x f'(\cos x)\mathrm{d}x$ D. $[f(\cos)x]'\mathrm{d}\cos x$

答案 B

分析 本题主要考查微分的概念、微分形式不变性、导数符号的用法及基本计算技能.

本题实质上考查复合函数的微分,按照微分计算公式,可以对变量 x 求导数乘 $\mathrm{d}x$,或利用微分形式不变性对中间变量 u 求导数乘 $\mathrm{d}u$ 来求 $\mathrm{d}y$. 这里有个易混淆的导数符号问题需重视:要注意 $[f(\cos x)]' \neq f'(\cos x)$,前者表示对 x 的导数,后者 $f'(\cos x)$ 并不表示对 x 的导数.

解法 1 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(\cos x)(\cos x)' = -\sin x f'(\cos x)$,于是

$$\mathrm{d}y = -\sin x f'(\cos x)\mathrm{d}x.$$

解法 2 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u = f'(\cos x)\mathrm{d}\cos x = -\sin x f'(\cos x)\mathrm{d}x.$

5. 若参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1} =$ ( )

A. 4 B. $\dfrac{1}{4}$ C. 2 D. $\dfrac{1}{2}$

答案 D

分析 本题主要考查由参数方程所确定的函数在某一点处导数的求法及基本计算技能. 本题在解答时应先求出由参数方程所确定函数 $y = y(x)$ 的导函数,然后将参数值代人即可.

解法 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1+t^2},$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{1+t^2},\text{于是},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

6. 设 $f(x)$ 有连续导函数,则下列命题中正确的是( )

A. $\int f'(2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}f(2x) + C$ B. $\int f'(2x)\mathrm{d}x = f(2x) + C$

C. $\left(\int f(2x)\mathrm{d}x\right)' = 2f(2x)$ D. $\int f'(2x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

答案 A

分析 本题主要考查不定积分的概念及第一类换元积分法.

本题涉及函数的导数和不定积分,解这种问题要注意到原函数族(或不定积分)和导数(或微分)的关系. 本题 A、B、D 是不定积分的表达式,C 是导数式,前者可通过对右端求导来验证,或者从左端求不定积分来判断,C 主要是利用导数和不定积分关系进行判断.

解法 $\left[\dfrac{1}{2}f(2x) + C\right]' = f'(2x)$,$C$ 为任意常数,故 $\dfrac{1}{2}f(2x) + C$ 为 $f'(2x)$ 的原函数族,即不定积分,于是 A 是正确的. 或者这样解:$\int f'(2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}f(2x) + C.$

$[f(2x)+C]'=2f'(2x)$，故 B 不正确.

$\int 2f(2x)\mathrm{d}x=2\int f(2x)\mathrm{d}x\neq\int f(2x)\mathrm{d}x$，故 C 不正确.

$[f(x)+C]'=f'(x)$，故 D 不正确.

7. 微分方程 $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解为(　　)

A. $\arctan x+C$　　　　B. $\frac{1}{x}(\arctan x+C)$

C. $\frac{1}{x}\arctan x+C$　　　　D. $\arctan x+\frac{1}{x}$

答案　B

分析　本题主要考查一阶线性微分方程的解法，微分方程通解概念及简单函数积分的基本计算技能.

本题四个备选项涉及微分方程的通解，可通过两种方法得出结果，一种是验证、观察的方法，即验证哪些通解形式适合方程；一种是解微分方程的方法，即求出微分方程的通解，然后找出适合的选项.

解法 1　$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x(x^2+1)}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\ln x}\left[\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\frac{1}{x(x^2+1)}x\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}(\arctan x+C).$$

解法 2　$\arctan x+\frac{1}{x}$(选项 D) 不含任意常数，故不是通解.

$$(\arctan x+C)'=\frac{1}{1+x^2},\text{代入 } y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\arctan x+C}{x}\neq\frac{1}{x(x^2+1)},$$

故 A 不是通解.

$$\left[\frac{1}{x}(\arctan x+C)\right]'=-\frac{1}{x^2}(\arctan x+C)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2},\text{代入}$$

$$y'+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x^2}(\arctan x+C)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}(\arctan x+C)\right]$$

$$=\frac{1}{x(1+x^2)}.$$

故 B 项为通解.

同理可验证 C 不是通解.

8. 已知向量 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，则垂直于 $\vec{a}$ 且垂直于 y 轴的单位向量 $\vec{e}$ 为(　　)

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$　　　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{k})$　　　　D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})$

答案　C

分析　本题主要考查相互垂直向量坐标间的关系、向量的运算及空间想象能力.

本题可以通过直接求满足条件的向量来找出答案，或者通过分析、观察满足条件向量的特征来找出答案.

解法 1　先求与 $\vec{a}$，y 轴垂直的向量，然后单位化.

取与 y 轴平行的单位向量 $\vec{e}_y = 0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$,

$$\vec{a} \times \vec{e}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}, \text{单位化得 } \vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k}).$$

解法 2 设 $\vec{e} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,由条件得 $\vec{e} \cdot \vec{a} = 0, \vec{e} \cdot \vec{e}_y = 0$,

即 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$,又由 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ 得

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 0, z = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{于是}$$

$$\vec{e} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k}).$$

解法 3 由于所求向量 $\vec{e}$ 与 y 轴垂直,则 $\vec{e}$ 的纵坐标为 0,从而 $\vec{e}$ 向量的坐标表示中不含 $\vec{j}$,所以选项 C 满足条件,且为单位向量,因为 $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

9. 直线 $L: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{-1}$ 与平面 $\pi: 6x + 12y - 3z + 5 = 0$ 的位置关系是(　　)

A. 平行　　　　B. 垂直

C. 相交但不垂直　　　　D. 直线 L 在平面 π 内

答案 B

分析 本题主要考查直线方程、平面方程的基本知识,它们的位置关系以及向量基本计算推理能力.

直线与平面的位置关系有四种,正如本题四选项所列.其中平行、直线 L 在平面 π 内的特征是直线的方向向量与平面的法向量垂直,对于直线在平面内还有直线方程适合平面方程,即直线方程代入平面方程成为恒等式,平行于平面的直线则不然.直线与平面垂直,则直线方向向量与平面法向量平行,此时方向向量坐标与法向量坐标成比例(或相等).直线与平面相交但不垂直,则直线方向向量与平面法向量不垂直也不平行.

解法 直线的方向向量 $\vec{a} = \{2, 4, -1\}$,平面的法向量 $\vec{n} = \{6, 12, -3\}$,易见 $\vec{a}, \vec{n}$ 坐标成比例 $\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{-1}{-3}$,所以 $\vec{a} \parallel \vec{n}$,即直线 L 与平面垂直.

注 由本题分析可知,判断平面(法向量 $\vec{n}$)与直线(方向向量 $\vec{a}$)的位置可按下面步骤:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} \begin{cases} = 0, \text{平行或在平面内} \rightarrow \text{进一步判定;} \\ \neq 0 \begin{cases} \text{分量不成比例,相交,} \\ \text{分量成比例,垂直.} \end{cases} \end{cases}$$

10. 设 f 是连续函数,区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$ 且 $y \geqslant 0$,则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ (　　)

A. $\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r$　　　　B. $2\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r$

C. $2\pi\int_0^1 f(r)\mathrm{d}r$　　　　D. $\pi\int_0^1 f(r)\mathrm{d}r$

答案 A

分析 本题主要考查将直角坐标系下的二重积分化为极坐标系下的二重积分、并化为累

次积分的方法及相应的基本计算技能.

本题涉及将直角坐标系下的平面区域化为极坐标系下的平面区域的表达形式，需要运用曲线方程的"直极互化"的知识. 另外，化为极坐标系下的二重积分，面积元素 $dxdy = rdrd\theta$ 也是考查的知识点，掌握不好容易丢掉前面的"r". 四个选项均是一重积分，说明化为极坐标系下二重积分后需再化为累次积分并进行适当计算.

解法 积分区域在极坐标系下为

$$D: 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \iint_D f(r)rdrd\theta = \int_0^\pi d\theta\int_0^1 f(r)rdr = \left(\int_0^\pi d\theta\right)\cdot\left[\int_0^1 f(r)rdr\right]$$
$$= \pi\int_0^1 f(r)rdr.$$

（这里还利用到公式：$\int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x)g(y)dx = \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right]$）

第 Ⅱ 卷（非选择题，共 110 分）

第二大题是填空题，包括 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{kx} = e^{-6}$，则 $k =$ ＿＿＿＿＿＿.

答案 2

分析 本题主要考查利用重要极限求极限和指数式的性质，以及基本运算技能.

本题涉及含有待定参数的幂指函数的极限问题，且为指数型的未定式. 对本题来说，利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$，或化为可使用罗必达法则的形式在理论上都可以，但一般说来前者更简便些.

解法 1 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{kx} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}}\right]^{-3k} = e^{-3k}$，

由已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{kx} = e^{-6}$，得 $e^{-3k} = e^{-6}$，

所以 $k = 2$.

解法 2 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{kx} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{kx\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} kx\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}$.

又 $$\lim_{x\to\infty} kx\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = k\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right) = k\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\left(\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -3k,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{kx} = e^{-3k}$，又由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{kx} = e^{-6}$，

故 $k = 2$.

这里可以看出解法 2 比解法 1 复杂许多.

12. 设 $y=(1+x^2)\arctan x$，则 $y''=$ __________.

答案 $2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$

分析 本题主要考查二阶导数的概念、求法及函数乘积的求导法则.

二阶以上(含二阶)的导数称为高阶导数，求高阶导数的一般方法是逐阶来求，即 $y''=(y')'$，$y'''=(y'')'$，…，$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$. 对一般函数来说并没有表示任意阶导数的公式，有些特殊的函数则有表示任意阶导数的公式，例如，$(e^x)^{(n)}=e^x$，$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ 等. 对本题函数来说宜先求出一阶导数，再求二阶导数，而不能直接一步求出，这点也是考查点之一.

解法 $y'=[(1+x^2)\arctan x]'=2x\arctan x+1$，

$$y''=(y')'=(2x\arctan x+1)'=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

13. $\int_0^1 x(x-1)^3\mathrm{d}x=$ __________.

答案 $-\dfrac{1}{20}$

分析 本题主要考查定积分的牛顿－莱布尼茨公式及不同积分法的灵活运用能力.

定积分计算的主要方法是使用牛顿－莱布尼茨公式，这需要用到不同的求原函数的方法. 本题可以将被积函数展开，用直接积分法求值，也可以用换元法求值. 采用不同的方法在繁简上不同，选择较简便的方法也是要考查的问题.

解法 1 $\int_0^1 x(x-1)^3\mathrm{d}x=\int_0^1(x^4-3x^3+3x^2-x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{x^5}{5}-3\dfrac{x^4}{4}+x^3-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=-\dfrac{1}{20}$.

解法 2
$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x-1)^3\mathrm{d}x&=\int_0^1[(x-1)+1](x-1)^3\mathrm{d}x\\&=\int_0^1[(x-1)^4+(x-1)^3]\mathrm{d}(x-1)\\&=\left[\frac{(x-1)^5}{5}+\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1\\&=-\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

14. 函数 $z=x^2+y^2-2x+4y+2$ 的极值点的坐标是__________.

答案 $(1,-2)$

分析 本题主要考查二元函数极值的概念、极值点的必要条件和充分条件以及相应的基本计算和推理能力.

观察二元函数的解析式，通过配方可以化为平方和式，由此依据二元函数极值的含义，可以直接得出极值点坐标. 解此类问题更一般的方法是先求出驻点(偏导数为零的点)，然后用充分性定理来进行判定是否取极值. 本题是在填空题中，分值不高，命题意图更倾向考查对极值概念的理解，用变形观察的方法更为"经济". 另外也考查了极值点和极值的不同的含义，掌握不好也易混淆.

解法 1 $z=x^2+y^2-2x+4y+2=(x-1)^2+(y+2)^2-3$，由极值的定义知，在 $(1,-2)$ 处函数取极小值 -3，故极值点为 $(1,-2)$.

解法 2 令$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 4 = 0, \end{cases}$ 得驻点(1，－2).

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,-2)} = 2,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,-2)} = 0,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(1,-2)} = 2,$$

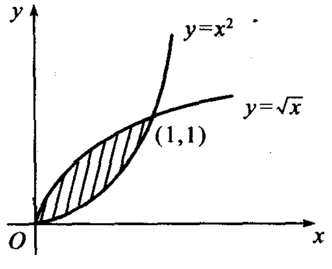
$B^2 - AC = -4 < 0, A > 0$，故$(1, -2)$为极小值点.

15. 交换积分的次序，$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{y^2} f(x,y)dx =$ ________.

答案 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

分析 本题主要考查用不同的积分次序计算二重积分的方法及相关的基本计算技能.

二重积分的计算一般通过化为二次积分来进行，选择什么样的积分次序影响到计算的繁简程度和能否求出积分结果，所以选择合适的积分次序和会交换积分次序是二重积分计算的基本技能之一.交换积分次序关系到这样几个环节：一是由积分表达式正确写出积分区域；二是将积分区域改变"观察视角"重新描述；三是正确写出二次积分.这里的第二环节一般需借助几何图形.



解法 由积分表达式得

$$D: \sqrt{y} \leqslant x \leqslant y^2, 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

积分区域D(如左图所示)也可表示为

$$D: x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

所以 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{y^2} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

第三大题是计算题，包括 8 小题，第 16 ～ 19 题每小题 7 分，第 20 ～ 23 题每小题 8 分，共 60 分.下面分小题进行具体分析.

16. 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{1 - \cos x}$.

命题分析 本题主要考查极限的基本概念和极限的求法，并考查分析和推理能力.

掌握极限的四则运算法则，会用两个重要极限求极限，会用等价无穷小代换求极限和会用罗必达法则求未定式的极限在"2003 年招生统一考试说明"中有明确要求.会求多种类型的极限问题是学习高等数学其他知识的基础，同时它本身也是需要掌握的基本技能.这类问题在本试卷中较占分量的只有此题，两个重要极限中的一个极限问题，极限的概念在选择题和填空题中已有涉及，此题在设计中包括了不同的极限求法：乘共轭因子的方法，利用重要极限法，等价无穷小代换和罗必达法则.

本题是极限论中最基本的数学问题之一.本题设题切入点容易，分子、分母都趋于零，能立即归到未定式中去.对于$\dfrac{0}{0}$型未定式的定值有不同的方法，本题中含有根式和三角函数，一般能考虑到用乘共轭因子和罗必达法则，并观照三角函数与重要极限的联系，这样在较容易地切入主题后，能有效地考查学生运用求极限的各种方法求具体极限的能力，考查的知识点较为丰富.

解法 1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{2\sin^2\dfrac{x}{2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}$

$$=4\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=4\times1\times\frac{1}{2}=2.$$

解法 2 用罗必达法则.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=1\times(1+1)=2.$$

解法 3 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}=2.$$

失误分析 解答本题易犯的错误有：

(1) 不能正确地掌握极限的运算法则，如错解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$$

$$=\infty-\infty=0(\text{或}\ \infty).$$

(2) 不能判断为$\dfrac{0}{0}$型未定式，这与分子、分母在极限过程中的极限的错误判断有关，如错误认为$\lim\limits_{x\to0}\cos x=0$，从而错解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{1+0^2}-\sqrt{1-0^2}}{1-\cos0}=\frac{0}{1}=0.$$

(3) 对未定式的极限求法没能掌握，如错解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})}{\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)}=\frac{0}{0}=1.$$

(4) 未定式求极限的方法正确，但具体解题过程中相关知识没有掌握，如罗必达法则运用中导数求错了，如错解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{1-x^2}}}{-\sin x}=\infty.$$

求极限问题是高等数学中的基本和重要的问题，要正确地掌握极限的求法需要注意如下

几点：① 对极限的概念有深刻的认识，熟练掌握简单极限的结果，例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 等；② 能在初步分析的基础上判断极限的类型，并掌握此种类型极限的求法（如本题是$\dfrac{0}{0}$ 型未定式，相应地有罗必达法则等求法）；③ 各类极限求法中相关的数学知识和方法，例如罗必达法则中的导数的求法，等价无穷小的代换及等价无穷小的知识等；④ 一些常用常见的重要极限结果的掌握，例如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 等. 上述这些方面把握不好都会在求极限中出错，所以需要十分注意.

17. 已知 $y=-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

命题分析 本题主要考查导数的基本运算方法，特别函数商的求导法，复合函数的求导法等的应用和计算技能.

导数概念在微分学中处于核心地位. 掌握导数的定义和导数的各种计算方法是学习微分学乃至高等数学须掌握的内容之一，在“2003 年高等数学招生统一考试说明”中也提出了较高的要求：“掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式”. 遵照上述的理念，依据试卷的整体设计构思，在解答题中设置一道中等难度求导数的考题，试题涉及的知识点包括导数的四则运算法则，复合函数的求导法则和基本初等函数的导数公式，以及三角函数与分式的运算. 属基本题型.

本题是一元函数微分学中最基本的数学问题之一. 求具体函数的一阶导数，试题题意明确，任务清晰，切入容易，难度适中，使多数考生能较快进入主题. 在求导数过程中，商的求导办法，复合函数的求导办法，代数和导数法则都需运用；另外在完成求导后需要对式子化简，这涉及三角函数的常用变换公式等内容；同时还考查了三角函数、对数、幂函数等基本初等函数的导数公式，达到了命题分析. 在解题过程中会呈现由相对繁复的式子经化简变成相当简洁的结果，体现出数学的美感，使考查过程也渗透了审美熏陶.

解法
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{-\sin x\cdot 2\sin^2 x-\cos x\cdot 2\cdot 2\sin x\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2\sin^3 x+4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin^3 x}=\csc^3 x.$$

失误分析 解答本题易犯的错误有：

(1) 不能正确运用商的求导法则或复合函数求导法则. 如

错解 ①
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(\cos x)'}{(2\sin^2 x)'}+\left[\frac{1}{2}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]'$$
$$=-\frac{-\sin x}{2\times 2\sin x\cdot\cos x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'$$
$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$