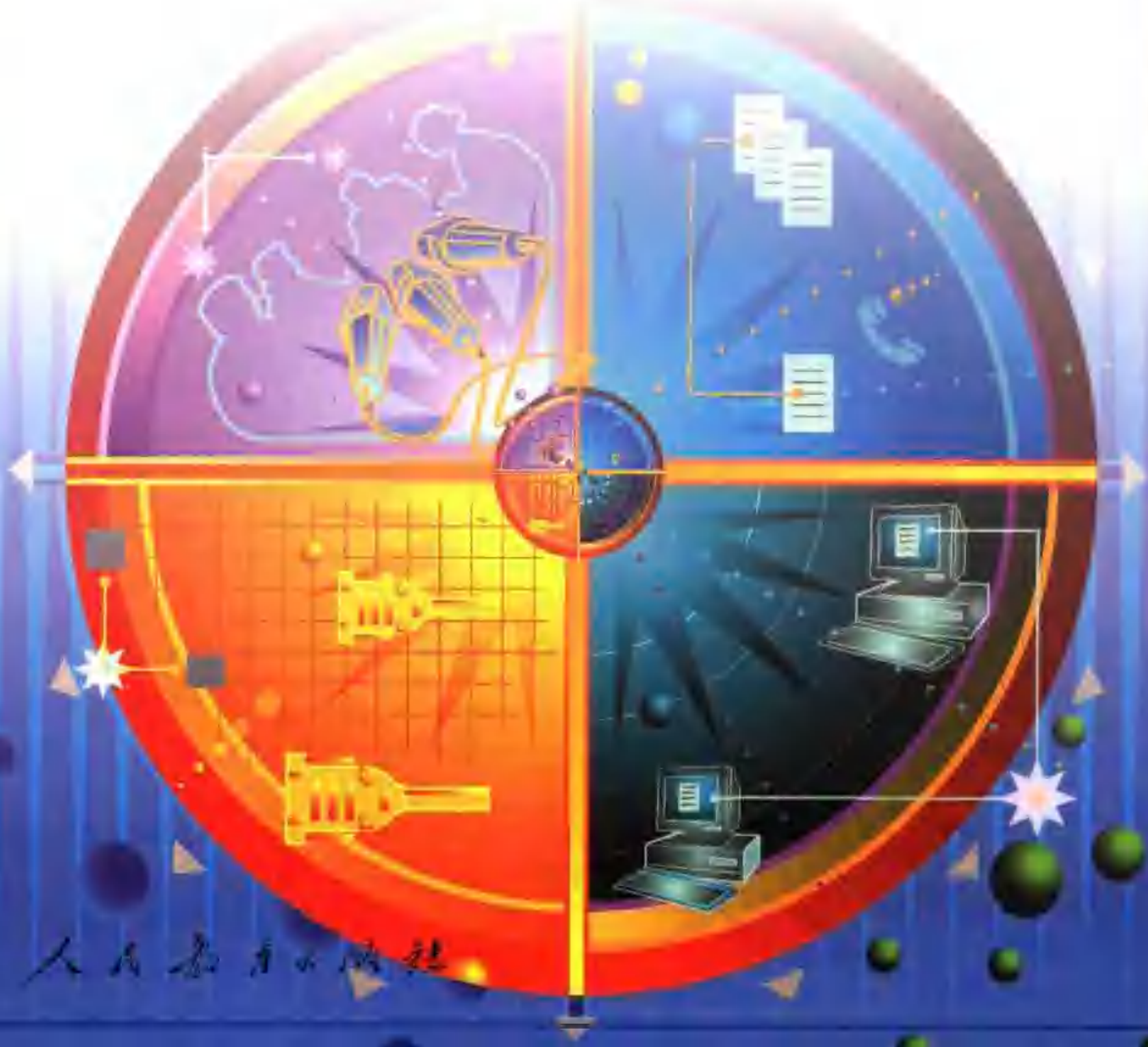
国家教育部
规划教材

中等师范学校数学教科书（试用本）

代数与初等函数

第一册

人民教育出版社中学数学室　编著



人民教育出版社

中等师范学校数学教科书
（试用本）

代数与初等函数

第一册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

中等师范学校数学教科书（试用本）

代数与初等函数

第一册

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：19　字数：300 000

1998 年 12 月第 1 版　2006 年 3 月第 8 次印刷

印数：607 051～622 050

ISBN 7－107－12723－3 / G·5833（课）　定价：15.10 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

主　　编：方明一
编 写 者：方明一　刘凤蓄　杨钧洪　颜其鹏
责任编辑：颜其鹏

第一版说明

中等师范学校数学教科书（试用本）是受国家教委委托，根据国家教育委员会1992年制定的《三年制中等师范学校数学教学大纲(试行)》编写的必修课教材.

这套数学教科书共分六册，包括《代数与初等函数》第一、二册，《几何》第一、二册，《小学数学教材教法》第一、二册.

各地在使用这套数学教科书时，可以根据具体情况，参照下表对数学课进行安排：

学　年	周课时数	科　　目
一年级	3	代数与初等函数第一册
	2	几何第一册
二年级	3	代数与初等函数第二册
	2	几何第二册
三年级	3	小学数学教材教法第一、二册

本书是中等师范学校数学教科书（试用本）《代数与初等函数》第一册，内容包括集合与对应，幂函数、指数函数和对数函数，三角函数，不等式，不定方程，复数，数集. 供三年制中等师范学校数学课一年级全学年使用.

本书由我室组织编写. 初稿完成后，曾在安徽省芜湖师范学校开会对书稿进行了审查. 由于时间仓促，书中难免有错误和疏漏，欢迎广大师生和其他读者批评指正.

人民教育出版社中学数学室

1993年12月

第二版说明

本版是在1993年12月第1版的基础上修订而成的．修订主要包括两个方面：

1．按照国家技术监督局颁发的《量和单位》国家标准GB 3100～3102—93，规范使用了有关的单位和符号．

2．为了与九年义务教育全日制初版中学《数学教学大纲（试用）》（1995年6月第2版）的内容相衔接，对部分章节做了补充和调整，并根据教师使用中的意见，对个别地方的不足进行了修正．

参加此次修订的有方明一、薛彬、袁明德、颜其鹏，责任编辑是袁明德、颜其鹏．

人民教育出版社中学数学室

1998年12月

目　录

第一章　集合与对应 …… 1
　一　集合 …… 1
　二　对应 …… 15
第二章　幂函数，指数函数，对数函数 …… 26
第三章　三角函数 …… 78
　一　任意角的三角函数 …… 78
　二　两角和与差的三角函数 …… 113
　三　三角函数的图象和性质 …… 130
　四　解斜三角形 …… 150
第四章　不等式 …… 174
第五章　不定方程 …… 205
第六章　复数 …… 233
　一　复数的概念 …… 233
　二　复数的运算 …… 240
　三　复数的三角形式 …… 247
第七章　数集 …… 269

第一章 集合与对应

一 集 合

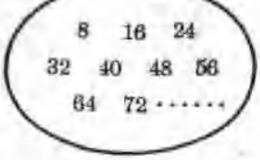
集合是近代数学的重要基本概念之一. 集合论是研究集合的一般性质的理论，它既是现代数学的基础，又是一门纯数学，同时还是逻辑学的一个重要领域. 集合论思想已经渗透到许多重要的近现代科学中，在计算机、人工智能和日常生活中都有着广泛的应用.

在初等数学中，引进集合的有关概念，可以对初等数学中的一些概念理解得更深刻、表达得更明确；集合之间的运算关系，特别是集合中的逻辑运算关系，对培养逻辑思维能力占有着极其重要的地位；小学数学中的数集之间的关系，数的计算原理，以及数的概念的发展，都是以集合论作为理论基础的. 学好集合不仅仅是学好数学各分支的基础，同时对于将来从事小学数学教学也具有十分重要的意义.

集合论是 19 世纪末 20 世纪初才开始发展起来的，它的创始人是德国数学家康托尔 (Georg Cantor，1845 年～1918 年，出生于俄国彼得堡).

在小学数学中开始渗透集合的思想，初中数学中已经遇到关于集合的名词. 这里，我们将较系统地学习集合的初步知识. 主要内容有集合的概念，集合与集合的关系，两个集合之间元素与元素的关系.

8 的倍数



(1)

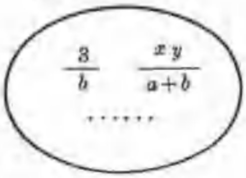
(2)

图 1-1

整式的集合

(1)

分式的集合



(2)

图 1-2

1.1 集合

1. 集合与元素

在小学和初中数学课本中有如下的一些关于集合的图形和语句.

(1) 在小学数学课本中有如图 1-1 一类集合图形.

(2)在初中数学课本也讲过一些集合,例如有如图 1-2 一类集合图形.

(3) "在 AB 的垂直平分线 MN 上的点到 A,B 两点的距离都相等,并且,到 A,B 两点的距离相等的点都在 MN 上,所以直线 MN 就是到 A,B 两点的距离相等的点的集合".

从上面的实际例子可以看出,集合可以由一些数、一些代数式、一些点、一些图形,也可以由一些物体组成.

像这样,把具有某种属性的一些对象,看作一个整体,便形成一个**集合**,集合里各个对象叫做这个集合的**元素**.

图 1-1 (1) 中,8 的正整数倍数组成的集合是由数 8,16,24……组成的集合,其中的对象 8,16,24……都是这个集合的元素.

又例如,小于 10 的正奇数的集合是由数 1,3,5,7,9 组成,其中的对象 1,3,5,7,9 都是这个集合的元素.

太阳系的 9 大行星的集合由水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星和冥王星组成,其中水星、金星、地球……都是这个集合的元素.

集合一般用大写的拉丁字母 A,B,C……表示,集合的元素一般用小写的拉丁字母 a,b,c……表示.

2. 集合与元素的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说元素 a 属于集合 A,记作 $a \in A$,符号"$\in$"表示属于,读作"a 属于 A",或读作"a 是集合 A 的一个元素";如果 a 不是集合 A

的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$，符号“$\notin$”表示不属于，读作“a 不属于 A”，或读作“a 不是集合 A 的一个元素”. 即

	写法	读　法
a 是集合 A 的元素	$a\in A$	a 属于 A(a 是集合 A 的一个元素)
a 不是集合A 的元素	$a\notin A$	a 不属于 A(a 不是集合 A 的一个元素)

例如，用 A 表示“12 的所有约数”的集合，那么 $3\in A$，$7\notin A$.

又例如，用 $\mathbf{N}$ 表示“自然数”的集合，那么 $0\in\mathbf{N}$，$5\in\mathbf{N}$，$-3\notin\mathbf{N}$.

集合有时简称集，数的集合简称数集. 数集中有些常用的符号.

全体自然数的集合通常简称自然数（**natural numbers**）集，记作 $\mathbf{N}$（用 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集）.

全体整数的集合通常简称整数（**integers**）集，记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数的集合通常简称有理数(**rational numbers**)集，记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数的集合通常简称实数(**real numbers**)集，记作 $\mathbf{R}$.

例如，$5\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$；$-5\in\mathbf{Z}$，$\frac{1}{3}\notin\mathbf{Z}$；$\frac{3}{5}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$；$-\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbf{R}$.

关于集合的概念，要注意以下几点：

(1) 对于一个给定的集合，它的元素是确定的. 这就是说，任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是它的元素，二者必居其一.

例如，给定所有自然数组成的集合 $\mathbf{N}$，我们便可以判断 3 属于 $\mathbf{N}$，而 -5 不属于 $\mathbf{N}$.

又如，“相当大的数的全体”、“美丽的图形”等，

由于所指的对象是不确定的，因而它们不能形成集合.

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素. 因此，集合中的元素是没有重复现象的.

例如，由数 3,5,6,4,3,5 组成的集合，应写成由数 3,4,5,6 组成的集合即可.

【阅读材料】

集合论的发展简史

人们对集合概念的最初了解，可以追溯到几千年以前，那时，人们在对集合进行区分中产生了自然数的概念. 后来，欧几里得在《几何原本》中，也把空间看成是数学点的无限堆积而构成的. 十七世纪，伽利略又发现了“自然数全体”与“平方数全体”能一一对应，从而使“全体大于部分”这一数学公理出现了疑问. 但是，直到康托尔之前，对于无限集的认识和研究，一直还滞留在零碎不全的认识的初级阶段.

对集合论作出了创造性贡献的是德国数学家康托尔，他在 1874 年～1897 年间发表的一系列关千无穷集合理论的论文中提出了集合论思想.

首先，康托尔把集合看作是一些确定的、不同的东西的总体，这些东西使人们能意识到，并且能判断一个给定的东西是否属千这个总体，这就是他的造集原则. 这个原则立即把数学引入了实无限集合，因为满足条件 $p(x)$ 的 x 当然可以是无限多的.

进而，康托尔对无限集下了定义：如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是一个无限集. 这样，就找到了探讨无穷集的魔杖. 从一一对应概念出发，他把两个能够建立一一对应关系的集合称为对等集合或具有相同的“基数”，从而可以知道两个无穷集合的元素“个数”是否相等. 这样可数集——与正整数集对等的集合的概念也就建立起来了. 他还先后证明了偶数集、整数集、有理数集和代数数集都是可数集，即它们的元素与正整数集的元素一样多. 此外，他还得出了由连续的点所组成的集合不是可数集，如实数集，由此也说明了超越数的存在.

最后，利用对等思想，他证明了一条直线上的点集与二维平面、三维空间上的点集可以建立一一对应关系，即它们的元素一样多，同时，他还提出了这样的猜测："是否存在这样的集合，它有比可数集合大而比实数集合小的基数"，这是目前数学上著名难题之一.

康托尔对集合论的创造性成果，对现代数学产生了深刻的影响.

(1) 康托尔证明有理数集为可数集和实数集为不可数集的对角线法是极其重要的数学方法，在数学基础研究中有重要应用.

(2) 他的集合概念和对无限集合的分类，使数学抽象到更高的层次，开辟了广阔的研究领域.

(3) 为数学提供了广泛的理论基础，这以后，现代数学大厦几乎都是在集合论基础上建立起来的.

(4) 后来出现的集合论悖论及其争论促使了数学基础的建立和数学基础学科的发展.

1.2 集合的表示法

集合的表示方法，常用的有列举法、描述法、文氏❶图法.

❶ 文(John Venn，1834 年～1923 年)，英国逻辑学家.

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**.

例如：

(1) 12 的正约数的集合，可记作$\{1,2,3,4,6,12\}$；

(2) 方程$x^2-x-2=0$ 的解的集合，可记作$\{-1,2\}$；

(3) 方程组$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$的解的集合，可记作$\{(1,2)\}$.

当集合中的元素很多时，如果要列出全部元素很繁，甚至不可能，我们可以按照某种规律，列举出其中一些有代表性的元素，省略其余的元素.

例如：

(1) 比 100 小的正整数的集合，可记作

$$\{1,2,3,\cdots,99\}.$$

(2) 正整数集可记作

$$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

(3) 全体偶数的集合可记作

$$\{\cdots-4,-2,0,2,4,\cdots\}.$$

在用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序. 例如，由三个元素 a、b、c 组成的集合，可以表示为 $\{a,b,c\}$，也可以表示为 $\{a,c,b\}$，$\{b,a,c\}$，$\{b,c,a\}$，等等.

应该注意，a 与 $\{a\}$ 是不同的. a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合只有一个元素 a；a 与 $\{a\}$ 的关系为 $a\in\{a\}$.

2. 描述法

把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**. 这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性.

例如，不等式 $2x-1>0$ 的解集，可以表示为

$$\{x\,|\,2x-1>0\}.$$

又如，x 是 6 的正约数的集合，可以表示为

$$\{x\,|\,x \text{ 是 6 的正约数}\},$$

其中竖线左边的字母 x 表示集合的元素的一般形式，竖线右边表示集合的元素的公共属性.

为了简便起见，有时也可以直接在大括号内写上集合中元意的公共属性.

例如，自然数集 **N**，整数集 **Z**，有理数集 **Q**，实数集 **R**，可以表示为

N={自然数}，**Z**={整数}，**Q**={有理数}，**R**={实数}.

又例如，由所有等边三角形组成的集合，可以表示为

{等边三角形}.

3. 文氏图法

把集合中的全部元素用一条封闭的曲线圈起来表

示集合的方法，叫做**文氏图法**.

例如，图 1-3 表示由 a，b，c，d 这四个元素组成的集合.

这种表示方法比较形象、直观，在小学数学课本中常采用这种表示方法.

例如，12 的正整数倍数的集合如图 1-4；小学数学中讲到三角形分类时，有如图 1-5 所表示.

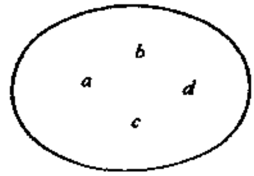


图 1-3

12 的正整数倍数

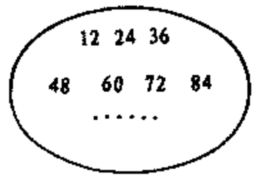


图 1-4

三角形按角分类

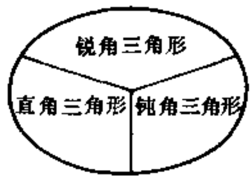


图 1-5

练　习

1. 举出三个集合的实例.
2. （口答）说出下面集合里的元素：
   (1) {大于 3 小于 11 的奇数}；
   (2) {12 的正约数}；
   (3) {平方等于 1 的数}；
   (4) {15 以内的质数}.
3. （口答）说出下面集合里的元素：
   (1) {一年中有 31 天的月份}；
   (2) {京广铁路起始和终点的火车站}；
   (3) {中国古代四大发明}；
   (4) {世界各大洋}.
4. 下列各题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这些集合表示出来：
   (1) 60 的所有质因数；
   (2) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的解；
   (3) 长江、黄河、珠江、黑龙江；
   (4) 一年四个季节即春、夏、秋、冬.
5. 在下表的空格处填上符号 $\in$ 或 $\notin$：

实数 数集	1	3	-3	0.5	$\sqrt{2}$
N					
Z					
Q					
R					

1.3 子集

我们看集合

$$A=\{2,3\}, B=\{2,3,5,7\}.$$

集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素. 像这样，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B，或 B\supseteq A，$$

读作"A 含于 B"或"A 是 B 的子集".

例如，数集 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

又如，$A=\{三角形\}$，$B=\{等腰三角形\}$，那么 $B\subseteq A$.

对于一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于它本身，所以有 $A\subseteq A$. 也就是说，任何一个集合都是它本身的子集.

如果 A 是 B 的子集，并且在 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 就叫做集合 B 的**真子集**，表示为

$$A\subsetneqq B \quad 或 \quad B\supsetneqq A.$$

读作"A 真包含于 B"，或读作"A 是 B 的真子集".

例如，整数集 $\mathbf{Z}$ 是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的真子集，记作 $\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}$；自然数集 $\mathbf{N}$ 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的真子集，记作 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$；正奇数集合 M 是自然数集 $\mathbf{N}$ 的真子集，记作 $M\subsetneqq\mathbf{N}$.

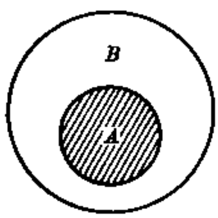


图 1-6

集合 B 与它的真子集 A 之间的关系，如图 1-6 所示.

容易知道，对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

同样可知，对于集合 A、B、C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

注意：记号 $\in$ 与 $\subsetneqq$ 是不同的. 记号 $\in$ 表示元素与集合的属于关系；记号 $\subsetneqq$ 表示集合与集合的包含关系.

为了方便起见，我们把不含任何元素的集合叫做

空集，记作$\varnothing$．例如：

$$\{\text{小于零的正数}\}=\varnothing,$$

$$\{\text{两边之和小于第三边的三角形}\}=\varnothing.$$

我们规定**空集是任何集合的子集**．也就是说，对于任何集合 A，有$\varnothing\subseteq A$．

注意：0，$\{0\}$，$\varnothing$三个记号是有区别的．0 表示数零；$\{0\}$表示仅含有一个数 0 的集合；$\varnothing$表示不含任何元素的空集．

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个**集合相等**，记作

$$A=B,$$

读作"A 等于 B"．

例如，$A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$，$B=\{-1,-2\}$，则

$$A=B.$$

例 1　写出集合$\{a,b\}$的所有的子集．

解：集合$\{a,b\}$的所有的子集是$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$．

例 2　写出方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集．

解：方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集是

$$\{x\mid x^2-2x-3=0\}=\{x\mid x=-1,x=3\}$$
$$=\{-1,3\}.$$

1.4　交集

看下面两个集合

$$A=\{1,2,3,6\},B=\{1,2,5,10\}.$$

容易看出，集合$\{1,2\}$是由同时属于 A 和 B 的所有元素组成的．像这样，对于给定的集合 A，B，由既属于 A 又属于 B 的所有的元意组成的集合，叫做**集合 A 与 B 的交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 与 B 的交集"．

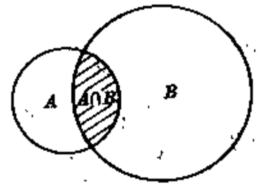


图　1-7

图 1-7 的阴影部分，表示集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$．

由交集的定义容易推出，对于任何集合 A，B，

$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing$,

$A\cap B=B\cap A$.

例 1 已知 $A=\{2,4,6,8,10,12\}$，$B=\{3,6,9,12\}$，求 $A\cap B$，并用文氏图表示出来.

解：$A\cap B=\{2,4,6,8,10,12\}\cap\{3,6,9,12\}=\{6,12\}$.

用文氏图表示如图 1-8.

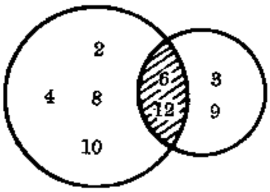


图 1-8

例 2 设 $A=\{x|x$ 为 12 的正约数$\}$，$B=\{x|x$ 为 15 的正约数$\}$，求 $A\cap B$.

解：$A=\{x|x$ 为12 的正约数$\}$

$=\{1,2,3,4,6,12\}$,

$B=\{x|x$ 为 15 的正约数$\}$

$=\{1,3,5,15\}$,

$A\cap B=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{1,3,5,15\}=\{1,3\}$.

注意：$A\cap B$ 中的元素就是 12 与 15 的公约数.

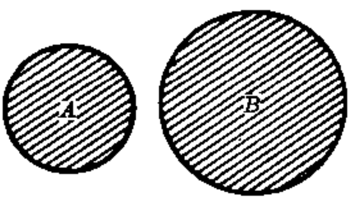
1.5 并集

我们看集合

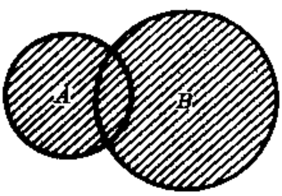
$$A=\{1,2,-2\}, B=\{1,-1,-2\}.$$

容易看出，集合$\{1,-1,2,-2\}$是由所有属于A 或属于 B 的元素组成的. 像这样，对于给定的集合 A,B，由属于 A 或属于 B 或属于两者的所有元素组成的集合，叫像集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 与 B 的并集".

图 1-9 中的阴影部分，表示集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$.



(1)



(2)

图 1-9

由并集定义容易知道，对于任何集合 A,B，有

$$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup B=B\cup A.$$

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次. 例如，$A=\{3,5,6,8\}$，$B=\{4,5,6,8\}$，则 $A\cup B=\{3,4,5,6,8\}$，而不是$\{3,5,6,8,4,5,6,8\}$.