HZ BOOKS

概率论与数理统计

陈方樱 徐赐文 郑更新 编著

机械工业出版社
China Machine Press

021
228

概率论与数理统计

陈方樱 徐赐文 郑更新 编著

机械工业出版社
China Machine Press

本教材是在国内外同类教材的基础上，结合作者们多年在大学不同专业讲授概率论与数理统计课程积累的经验，为适应21世纪高等院校对综合型人才的培养而编写的. 全书的主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念以及参数估计和假设检验等. 本书编写思路清晰，行文深入浅出，富有启发性，便于读者自学.

本书可作为高等学校理科(非数学专业)、工科及经济管理等专业的教材.

版权所有，侵权必究.
本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/陈方樱等编著. —北京：机械工业出版社，2006.3
ISBN 7-111-18206-5

Ⅰ.概… Ⅱ.陈… Ⅲ.①概率论—教材 ②数理统计—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第008663号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)
策划编辑：武恩玉
责任编辑：武恩玉
北京中兴印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2006年5月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·16印张
定价：29.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：(010)68326294

序

随机数学越来越得到各学科、各行业的重视和广泛的应用，而概率论与数理统计是随机数学的基础．因此，要学好随机数学就必须学好概率论与数理统计这门课．对于学习者来说，一本适当的教材或学习用书会起到事半功倍的作用．市面上关于概率论与数理统计的书已有很多，也不乏精品之作，但真正适合于信息与计算科学专业的书不多，陈方樱等编写的这本书就弥补了这一缺憾．

概率论与数理统计是学生在大学里首次接触到的以随机现象为研究对象的数学课程，其研究对象、研究方法、思维方式等都有别于其他数学课程，学生在初次学习时会有许多困惑．本书是基于编者多年开设这门课的讲义而编写的．因此，在内容的编排上，特别注意了把本学科知识的系统性和教学法的要求相结合，充分考虑到学生的学习特点和认知过程的规律，使科学知识的表达能以较恰当的方式利用较少的课时为学生所接受．例如在概率论部分将一维随机变量和多维随机变量分为两部分来讲授，而不是分成离散型随机变量和连续型随机变量两部分来讲授，主要是考虑到便于学生将离散型随机变量和连续型随机变量许多相关的基本概念进行类比的推导和学习；又例如分布函数放在离散型随机变量概念之后引入，这样符合先易后难、从直观到抽象的思维过程，有利于学生对分布函数这一抽象概念的理解和接受．

本书通俗易懂．它采用深入浅出、循序渐进的方法较系统地介绍了概率论与数理统计的基本理论和基本方法．在概念、定理及公式的引入中作者注意结合实例阐明它们产生的背景和实际意义，并通过例题加以说明，避免学生一开始就被枯燥和繁琐的定义、定理和公式所困扰，利于学生了解学习这门课的实际意义，激发学生的学习兴趣．

充分考虑到不同层次学生的需求，本书配备了较多的例题和习题．在例题的编写上作了精心的设计．首先注意了对问题的分析，通过细致的分析，阐述了将实际问题转化为概率模型的思路；其次对解题的方法和步骤也作了较详细的介绍、归纳和整理，有些题后还加注了说明．这样一方面有利于学生对基本概念的理解和基本方法的掌握，解决学生觉得概率统计这门课听起来有兴趣、基本概念难懂、方法难于掌握、习题难做的问题；另一方面还能使学生初步了解到如何用随机方法去解决实际问题，从而培养学生建立概率统计模型及解决实际问题的意识和能力．

综观全书，它在内容结构的安排上既符合一门数学课程的体系，有一定严密的数学系统性，同时又不是完全用纯粹的数学的语言来编写，使这本书更适合于信息与计算科学专业的学生学习．对部分章节和内容进行删节后也可作为其他理工科专业或管理、经济类专业的概率论与数理统计教材和学习用书．

刘秀芳

2006 年 3 月

前　言

概率论与数理统计是一门研究随机现象统计规律的数学学科，是数学与应用数学、信息与计算科学、统计学专业的主要基础课，同时也是大部分理工科、经济、金融、管理和其他社会科学等专业的必修课.

本教材是在国内外同类教材的基础上，结合我们多年对大学不同专业讲授概率论与数理统计课程积累的经验，为适应21世纪高等院校对综合型人才的培养而编写的，可作为高等学校理科(非数学专业)、工科及经济管理等专业的教材.

该课程是学生在大学里首次接触到以随机现象为研究对象的数学课程，其研究对象、研究方法、思维方式等都有别于其他数学课程. 因此，本书力图做到题材的组织和递进的难度符合学生的认知规律，强调知识的传授与启发式教学相结合. 通过实际问题引入基本概念和建立基本定理，以激发学生的学习兴趣，增强学生对概率论与数理统计基本思想、基本方法的理解，进而使学生在掌握本课程的理论知识的同时，逐步理清该课程与其他数学课程的关系并初步掌握本课程的应用方法.

概率论与数理统计是一门重要的基础课，初学者在学习中会遇到一些困难. 因此，我们在例题的编写中尽量阐述清楚解题的思路、方法和步骤，以精选的习题来巩固学生的课堂知识. 在习题的选择上，一方面注意了由浅到深，安排一定量的有助于加深理解基本概念、训练基本方法的习题；另一方面安排了一些涉及通信、信息、经济、文化、医学等方面的习题，使学生在学到概率论与数理统计的基本理论和方法的同时，也获得一些解决实际问题的能力.

全书分为两大部分：第一部分为概率论基础，包括前5章内容；第二部分为数理统计，包括后3章内容. 在概率论部分我们将一维随机变量和多维随机变量分为两章来讲授，每章均含连续型随机变量和离散型随机变量的相关内容，便于学生将连续型随机变量和离散型随机变量对比学习. 在数理统计部分着重介绍了统计的基本概念及估计和检验的基本思想和方法，而略去了一般的概率论与数理统计教材所包含的回归分析和方差分析的内容. 实际上根据现有情况，多数学校的非概率统计专业都将概率论与数理统计作为一门课程在一学期开设，也没有课时讲授这两部分的内容. 有关内容可在应用数理统计中讲授.

本书基本上只用到微积分和线性代数的知识，凡具备这两门高等数学知识的读者都可以使用本书作为学习概率论与数理统计课程的教材. 根据我们几次试用成书前的讲稿，本书基本内容可在72课时内(不包括习题课)全部授完. 对于一般的工科和管理类专业，带*号的章节略去不讲，也可在54课时内授完.

在此，我们首先要感谢中央民族大学数学与计算机科学学院的领导和全体教师对我们编写本教材的关心和支持；特别要感谢魏凤荣教授在百忙之中抽出时间审阅了书稿，提出了宝贵意见，感谢民族大学历届学生，他们在学习中提出了大量的问题并对部分习题答案作了验证.

本书前3章由徐赐文编写，第4、5章由郑更新编写，后3章由陈方樱编写，全书由陈方樱统稿. 由于我们的水平所限，虽经多次修改，书中一定还存在许多错误和不足，恳请广大师生批评指正.

陈方樱，徐赐文，郑更新

2005年7月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

引　言

一、概率论与数理统计研究的对象

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学分支.

什么是随机现象呢？让我们先看几个例子：

(1) 两个带同性电的小球相靠近，则相互排斥；

(2) 纯水在一个标准大气压下，加热到 100°C 沸腾；

(3) 抛掷一枚质地均匀的硬币，可能正面向上，也可能反面向上；

(4) 某天股市上某种股票的价格.

例(1)、(2)中所述的现象，一般在一定的条件下其结果是完全确定的，这种现象称为**确定性现象**.

例(3)、(4)中所述的现象，一般即使在相同的条件下，事先也不能肯定它会出现哪一种结果，而且从一次试验或一次观察也看不出有什么规律，这种现象称为**随机现象**. 和确定性现象一样，随机现象也是自然界、人类社会中的一种重要现象，这种现象无时无刻不影响着我们. 因此，认识和研究随机现象的变化规律对于人们进行科学决策，更好地安排经济和生产活动有着重要的意义. 例如，若知道每天顾客人数的变化规律，商店就可以合理地安排售货员；同样，若知道股市上股票价格的变化规律或变化趋势，投资者就可以选择最佳投资方案.

如何研究随机现象呢？一开始，人们将这些具有“偶然性”的随机现象看作是“不正常的”、“出乎意料的”或者是“无规律的”，甚至认为是上帝的安排. 那么是不是随机现象真的是无规律可寻呢？事实上，并非如此. 人们经过长期大量的实践发现，在相同的条件下，进行大量反复的实验和观察，随机现象都会呈现出某种规律性，所谓无规律只是对一次或少数几次实验和观察而言. 例如，抛掷一枚质地均匀的硬币，虽然我们事先无法预知其结果，但是，如果抛掷多次，很快就会发现出现正面的次数与出现反面的次数之比近乎为 1∶1，且抛掷次数越多这个近似越精确. 同样，我们无法预知新生儿中男婴的确切数量，但经过长期的观察发现，新生儿中男婴与女婴的数量之比也近乎为 1∶1. 拉普拉斯(Laplace，P. S. M)根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国(18 世纪)的统计资料得出几乎完全一致的男婴出生数与全体婴儿出生数的比值，所有这些比值在 10 年间总在 22/43＝51.16％附近摆动，但用巴黎 40 年间(1745—1784)的资料却得到上述值为 25/49＝51.02％，拉普拉斯感到奇怪. 后来经过仔细调查研究，发现巴黎附近某地区有弃女婴的习俗，造成了收容单位或个人重复申报户口，从而使女婴比例增大，以至歪曲了男婴出生率的真相. 经拉普拉斯修正后这个比值也稳定于 22/43＝51.16％. 由此可见，自然界中存在着大量的具有下列特点的随机现象：在一定的条件下，它有多种可能的结果，事先人们无法预知将出现哪种结果，但经过大量重复试验或观察后，所得到的结果呈现出某种确切的规律，这种规律称为随机现象的**统计规律**.

正如恩格斯所说“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律.”

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门学科.

二、概率论的起源和发展

概率论与数理统计的发展历史悠久. 14 世纪，随着商业、贸易日益发展，航海事业日新月异，出现了海上保险事业. 到 16 世纪时人寿保险及水灾、火灾等的保险事业也相继出现. 它们都向数学提出了新的要求，需要应用数学来分析和研究这些现象中蕴藏的规律，估计各种事件发生的可能性的大小，这就促进了数学家对概率论与数理统计的研究. 因此可以说概率论与数理统计的兴起是由保险事业的发展而产生的，但最初刺激数学家思考概率论与数理统计问题的却来自掷骰子的游戏. 17 世纪中叶，法国有一位热衷于掷骰子游戏的贵族德·梅尔(De Mere)，他在掷骰子游戏中遇到了一些令他苦恼的问题. 例如，他认为掷一枚骰子 4 次至少出现一次 6 点和掷一对骰子 24 次至少出现一次双 6 的概率是相同的，但经验表明第一个事件较第二个事件出现的可能性大一些. 他找不到解释的原因，于是他把遇到的问题向法国数学家帕斯卡(Blaise Pascal)请教，帕斯卡又把它提交给另一位数学家费马(P. Fermat)，他们频繁通信，开始了概率论和组合论的研究. 这件事被荷兰的科学家惠更斯获悉，他独立地研究了这些问题，写出了《论掷骰子游戏中的计算》，时间是 1657 年. 这是迄今为止被认为概率论的最早著作.

18 世纪初，简·伯努利(Bernoulli, J.)发现了大数定律，这是概率论中的一个重要结论. 从 18 世纪初到 19 世纪，母函数、特征函数的引入，成功地解决了许多问题，特别是对中心极限定理的研究，在这方面棣莫弗(De Moiver)、拉普拉斯(Laplace, P. S. M.)、李亚普诺夫(Ляпунов)等都有出色的工作. 这个时期也称作分析概率时期.

从 19 世纪到 20 世纪中叶，概率论研究的主要工作包括两方面：一方面是极限理论的发展、随机过程理论的建立；另一方面是系统地研究了概率的基本概念，有许多人在这方面作过努力，高斯(Gauss)奠定了最小二乘法和误差理论的基础. 泊松(Poisson)推广了大数定律，引入了十分重要的“泊松分布”，马尔可夫(Марков, А. А.)导入了有名的马尔可夫链，特别是柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)1933 年在苏联科学院院报上发表了“概率的公理化结构”的论文，为概率论的理论奠定了严格的逻辑基础. 同时，概率论与数理统计在这一时期完成了分家.

从 1940 年开始，概率论有了自己的研究方向，重点研究随时间变化随机变量族(即随机过程)的轨道性质. 在这期间，一方面逐渐出现了理论概率论与应用概率论分家的趋势，另一方面也出现了蒙特卡罗(Monte Carlo)方法，其思想在 18 世纪法国学者蒲丰用投针游戏估计 π 值时就已形成，但真正命名却在 1946 年. 当时美国两位学者冯·诺依曼(Von Neumann, J. L.)和乌拉姆首先用数学程序在计算机上模拟中子裂变连锁反应的结果，并用概率统计的方法研究反应后的结果，他们把第一个这样的程序命名为“蒙特卡罗程序”，自此兴起了蒙特卡罗方法，它是一种建立在概率统计基础上的计算方法，在电子学、生物学、高分子化学等学科的研究中有着重要的应用.

现在，概率论与数理统计已成为最重要和最活跃的数学学科之一，它大量应用于国民经济、工农业生产、近代物理、气象、地震、生物、医学、金融、保险等领域. 许多新兴的学科如信息论、对策论、排队论、控制论等几乎都是以概率论为基础的，概率论与数理统计的发展正是方兴未艾.

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件和样本空间

一、基本事件与样本空间

在引言中我们已经介绍了随机现象，这些随机现象实际是一些随机试验所表现出来的. 那么什么是随机试验呢？一般称一个试验为**随机试验**，如果该试验满足以下条件：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)试验的所有可能结果是事先已知的；

(3)每次试验只能出现所有可能结果中的一个，但在试验以前不能断定究竟出现哪一个结果.

随机试验也简称为**试验**，一般用符号 E 表示一个随机试验.

例如：

$E1$：掷一枚骰子，观察它出现的点数；

$E2$：观察某网站在单位时间内被点击的次数；

$E3$：测试某工厂生产的灯泡的寿命，即灯泡的使用时间.

显然，上述三个试验都可以在相同条件下重复进行. 对于试验 $E1$，它的所有可能出现的点数为 1，2，3，4，5，6 共有六种. 试验 $E2$，网站的点击数可以为 0 或 1，2，…，因此，试验的所有可能结果是全体非负整数. 试验 $E3$，灯泡的寿命是某个非负实数，因此，试验的所有可能结果是非负实数的某个区间. 而对于这三个试验来说，每次试验前我们都无法知道究竟出现哪一种结果，但总是出现所有可能结果中的某一个，所以它们都是随机试验. 随机试验的每一个可能出现的结果称为一个**基本事件**或一个**样本点**，用 ω 表示. 而全体基本事件(样本点)组成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 Ω(或 S). 对于一个具体的随机试验，根据它的条件与观察的目的，来确定它的基本事件，从而得到它的样本空间，这是研究这个随机试验的第一步. 下面举几个随机试验的例子来分析如何给出它们的基本事件与样本空间.

例 1　掷一枚质地均匀的硬币，观察其正、反面出现的情况.

显然，这个试验只有两个可能的结果，正面向上或反面向上，即是它所有的基本事件. 若令 ω_1＝“正面向上”，ω_2＝“反面向上”，则它的样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 2　观察某网站在单位时间内被点击的次数.

令 i＝“单位时间内被点击 i 次”，$i=0，1，2，\cdots$，则

$$\Omega = \{i \mid i = 0,1,2,\cdots\} = \{0,1,2,\cdots\}.$$

该样本空间包含可数多个样本点.

例 3　测试某工厂生产的灯泡的寿命，即灯泡的使用时间.

令 t＝“灯泡使用了 t 小时”，$0 \leqslant t < +\infty$，

则

$$\Omega=\{t \mid 0 \leqslant t<+\infty\}=[0,+\infty).$$

该样本空间包含无穷多个样本点，且不可数.

由以上 3 个例子可知样本空间可以包含有限个、可数无穷多个、不可数无穷多个样本点.

例 4 从放有红、白、黑三个球的口袋中随机取一球，然后放回，再随机取一个(这种抽取方法称为有放回抽样)，观察其颜色.

所谓"随机取一球"就是将袋内的球平等看待，每一球被取到的可能性相等，而试验的目的只是观察所取球的颜色，所以我们可以得到两个不同的样本空间.

(1)在确定基本事件时，考虑取球的顺序.

若以括号中的第一个字表示第一次抽取球的颜色，第二个字表示第二次抽取球的颜色，则样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega_1=\{&(红，红)，(红，白)，(红，黑)，\\&(白，红)，(白，白)，(白，黑)，\\&(黑，红)，(黑，白)，(黑，黑)\}.\end{aligned}$$

(2)在确定基本事件时，不考虑取球的顺序，则样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega_2=\{&(两红)，(一红一白)，(一红一黑)，\\&(两白)，(一黑一白)，(两黑)\}.\end{aligned}$$

由此例可知：同一个随机试验，由于所给条件或观察目的并无十分确切的要求，因而在确定样本空间时，可从不同的角度去思考，有可能产生多个不同的样本空间. Ω_1 中的样本点的出现是等可能的. 而 Ω_2 中的样本点的出现不是等可能的. 注意到这一点，对今后计算某些事件发生的可能性是有帮助的.

例 5 袋中有 5 件产品，其中有 3 件正品 2 件次品，从中随机取 2 件，观察取到次品的情况.

为了使问题简化，我们不妨给这 5 件产品编上号，1，2 号为次品，3，4，5 号为正品. 所谓随机取 2 件，一方面表示每一个产品被取到的可能性相同，另一方面也说明了抽取的方法，可以一次一起取 2 个，也可以第一次取一个，不放回，然后再取第二个，于是可以给出两个样本空间.

(1)若考虑样品顺序

令(i, j)="第一次取到 i 号产品，第二次取到 j 号产品"，则样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\&(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}.\end{aligned}$$

(2)若不考虑样品顺序

令(i, j)="取到一个 i 号产品和一个 j 号产品"，则样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\&(2,3),(2,4),(2,5),\\&(3,4),(3,5),\\&(4,5)\}.\end{aligned}$$

Ω与Ω'是不同的样本空间，但它们的样本点的出现都是等可能的.

从以上两个例子可以看出，确定一个随机试验的样本空间，与试验的条件及做法是密切相关的，即便条件相同但做法不同，会得到不同的样本空间，采用哪一个样本空间，要依具体问题而定.

例 6 度量人的身高.

如果仅为了体检，一般来说，区间(0，3)中的任意一个实数，都可以是一个基本事件，这时基本事件有无穷多个，即样本空间包含无穷多个样本点.

但是，如果度量高度是为了了解乘车是否需要买全票、半票或免票，这时就只有 3 个基本事件了，即样本空间仅包含 3 个样本点.

总之，确定一个事件是否是基本事件，或者说确定一个随机试验的样本空间，一般要根据实验的做法和目的而定.

二、随机事件

对于任意一个随机试验，我们关心的不仅是它的基本事件发生的可能性，往往是带有某些特征的情况发生的可能性.

例如，在例 4 中我们往往要考虑如下事情发生的可能性：

“第一次取到的是红球 ”；

“第二次取到的是红球 ”；

“两次都取到的是红球 ”.

若分别用字母 A、B、C 表示上面三种情况，只要当基本事件(红，红)，(红，白)，(红，黑)中的任何一个发生，则情况 A 发生. 反之，若情况 A 发生了，则必有基本事件(红，红)，(红，白)，(红，黑)中的某一个发生. 因此，我们可以认为

$$A=\{(\text{红},\text{红}),(\text{红},\text{白}),(\text{红},\text{黑})\},$$

同理可有

$$B=\{(\text{红},\text{红}),(\text{白},\text{红}),(\text{黑},\text{红})\},$$
$$C=\{(\text{红},\text{红})\}.$$

可见，带有某些特征的情况是由具有这些特征的一些基本事件组成的. 我们称这些具有一定特征的基本事件组成的集合为**随机事件**，简称**事件**. 一般用字母 A、B、C …表示.

由此可知：

(1)随机事件是样本空间 Ω 的子集.

(2)随机事件 A 发生的充要条件为 A 中所包含的某一个基本事件发生.

(3)ω 与$\{\omega\}$都表示基本事件，也都是随机事件.

Ω 是 Ω 的子集，所以也可视为随机事件，但因每次试验必有一个基本事件发生，所以 Ω 每次试验必发生，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$是 Ω 的一个子集，也是一个随机事件，但因不含试验的任何基本事件，因此每次试验它都不发生，则称为**不可能事件**. Ω 和$\varnothing$都是特殊的随机事件.

1.2 事件间的关系及运算

一个随机试验可能出现许多随机事件，其中有一些发生的可能性是较容易估计的，有些则

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

不是，而它们之间往往有着各种各样的联系，弄清它们之间的关系，对于计算那些较复杂事件发生的可能性是非常关键的一步. 下面我们就介绍事件之间的一些重要关系和运算.

在以下的叙述中我们假定，随机试验的样本空间为Ω，所涉及的事件都是在同一样本空间中的.

一、事件的包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 含于事件 B，记作$B\supset A$或 $A\subset B$.

例 7　一盒中有十个形状大小完全相同的球，分别标有号码 0，1，…，9，从中随机取一球，观察取出球的号码. 写出其样本空间并研究下列事件间的关系：

A=“取到偶数号球”，B=“取到小于等于 5 号的球”，C=“取到不大于 3 号的球”.

解　设 i=“取到标有 i 号的球”，i=0，1，…，9，则样本空间为

$$\Omega = \{i \mid i = 0,1,2,\cdots,9\} = \{0,1,\cdots,9\};$$

而事件分别为

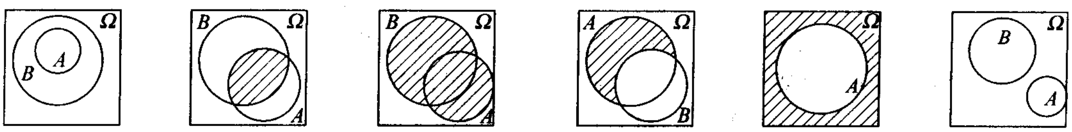
$$A = \{0,2,4,6,8\},\quad B = \{0,1,2,3,4,5\},\quad C = \{0,1,2,3\}.$$

不难看出若事件 C 发生，则事件 B 一定发生，故有 $B\supset C$.

由于事件是由某些基本事件组成的集合，因此有

(1)事件间的包含关系与集合间的包含关系是一致的；

(2)包含关系可用文氏图表示，见图 1-1 中的 $B\supset A$；



$B\supset A$　　$A\cap B$　　$A\cup B$　　$A-B$　　$\bar{A}$　　$A\cap B=\varnothing$

图 1-1　事件间的关系和运算

(3)对任意事件 A 有$\varnothing\subset A$，$A\subset A$，$A\subset\Omega$.

二、事件的相等

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

在例 7 中，设 D=“取到标有能被 2 整除号码的球”，显然有 $A=D$.

三、事件的并(和)

称“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件为事件 A 与事件 B 的并(和)，记作$A\cup B$⊖.

在例 7 中，设 E=“取到标有能被 3 整除号码的球”，即

$$E = \{0,3,6,9\}.$$

因此事件 $D\cup E$ 为“取到标有能被 2 或 3 整除号码的球”，显然有

$$D \cup E = \{0,2,3,4,6,8,9\}.$$

⊖　当 $AB=\varnothing$时，$A\cup B$ 可记为$A+B$.

例 8 某人在求职时，同时在甲、乙两个公司进行了面试.

令 A=“被甲公司录用”；B=“被乙公司录用”；C=“被公司录用”，

则有

$$C = A \cup B.$$

同样有

(1)事件间的并与集合间的并是一致的；

(2)事件间的并可用文氏图表示，见图 1-1 中的 $A\cup B$；

(3)对任意事件 A，B 有 $A\cup A=A$，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$. 若 $A\subset B$，则有 $A\cup B=B$.

四、事件的交(积)

称“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件为事件 A 与事件 B 的交(积)，记作 $A\cap B$ 或 AB.

在例 7 中，$D\cap E$ 表示事件“取到标有既能被 2 整除又能被 3 整除号码的球”，因此，$D\cap E=\{0, 6\}$.

不难看出，事件 $A\cap B$ 是由 A 与 B 中所共有的基本事件组成的集合.

同样有

(1)事件间的交与集合间的交是一致的；

(2)事件间的交可用文氏图表示，见图 1-1 中的 $A\cap B$；

(3)对任意事件 A，B 有 $A\cap A=A$，$A\cap\Omega=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，若 $A\subset B$，则有 $A\cap B=A$.

事件的并与交的推广：

事件并与交的概念可推广到有限个或可列无穷个事件的情形.

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$=“事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”，

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$=“事件 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生”，

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$=“事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生”，

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$=“事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生”.

例 9 观察某网站在单位时间内被点击的次数，若令

A_i=“在单位时间内被点击 i 次”，$i=0, 1, 2, \cdots$，

A=“在单位时间内被点击的次数不大于 3”，

B=“在单位时间内被点击过”，

则

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

五、事件的互不相容(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B 互不相容.

“事件 A 与事件 B 不能同时发生”就是“事件 A 与事件 B 都发生是不可能的”，即 $A\cap B=$

$\varnothing$. 于是事件 A 与 B 互不相容的概念可表示为：若 $A\cap B=\varnothing$，则事件 A 与 B 互不相容.

同样有

(1)事件 A 与 B 互不相容与集合 A 与 B 的交是空集是一致的；

(2)事件互不相容可用文氏图表示，见图 1-1 中的 $A\cap B=\varnothing$.

例 10 设有一批产品共 N 件，其中有 M 件次品($N>M>6$)，从中随机取 6 件，令

A="取到的 6 件中至多有 1 件次品"；

B="取到的 6 件中至少有 5 件次品"；

C="取到的 6 件都是合格品".

问这 3 个事件是否都是两两互不相容？

解 因为事件 A"取到的 6 件产品中至多有 1 件次品"等价于事件"取到的 6 件产品中有 1 件次品或全是合格品"，而事件 C 为"取到的 6 件产品都是合格品"，显然有 $A\supset C$，即 $A\cap C=C$，所以事件 A 与 C 不是互不相容. 而事件 B"取到的 6 件中至少有 5 件次品"，等价于事件"取到的 6 件产品中有 5 件次品或全是次品"，这显然与事件 A"取到的 6 件产品中至多有 1 件次品"或事件 C"取到的 6 件产品都是合格品"是不能同时发生的，故 B 与 A、B 与 C 是互不相容的.

六、事件的差

称"事件 A 发生而 B 不发生"这一事件为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

对任意事件 A 有

$$A-A=\varnothing,\quad A-\varnothing=A.$$

在例 7 中，有 $A-E$="取到标有能被 2 整除而不能被 3 整除号码的球". 显然有

$$A-E=\{2,4,8\}.$$

由 $A=\{0,2,4,6,8\}$ 及 $AE=\{0,6\}$，所以有 $A-E=A-AE$.

一般对任意的事件 A，B 有 $A-B=A-AB$.

七、对立事件

称事件 Ω 与 A 的差 $\Omega-A$ 为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$.

由此可知 A 与 $\overline{A}$ 满足：$A\cup\overline{A}=\Omega$ 且 $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

在例 7 中，若令 F="取到奇数号球"，则

$$F=\overline{A}.$$

注意： *若两事件对立，则此两事件互不相容. 反之，不一定成立.*

图 1-1 表示以上事件间的关系和运算的文氏图.

可以验证一般事件的运算满足如下关系：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3)分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

分配律推广到有穷或可列无穷的情形为：

$$A\cap\left(\bigcup_i A_i\right)=\bigcup_i(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_i A_i\right)=\bigcap_i(A\cup A_i);$$

(4)$A-B=A\cap\bar{B}$；

(5)德莫根(De Morgan)律(对偶原则)：对有穷或可列无穷个 A_i，有

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}.$$

例 11 设 A、B、C 是三个事件，试用 A、B、C 三个事件表示出下列事件，并画出示意图.

(1)只有 A 发生；

(2)只有 A 不发生；

(3)只有一个发生；

(4)都不发生；

(5)不都发生；

(6)至少发生一个.

解 (1)“只有 A 发生”=“A 发生且 B 不发生且 C 不发生”=“A 发生且 $\bar{B}$ 发生且 $\bar{C}$ 发生”=$A\bar{B}\bar{C}$.

(2)“只有 A 不发生”=“A 不发生且 B 发生且 C 发生”=“$\bar{A}$ 发生且 B 发生且 C 发生”=$\bar{A}\,BC$.

(3)“只有一个发生”=“只有 A 发生或只有 B 发生或只有 C 发生”=$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(4)“都不发生”=“A 不发生且 B 不发生且 C 不发生”=“$\bar{A}$ 发生且 $\bar{B}$ 发生且 $\bar{C}$ 发生”=$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(5)“不都发生”=“不可能都发生”=$\overline{ABC}$或“不都发生”=“A、B、C 三者中至少有一个不发生”=$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

(6)“至少发生一个”=“A 发生或 B 发生或 C 发生”=$A\cup B\cup C$.

注意：事件 A、B、C 都不发生与事件 A、B、C 不都发生的区别.

以上结果分别由图 1-2 的 a)—f)中的阴影部分所示.

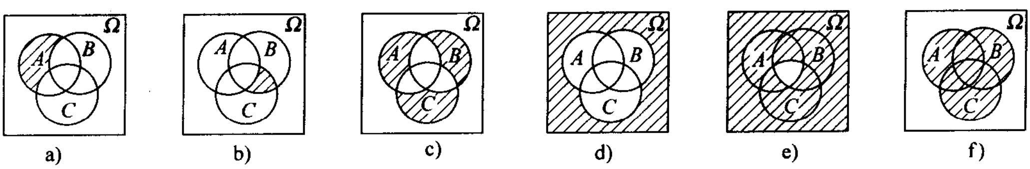


图 1-2 例 11 中各事件的图示

1.3 概率的直观意义及计算

在引言中我们已经介绍了概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的. 对于随机现象我们不仅要知道它可能出现哪些结果，更主要的是要研究各种结果出现可能性的大小.

如果只能大概估计各种事件发生的可能性，这不利于进一步的推断，也不可能得出精确的结论. 因此，就要求有一个刻划事件发生可能性大小的数量指标. 因为在一定的条件下某事件发生的可能性大小是一个客观存在的量，是不以人的主观意志而改变的. 所以，这个指标至少应满足以下两个要求：

(1)具有一定的客观性，且理论上可以通过在“相同条件下”的大量试验予以识别和检验.

(2)符合常情. 例如，事件发生可能性大的，它的值就大；事件发生可能性小的，它的值就小. 必然事件对应的值最大，不可能事件对应的值最小为零.

我们将刻划事件发生可能性大小的数量指标称为事件的概率. 事件 A 的概率记作 $P(A)$，并规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

在概率论的发展史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了概率的定义和计算概率的各种方法，然而作为概率的定义都存在一定的问题，现在看来它们只能算作一些计算概率的方法. 但这些方法确实能够计算出一些在给定条件进行试验的事件的概率，而且对于给出概率的公理化定义奠定了基础. 下面就介绍这些方法.

一、统计概率

在引言中我们已经提到了频率的稳定性，下面我们给出两个例子，进一步说明这个问题.

例 12 历史上掷硬币试验，结果如下：

表 1-1

试验者	抛掷次数(n)	正面出现次数(m)	正面出现的频率(%)
德莫根(DeMorgan)	2048	1061	51.8
蒲丰 (Buffon)	4040	2048	50.69
皮尔逊 (Pearson)	12000	6019	50.16
皮尔逊(Pearson)	24000	12012	50.05
维尼	30000	14994	49.98

由这些试验可见，正面出现的频率随试验次数的增加而明显地在 0.5 左右摆动.

例 13 表 1-2 是某国官方 1935 年新生婴儿的统计资料.

表 1-2

月份	婴儿总数	女婴总数	$\dfrac{\text{女婴总数}}{\text{婴儿总数}}$
1	7280	3537	0.4858
2	14237	6944	0.4877
3	22120	10810	0.4887
4	30004	14521	0.4893
5	37896	18296	0.4828
6	45505	21961	0.4826
7	53090	25582	0.4819
8	60483	29178	0.4824
9	67868	32669	0.4827
10	74589	36060	0.4834
11	81141	39220	0.4834
12	88273	42591	0.4825

从这个材料又一次看到随着婴儿数的增加，女婴出生的频率愈来愈明显地在 0.482 左右摆动.

从上面两个例子可以看到：当我们考虑事件 A 发生的可能性大小时，只要在相同条件下作大量的重复试验，事件 A 发生的频率呈现某种稳定趋势. 一般说来，随着试验次数的增加，

事件 A 发生的频率愈来愈稳定于某一定值. 频率具有稳定性这一事实，说明了采用数量指标来刻划事件发生的可能性大小是可能的，即概率的存在具有一定的客观性.

在实际中，人们往往是用试验次数足够大时事件 A 出现的频率作为事件 A 发生的概率.

设在相同条件下进行了 n 次试验(n 足够大)，其中事件 A 发生了 m 次，则事件 A 发生的频率 $f(A)$ 定义为

$$f(A)=\frac{m}{n} \tag{1.3.1}$$

我们用 $f(A)$ 作为事件 A 发生的概率，这样计算的概率称为**统计概率**.

按照这样的定义，例 9 中"正面向上"发生的概率为 0.5，例 10 中"女婴出生"的概率为 0.482.

可以验证，统计概率满足如下性质：

性质 1

(1) $0\leqslant f(A)\leqslant 1$；

(2) $f(\Omega)=1$，$f(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，则

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f(A_i)$$

显然统计概率有它理论上和应用上的缺陷. 试验次数 n 到底取多大才算足够大？一方面我们不能保证取试验次数为 $n+1$ 时计算的频率，总会比取试验次数为 n 时计算的频率更接近于客观的概率值；另一方面，有许多试验不可能在相同条件下重复很多次，如地震，SARS 疫情等.

二、古典概率

有一些随机试验具备如下特点：

(1) 具有有限个基本事件；

(2) 每个基本事件的出现是等可能的.

那么称此随机试验所对应的概率模型为古典型随机试验，简称古典概型.

不难看出例 1 和例 4 中的(1)都是古典概型，而例 4 中的(2)就不是古典概型，因为它的基本事件的出现不是等可能的.

对于一个试验所对应的概率模型是否是古典概型，只需检验它是否满足以上两点. 第一点的有限个基本事件很容易判断，而对第二点每个基本事件的出现是不是等可能的，往往要根据所研究对象的物理或几何性质所具有的对称性及抽取方式的随机性来判断. 例如，任意抛掷一枚质地均匀硬币的试验，如果硬币的质地均匀，形状对称，再加上抛掷的任意性，我们可以认为两个基本事件"正面向上"和"反面向上"出现的可能性都是 0.5. 再如，有 50 张签分别标有 1，2，…，50，某人从中任意抽取一张，由于抽取方式的任意性，可以认为他抽得各号签的可能性是相等的. 再如，观察一个质点在液体中的运动，如果液体的密度是均匀的，那么，就可以认为质点朝各个方向运动的可能性是相等的.

对于古典概型中的随机事件是按如下方法来计算其发生的概率的.

设随机试验 E 为古典概型，基本事件的总数为 n，事件 A 含有 $m(m\leqslant n)$ 个基本事件，则

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com