学海

XUE HAI

学海导航

高中教学同步辅导

GAOZHONGJIAOXUETONGBUFUDAO

高三(Ⅱ)

数学

教师用书

主编　陈兴祥

海南出版社

学海 XUE HAI

学海导航

高中教学同步辅导

GAOZHONGJIAOXUETONGBUFUDAO

高三（Ⅱ）

教 师 用 书

数学

主 编 陈兴祥

编 委 周 灏 向良辉 丁岳龙

海南出版社

图书在版编目（CIP）数据

学海导航·高中教学同步辅导. 高三数学 / 陈兴祥主编
—海口：海南出版社，2002.12
教师用书
ISBN7-5443-0599-6

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学课—教师用书（教育）—高中 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 090477 号

学海导航·高中教学同步辅导
教师用书·数 学（高三Ⅱ）

主　　编　陈兴祥
责任编辑　崔修彬
海南出版社　出版发行
海口市金盘开发区建设三横路 2 号
邮编：570216
湘潭市风帆印务有限公司印刷
各地新华书店经销
2004 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
开本：850×1168　1/16　印张：62　字数：178 万
ISBN 7-5443-0599-6/G·228
定价：80.00 元

前 言

为了帮助高中学生在教师有计划有步骤的指导下，有效地学习数学知识，培养学科能力，提高综合素质，达到知识与能力同步发展，技能与素质同步形成的目的，我们成立了“课程改革与能力发展”课题组，并进行了深入的研究，取得了丰硕的成果，2001年此课题被列入国家级教研课题，并于2004年5月被中国教育学会教育实验研究会评为教改成果二等奖。这一课题着眼于学生的能力发展和素质的提高，全面发展学生的个性，从教与学两方面对教学过程展开研究，既研究教师的教，又研究学生的学，从而使教与学达到最佳的结合，取得最优的效果。本书就是这一国家级课题的子课题“四环递进教学法”的重要成果之一，是高三年级新课教学时进行“四环递进教学法”与“四环一步学习法”进行实验的重要载体，与高中《全日制普通高级中学教科书数学（选修Ⅱ）》配合使用。

本书与现行高三新教材完全同步，按课时进行编写，每课时都围绕一个中心，突出一个重点，解决与中心相关的几个重点问题，包括**【学习目标】**、**【学习导航】**、**【目标训练】**、**【达标练习】**等内容。

【学习目标】根据大纲要求，指出本节学习研究的重点内容和通过教学要达到的目标层次。

【学习导航】主要是进行知识梳理，建构知识网络，使知识系统化，条理化，可作为学生课外阅读。

【目标训练】是课堂教学的主体，是编者精心设计的供学生进行自学练习和教师进行针对讲评的主要材料，一般安排二至三个层次，要通过自学练习、反馈辅导、评议归纳等环节，分层实施，从而达到掌握知识、培养能力的目标。

【达标练习】是为加深和巩固本节内容而精心设计的，分“知识与基础”、“能力与技巧”、“发散与创新”三个层次，可作为学生课后练习和检测使用。

本书分教师用书和学生用书，教师用书充分体现了“四环递进教学法”的基本操作程序。所谓“四环”是指将动态的教学过程提炼为“提出问题、自学练习、反馈辅导、评议小结”四个基本环节。“递进”就是课堂教学中的问题和练习设计要有层次性，要由易到难、由浅入深、由单一到综合，逐步深化、逐层推进。其基本的操作程序为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{第一层次}\\ \quad\text{提出问题（教师）}\left\{\begin{array}{l}\text{自学练习（学生）}\\ \text{反馈辅导（教师）}\end{array}\right\}\text{评议小结（师生）}\\ \text{第二层次}\\ \quad\text{提出问题（教师）}\left\{\begin{array}{l}\text{自学练习（学生）}\\ \text{反馈辅导（教师）}\end{array}\right\}\text{评议小结（师生）}\\ \text{第三层次}\\ \cdots\cdots\end{array}\right|\text{课堂小结（师生）}$$

前言

“四环递进教学法”的特点：一是“先练后讲”，即学生先通过看书自学尝试练习，独立地分析、思考和解决问题，然后教师再根据反馈信息有针对性地进行评议小结，不主张“先讲后练”，反对一讲到底和一练到底，要练讲结合，交替进行。二是“分层递进”，即分层组织练习，一层练习中的四个环节进行完成后再进行下一个层次的练习。这样保证了学生有充分练习的时间和思考的空间，能有效地调节学习过程，有利于发挥学生的主体作用，培养学生的自学能力、分析问题和解决问题的能力。

学生用书有利于学生按“四环一步学习法”进行学习，所谓“四环”是指“预习——上课——整理——作业”这四个基本环节，“一步”是指完成一个小单元或一章后进行“总结”。学生用书中各层练习的解答过程和小结的内容都没有具体给出，目的是让学生根据自己的情况适当预习，掌握学习的主动权，同时有利于在听课时边听边想，积极思维，其中小结部分可以简要地记录课堂上师生共同评议的有关带规律性的结论，也可课后整理时进行完善，达标练习难度适宜，题量适量，通过练习和作业能有效地巩固本节课所学内容，达到目标要求。

每章根据教学要求配了一套单元训练题，目的是学完一单元内容及时地进行回顾和总结，以便让学生掌握数学知识的本质和系统，形成良好的认知结构，全面提高能力。

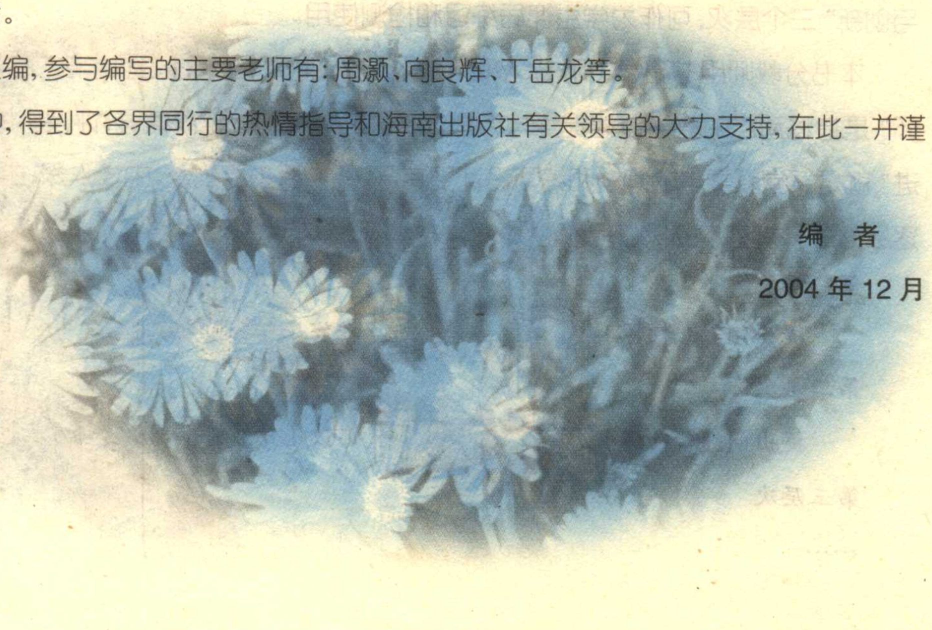
本书是课题组成员边实验边修改而形成的，取得了很好的实验效果。在成书的过程中，编者们本着认真负责的态度，题题推敲，层层把关，力求以最优的教研成果奉献给广大读者。但书中也难免有纰漏之处，我们真诚地希望广大师生批评指正。读者如有意见、建议，请与《学海导航》策划部联系，以便我们在再版时修订参考。

本书由陈兴祥任主编，参与编写的主要老师有：周灏、向良辉、丁岳龙等。

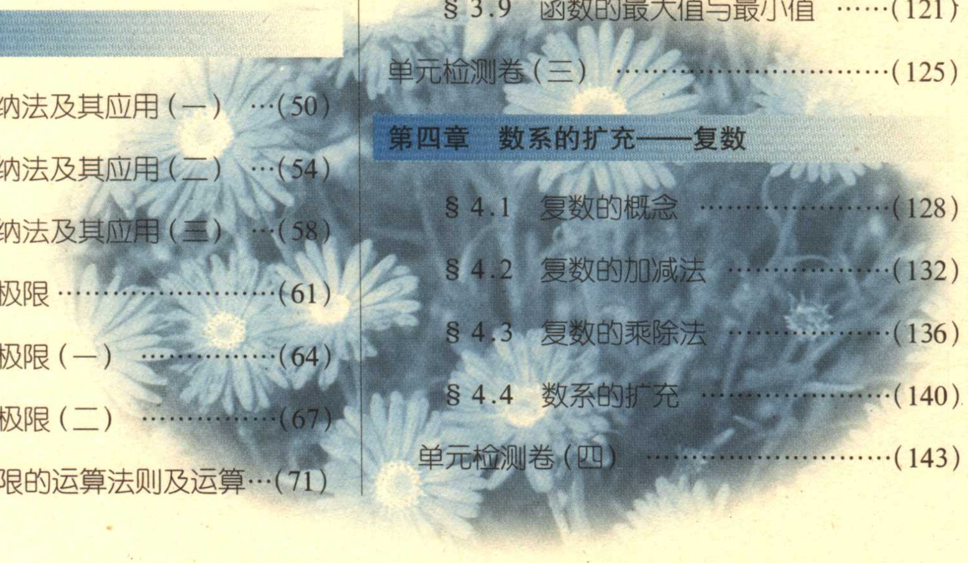
本书在编写过程中，得到了各界同行的热情指导和海南出版社有关领导的大力支持，在此一并谨致谢忱。

编　者

2004 年 12 月



目 录



第一章　概率与统计

§1.1　离散型随机变量

学习目标　[P_1]

注：“P_n”表示该栏目在学生用书中相对应的页码

了解随机变量、离散型随机变量的意义，知道随机变量的可能取值与随机试验的结果之间的关系，会根据实际问题用随机变量正确表示某些随机试验的结果与随机事件.

学习导航　[P_1]

1. 随机变量是概率与统计中的基本概念，由于随机变量的引入，我们可以用变量来刻划随机试验的结果以及随机事件，以便更好地利用数学工具对随机现象进行研究.

2. 正确理解随机事件、随机试验、随机变量等概念的联系与区别，随机试验的每种可能出现的结果就是一个随机事件，而把这些随机试验的结果用随机变量来表示，实质上是人为的约定的数值对应关系.

3. 随机变量分离散型与连续型，本节重点是掌握离散型随机变量的意义，确定简单的离散型随机变量的可能取值与随机试验的结果之间的关系，并初步掌握离散型变量的可能取值及相应的概率计算，掌握具有确定函数关系的两个随机变量对应的概率值相等.

目标训练　[P_1]

一层练习　☞ 知识形成

1. 分析下列的随机试验可能出现哪些结果？这些结果在试验前能否确定？不同的试验中是否相同？

(1)某人射击一次，命中的环数；

(2)某次产品检验，在可能含有次品的100件产品中任意抽取4件，含有的次品数.

分析：(1)某人射击一次，可能出现的结果是命中0环，1环，…，10环这11种结果，每一种结果在试验前是无法预先确定的，在不同的随机试验中，结果可能有变化.

(2)可能出现的次品是0件、1件、2件、3件、4件，同样每一种结果在试验前是无法预先确定的，在不同的随机试验中，结果可能有变化.

☆ 小　结 ☆

1°如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量. 随机变量常用希腊字母 ξ、η 等表示.

2°对于随机变量可能取的值，我们可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.

二层练习　☞ 知识迁移

2. 写出下列各随机变量可能的取值，并说明随机变量所取的值所表示的随机试验的结果：

(1)一个袋中装有5个同样大小的白球，编号为1，2，3，4，5. 现从该袋中取出3只球，被取出的球的最大号码数 ξ；

(2)接连不断地射击，首次命中目标需要的射击次数 η.

解：(1)ξ 可取3，4，5.

$\xi=3$，表示取出的3个球的编号为1，2，3；

$\xi=4$，表示取出的3个球的编号为1，2，4或1，3，4或2，3，4；

$\xi=5$，表示取出的3个球的编号为1，2，5或1，3，5或1，4，5或2，3，5或2，4，5或3，4，5.

(2) η 可取1，2，3，…，$\eta=i$，表示前 $i-1$ 次射击未命中目标，第 i 次命中目标.

3. 抛掷两枚骰子各一次，记第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数的差为 ξ，则 $\xi>4$ 表示的试验结果为 （C）

A. 第一枚为5点，第二枚为1点

B. 第一枚大于4点，第二枚也大于4点

C. 第一枚为6点，第二枚为1点

D. 第一枚为4点，第二枚为1点

解：因为一枚骰子的点数为1，2，3，4，5，6六种结果之一，

由已知得 $-5\leqslant\xi\leqslant5$，

也就是说“$\xi>4$”就是“$\xi=5$”.

所以，“$\xi>4$”表示第一枚为6点，第二枚为1点，

故应选C.

☆ 小 结 ☆

随机变量的每一取值均表示随机试验的某一随机事件. 确定随机变量的取值及其表示的随机试验的结果关键在于分类，在讨论中要注意防止遗漏或重复. 在问题的思考中要考虑随机变量的实际意义.

三层练习 ☞ 综合运用

4. 讨论：

(1) 任意抛掷一枚硬币，可能出现正面向上、反面向上这两种结果，这个试验的结果可不可以用数量来表示？

(2) 若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi+b$，其中 a，b 是常数，则 η 是不是随机变量？

分析：(1) 这个试验的结果不具有数量的性质，但仍可以用数量来表示它. 用变量 ξ 来表示这个随机试验的结果：

$\xi=0$，表示正面向上；$\xi=1$，表示反面向上.

(2) 若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi+b$，其中 a，b 是常数，则 η 也是随机变量.

5. 已知箱子中有标有1，1，2，2，2，2，3，3，4，5数字的10个球，现从中取出一个球，记取到的球的数字为 ξ，现若 $\eta=3\xi-1$，试写出 η 的所有的可能的值及取各值的概率.

解：因为 ξ 的取值为1，2，3，4，5

而 $\eta=3\xi-1$，

因此 η 的可能取值为2，5，8，11，14，

且有 $P(\eta=2)=P(\xi=1)=\dfrac{1}{5}$，

$$P(\eta=5)=P(\xi=2)=\frac{2}{5},$$

$$P(\eta=8)=P(\xi=3)=\frac{1}{5},$$

$$P(\eta=11)=P(\xi=4)=\frac{1}{10},$$

$$P(\eta=14)=P(\xi=5)=\frac{1}{10}.$$

☆ 小 结 ☆

1°随机变量强调随机试验的结果具有数量性质，实质是一种人为的约定的数值对应关系，但如果试验的可能结果是明确的，并且不止一个，也可以用数量来表示它.

2°若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi+b$，其中 a，b 是常数，则 η 也是随机变量. 一般地，若 ξ 是随机变量，$f(x)$ 是连续函数，则 $f(\xi)$ 也是随机变量，如 $\eta=\xi^2$ 等也是随机变量. 但在高中阶段中一般研究具有线性关系的随机变量问题.

3°随机变量与以前学过的变量的区别与联系：随机变量作为一个变量，当然有它的取值范围，这和以前学过的变量一样，不仅如此，还有它取每个值的可能性的大小.

达标练习 [P_2]

知识与基础

1. 6件产品中有2件次品，从中任取1件，则下列是随机变量的为 （B）

A. 取到产品的个数　B. 取到正品的个数

C. 取到正品的概率　D. 取到次品的概率

2. 有下列问题：

①某路口一天经过的车辆数为 ξ；

②某无线寻呼台一天内收到寻呼的次数为 ξ；

③一天之内温度为 ξ；

④某人一生中的身高为 ξ；

⑤射击运动员对某目标进行射击，击中目标得 1 分，未中目标得 0 分，用 ξ 表示运动员在射击中的得分.

上述问题中 ξ 为离散型随机变量的是　　　（ D ）

A. ①②③⑤　　　B. ①②③

C. ①　　　D. ①②⑤

3. 下列四个命题：

①当随机变量的结果不具有数量性质时，这种试验结果不可以用随机变量表示；

②由于随机变量事件发生与否无法预先确定，所以随机变量没有确定的定义域；

③随机变量的每个值都表示相应的一个随机试验的结果；

④随机变量的值大于 0 而且小于 1.

其中正确的命题个数是　　　（ A ）

A. 1个　　　B. 2个

C. 3个　　　D. 4个

4. 袋中有 8 个红球，7 个白球，5 个黑球，从中任取 3 个球，其中含黑球的个数为 ξ，则 ξ 的所有可能的取值为 ＿0,1,2,3＿，其中 $\xi=1$ 表示＿恰好取到一个黑球＿，$P(\xi=3)=$ ＿$\frac{1}{114}$＿.

能力与技巧

5. 某学校为学生定做校服，规定凡身高不超过 1.60 m 的学生交校服费 80 元；凡身高超过 1.60 m 的学生，身高每超过 1 cm 多交 5 元(不足 1 cm 时按 1 cm 计). 若学生应交校服费为 ξ，学生身高用 η 表示，由 ξ 与 η 之间的关系式为 $\xi=\begin{cases}80, & \eta\leqslant 1.60,\\(\eta-160)\times 5+80, & \eta>1.60\end{cases}$.

6. 写出下列各随机变量的可能取值，并说明随机变量所表示的随机试验的结果.

(1)某学校暑假去北京旅游，可能乘汽车、火车，也可能乘飞机，其旅费分别为 60 元、100 元和 600 元，他的旅费为 ξ；

(2)随意抛掷骰子两次，所得的点数之和 ξ.

解：(1) ξ 的可能取值为 $\xi=60$，$\xi=100$，$\xi=600$，分别表示所花的旅费为 60 元，100 元和 600 元.

(2) ξ 可能取值为 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12，分别表示所掷点数为 1,1；1,2 或 2,1；1,3 或 3,1 或 2,2；…；6,6.

发散与创新

7. 设某同学在某段时间内能成功登录中国教育网数学网站的概率为 $\frac{3}{5}$，设在该段时间内此同学到成功登录该网站为止的次数为 ξ.

(1)写出 ξ 的取值集合；

(2)计算 $P(\xi=3)$ 及 $P(\xi\leqslant 2)$.

解：(1) ξ 的取值集合为 $\{1,2,3,4,\cdots\}$.

(2) $\xi=3$ 表示前两次登录失败而第三次成功，因此

$P(\xi=3)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{125}$.

而 $\xi\leqslant 2$ 表示 $\xi=1$(即第一次登录成功了)或 $\xi=2$(即第一次登录失败而第二次登录成功)，因此 $\xi=1$ 和 $\xi=2$ 表示的两个事件是互斥事件，因此

$P(\xi\leqslant 2)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{25}$.

教学后记 ☞ 反思提高

§1.2 离散型随机变量的分布列

学习目标 [P₄]

掌握随机变量取值的概率计算,会求简单的离散型随机变量的分布列,掌握离散型随机变量的分布列的两个性质,理解二项分布及几何分布等概念,并会用它们解决有关问题.

学习导航 [P₄]

1.本节课主要研究随机变量取值的概率计算,离散型随机变量的概率分布的求法,着重研究二项分布及几何分布的分布列.

2.离散型随机变量 ξ 所有可能的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$,$\xi$ 取每一个值 x_i 的概率为 $P(\xi=x_i)=p_i$,因此,任一离散型随机变量 ξ 的分布列具有下述性质:(1)$p_i\geqslant 0,i=1,2,3\cdots$;(2)$p_1+p_2+\cdots=1$.

3.离散型随机变量 ξ 取到的各个值是彼此互斥的事件.因此,离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

4.二项分布和几何分布是两种常见的离散型随机变量的分布,二项分布是指 $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$(其中 $q=1-p$,$k=0,1,\cdots,n$),记为 $\xi\sim B(n,p)$;几何分布记为 $g(k,p)=q^{k-1}p$(其中 $q=1-p,k=1,2,3,\cdots$).

5.等可能性事件、互斥事件、相互独立事件的概率计算是学习本节内容的基础,学习时必须注意复习相关内容.

目标训练 [P₄]

一层练习 ☞ 知识形成

1.抛掷一个骰子,设得到的点数为 ξ.

(1)ξ 可能取的值有哪些?

(2)试求 ξ 取各个值所对应的概率,并填入下列表格中:

ξ						
P						

解:(1)ξ 可能取的值有 1,2,3,4,5,6.

(2)ξ 取各个值所对应的概率都等于 $\frac{1}{6}$,故可得到下表:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.在一次随机试验中,某事件可能发生也可能不发生,在 n 次独立重复试验中,这个事件发生的次数为 ξ,如果在一次试验中,某事件发生的概率为 p.

(1)在 n 次独立重复试验中,这个事件恰有 k 次发生的概率 $P(\xi=k)=$________;

(2)填写下列表格:

ξ	0	1	…	k	…	n
P						

解:(1)在 n 次独立重复试验中,这个事件恰有 k 次发生的概率 $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$,其中 $k=0,1,2,\cdots,n$,$q=1-p$.

(2)

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

[上述表中指出了随机变量ξ可能取的值，以及ξ取这些值的概率，此表从概率的角度指出了随机变量在随机试验中取值的分布状况，称为随机变量ξ的概率分布．下面再引入概率分布以及二项分布等．]

☆小　结☆

1°随机变量ξ的概率分布：一般地，设离散型随机变量ξ可能取的值为$x_1,x_2,\cdots x_i,\cdots$，ξ取每一个值$x_i(i=1,2,\cdots)$的概率$P(\xi=x_i)=p_i$，则称表

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

为随机变量ξ的概率分布，简称为ξ的分布列．

2°分布列具有的两个性质：

(1)$p_i\geq 0,i=1,2,\cdots$；

(2)$p_1+p_2+\cdots=1$．

3°二项分布：如果随机变量可能取值为0，1，2，…，n，且ξ取值k的概率$P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$，$(k=0,1,2,\cdots,n,q=1-p)$，其概率分布为

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

则称ξ服从二项分布，记作$\xi\sim B(n,p)$，其中n,p为参数．并记$C_n^kp^kq^{n-k}=b(k;n,p)$．

说明：(1)随机变量中的表示与概率中的表示：$P(\xi=k)=b(k;n,p)=C_n^kp^kq^{n-k}=P_n(k)$．

(2)字母的意义：n——独立重复试验的次数；p——一次试验中某事件A发生的概率；k——n次试验中，此事件发生的次数；$q=1-p$．

二层练习 ☞ 知识迁移

3．(课本第6页例1)某一射手射击所得环数ξ的分布列如下：

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

求此射手“射击一次命中环数≥7”的概率．

分析：“射击一次命中环数≥7”是指互斥事件“ξ=7”“ξ=8”“ξ=9”“ξ=10”的和，根据互斥事件的概率加法公式，可以求得此射手“射击一次命中环数≥7”的概率．

解：根据射手射击所得环数ξ的概率分布，有

$P(\xi=7)=0.09,P(\xi=8)=0.28,$

$P(\xi=9)=0.29,P(\xi=10)=0.22.$

所求的概率为：

$P(\xi\geq 7)=0.09+0.28+0.29+0.22=0.88.$

4．在独立重复试验中，某事件在第一次发生时所作试验的次数ξ也是一个取值为正数的离散型随机变量．“$\xi=k$”表示在第k次独立重复试验时事件第一次发生．如果在一次试验中，事件发生的概率为p，试求随机变量ξ的概率分布．

解：把第k次试验时事件A发生记为A_k，事件A不发生记为$\overline{A_k}$，则$P(A_k)=p,P(\overline{A_k})=q(q=1-p)$，那么

$$P(\xi=k)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)$$

$$=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k)$$

$$=q^{k-1}p.(k=1,2,3,\cdots)$$

于是得到随机变量ξ的概率分布为

ξ	1	2	3	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

☆小　结☆

1°离散型随机变量的分布列不仅能清楚地反映其所取的一切可能的值，而且能清楚地反映取每一个值的概率的大小，从而反映了随机变量在随机试验中取值的分布状况，是进一步研究随机试验数量特征的基础．

2°在离散型随机变量的分布中，ξ 取得各值表示的事件之间是互斥的.因此，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和，一般地有：

$$P(\xi=x_1 \text{ 或 } \xi=x_2)=P(\xi=x_1)+P(\xi=x_2),$$

$$P(x_1<\xi<x_2)=P(\xi<x_2)-P(\xi\leqslant x_1).$$

3°几何分布：在独立重复试验中，某事件在第一次发生时所作试验的次数 ξ 也是一个取值为正数的离散型随机变量."$\xi=k$"表示在第 k 次独立重复试验时事件第一次发生.则 ξ 的概率分布为

ξ	1	2	3	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

称 ξ 服从几何分布，并记为 $g(k,p)=q^{k-1}p$，其中 $q=1-p$，$k=1,2,3,\cdots$.

二层练习 ☞ 综合运用

5.(课本第 7 页例 2)某人每次射击击中目标的概率是0.2，射击中每次射击的结果是相互独立的，求他在 10 次射击中击中目标的次数不超过 5 次的概率(精确到 0.01).

解：设在这 10 次射击中击中目标的次数为 ξ，

则 $\xi\sim B(10,0.2)$.

$$P(\xi\leqslant5)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+\cdots+P(\xi=5)$$

$$=C_{10}^{0}\times0.8^{10}+C_{10}^{1}\times0.2\times0.8^{9}+\cdots+C_{10}^{5}\times0.2^{5}\times0.8^{5}$$

$$\approx0.99$$

答：他在 10 次射击中击中目标的次数不超过 5 次的概率为 0.99.

6.(课本第 8 页例 3)某人每次投篮投中的概率为 0.1，各次投篮的结果互相独立.求他首次投篮投中时投篮次数的分布列，以及他在 5 次内投中的概率(精确到 0.01).

解：设他首次投中时投篮次数为 ξ，则 ξ 服从几何分布，其中 $p=0.1$.ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	…	k	…
P	0.1	0.09	0.081	…	$0.9^{k-1}\times0.1$	…

他在 5 次内投中的概率是

$$P(\xi\leqslant5)=P(\text{“}\xi=1\text{”，或“}\xi=2\text{”，或“}\xi=3\text{”，或“}\xi=4\text{”，或“}\xi=5\text{”})$$

$$=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)+P(\xi=5)$$

$$=0.1+0.09+0.081+0.0729+0.06561$$

$$\approx0.41$$

答：他在 5 次内投中的概率为 0.41.

7.一批零件中有 9 个合格品，3 个次品，安装机器时，从这批零件中随机抽取，取出的是次品则不放回，继续再取一个零件，直到取得合格品为止，试求在取到合格品之前取到次品数 ξ 的概率分布.

分析：本题实际是求取出次品 0 次，1 次，2 次，3 次的概率，情况各异，应分别讨论.

解：(1)当次品数为 0 个时，则第一次就取到合格品，

$$\therefore P(\xi=0)=\frac{C_9^1}{C_{12}^1}=\frac{3}{4};$$

(2)当次品数为 1 个时，则第一次取到次品，第二次取到合格品，

$$\therefore P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_9^1}{C_{12}^1C_{11}^1}=\frac{9}{44};$$

(3)当次品数为 2 个时，则第一次和第二次取到次品，第三次取到合格品，

$$\therefore P(\xi=2)=\frac{C_3^1C_2^1C_9^1}{C_{12}^1C_{11}^1C_{10}^1}=\frac{9}{220};$$

(4)当次品数为 3 个时，则第一次、第二次、第三次均取到次品，第四次取到合格品，

$$\therefore P(\xi=3)=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1C_9^1}{C_{12}^1C_{11}^1C_{10}^1C_9^1}=\frac{1}{220}.$$

所以在取到合格品之前已取出次品 ξ 的概率分布为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

☆小 结☆。

1°二项分布和几何分布是两种常见的分布，解与之相关问题时，首先要注意类型的识别（是不是独立重复试验），其次再利用在 n 次独立重复试验中，这个事件恰有 k 次发生的概率 $P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$ 公式，或几何分布的概率公式 $g(k,p)=q^{k-1}p$.

2°一般地，求离散型随机变量的概率分布可采用如下步骤：

(1)找出随机变量 ξ 的所有可能的取值(x_i, $i=1,2,\cdots$)；

(2)求出各取值的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$；

(3)列成表格.

注意：求各取值的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$ 时，常常需要综合运用排列、组合、概率等知识和方法，要注意这些知识的巩固与复习.

达标练习 [P₅]

知识与基础

1.下面四张表格中，可以作为离散型随机变量分布列的是 （ B ）

A.

ξ_1	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

B.

ξ_2	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

C.

ξ_3	0	1	2
P	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

D.

ξ_4	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

2.命题：

①离散型随机变量的每一个值都是非负数；

②离散型随机变量取各值的概率不可能是负数；

③离散型随机变量的概率分布中所有的变量所对应的概率值的和必为1；

④若随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=x_k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2,\cdots,n$.

则 $\xi\sim B(n,p)$.其中不正确的命题个数为 （ A ）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D.4个

3.若 $P(\xi\leqslant x_2)=1-\beta$, $P(\xi\geqslant x_1)=1-\alpha$，其中 $x_1<x_2$，则 $P(x_1\leqslant\xi\leqslant x_2)$等于 （ B ）

A. $(1-\alpha)(1-\beta)$　　B. $1-(\alpha+\beta)$

C. $1-\alpha(1-\beta)$　　D. $1-\beta(1-\alpha)$

4.设随机变量 $\xi\sim B(4,\frac{1}{3})$，则 $P(\xi=2)=$ $\underline{\frac{8}{27}}$.

能力与技巧

5.设随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.1	0.2	0.2	0.1

则 $P(\xi<2)=$ $\underline{0.4}$ ，$P(3<\xi\leqslant5)=$ $\underline{0.3}$.

6.袋中有8个白球，2个黑球，从中随机地连续取3次球，每次取1个，求：

(1)不放回抽样时，取到黑球的个数 ξ 的分布列；

(2)放回抽样时，取到黑球的个数 η 的分布列.

解：(1)不放回抽样时，取到的黑球数 ξ 可能的取值为0,1,2，且有：

$$P(\xi=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},\quad P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15},$$

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2)放回抽样时，取到黑球数 η 可能的取值为 0,1,2,3. 又由于每次取到黑球的概率均为 $\frac{1}{5}$，3 次取球可以看成 3 次独立重复试验，因此，η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

发散与创新

7. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=\frac{k}{5})=ak(k=1,2,3,4,5)$.

(1)求常数 a 的值；

(2)求 $P(\xi\geqslant\frac{3}{5})$；

(3)求 $P(\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10})$.

解：题目给定的分布列为：

ξ	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
P	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$

(1)由 $a+2a+3a+4a+5a=1$，

得 $a=\frac{1}{15}$，

(2)$P(\xi\geqslant\frac{3}{5})=P(\xi=\frac{3}{5})+P(\xi=\frac{4}{5})+P(\xi=\frac{5}{5})$

$=\frac{4}{5}$.

或 $P(\xi\geqslant\frac{3}{5})=1-P(\xi\leqslant\frac{2}{5})=1-(\frac{1}{15}+\frac{2}{15})=\frac{4}{5}$.

(3)因为 $\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10}$，只有 $\xi=\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}$ 满足，

故 $P(\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10})=P(\xi=\frac{1}{5})+P(\xi=\frac{2}{5})+P(\xi=\frac{3}{5})=\frac{2}{5}$.

教学后记 ☞ 反思提高

§1.3　离散型随机变量的期望

学习目标　[P_7]

了解离散型随机变量的期望的意义，会根据离散型随机变量的分布列求出期望，掌握公式“$E(a\xi+b)=aE\xi+b$”以及二项分布的期望，能熟练地应用它们求相应的离散型随机变量的期望.

学习导航　[P_7]

1.本节主要学习离散型随机变量的期望的概念及求法.离散型随机变量的期望是随机变量的一种重要的特征数，它反映了随机变量的平均取值.

2.对随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

期望 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$.

若随机变量 $\eta=a\xi+b$，则有 $E\xi=aE\xi+b$.

若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$.

3.对离散型随机变量的期望应注意：

第一，期望是算术平均值的推广，是概率意义下的平均.

第二，$E\xi$ 是一个实数，由 ξ 的分布唯一确定，即作为随机变量 ξ 是可变的，可取不同的值，而 $E\xi$ 是不变的，它描述 ξ 取值的平均状态.

目标训练　[P_7]

一层练习　☞ 知识形成

1.什么是随机变量的概率分布？若 $\eta=a\xi+b$，且 $P(\xi=x_i)=p_i,(i=1,2,\cdots)$，试写出 η 的概率分布.

解：设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$，$\xi$ 取每一个值 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$. 则称表

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

为随机变量 ξ 的概率分布，简称为 ξ 的分布列.

因为 $P(\eta=ax_i+b)=P(\xi=x_i)=p_i$，

所以，η 的概率分布为：

ξ	ax_1+b	ax_2+b	ax_3+b	…	ax_i+b	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_i	…

2.已知某一射手射击所得环数 ξ 的分布列如下：

ξ	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

试根据上述分布列估计这名选手 n 次射击的平均环数.

分析：根据这个射手射击所得环数 ξ 的分布列，在 n 次射击中，预计大约

$P(\xi=4)\times n=0.02n$　次得 4 环，

$P(\xi=5)\times n=0.04n$　次得 5 环，

……

$P(\xi=10)\times n=0.22n$　次得 10 环.

所以 n 次射击的总环数约等于

$4\times0.02\times n+5\times0.04\times n+\cdots+10\times0.22\times n$

$=(4\times0.02+5\times0.04+\cdots+10\times0.22)\times n$，

从而，n 次射击的平均环数约等于

$4\times0.02+5\times0.04+\cdots+10\times0.22=8.32$.

☆小　结☆

1°数学期望：若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期

望或平均数、均值，数学期望又简称为期望.

期望反映了离散型随机变量取值的平均水平.(如多名射手中选拔一名参赛，我们可以根据他们各自射击的数学期望作为选拔的一项重要指标).

2°数学期望的性质：$E(a\xi+b)=aE\xi+b$（请同学们自行证明）.

二层练习 ☞ 知识迁移

3.（课本第11页例1）篮球运动员在比赛中每次罚球命中得1分，罚不中得0分.已知某运动员罚球命中的概率为0.7，求他罚球1次的得分ξ的期望.

解：因为 $P(\xi=1)=0.7, P(\xi=0)=0.3$，

所以 $E\xi=1\times P(\xi=1)+0\times P(\xi=0)$

$=1\times0.7+0\times0.3=0.7.$

4.若$\xi\sim B(n,p)$，证明：$E\xi=np$.

证明：因为 $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，

$$\begin{aligned}\text{所以 } E\xi&=0\times C_n^0p^0q^n+1\times C_n^1p^1q^{n-1}+2\times C_n^2p^2q^{n-2}\\&\quad+\cdots+k\times C_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+n\times C_n^np^nq^0\\&=np(C_{n-1}^0p^0q^{n-1}+C_{n-1}^1p^1q^{n-2}+\cdots\\&\quad+C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}p^{n-1}q^0)\\&=np(p+q)^{n-1}=np.\end{aligned}$$

☆小 结☆

1°期望的定义$E\xi=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots$，直接给出了$E\xi$的求法，因此，已知$\xi$的概率分布，可直接由定义求出$E\xi$.

2°若$\xi\sim B(n,p)$，则$E\xi=np$.利用它可直接求服从二项分布的随机变量的数学期望.

3°若ξ服从几何分布，且$P(\xi=k)=g(k,p)$，则$E\xi=\frac{1}{p}$.

三层练习 ☞ 综合运用

5.（课本第11页例2）随机抛掷一个骰子，求所得骰子的点数ξ的期望.

解：抛掷骰子所得点数ξ的概率分布为

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以 $E\xi=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$

$=(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}=3.5.$

6.（课本第13页例5）一次英语单元测验由20个选择题构成，每个选择题有4个选项，其中有且仅有一个选项是正确答案，每题选择正确答案得5分，不作出选择或选错不得分，满分100分.学生甲选对任一题的概率为0.9，学生乙则在测验中对每题都从4个选项中随机地选择一个.求学生甲和学生乙在这次英语单元测验中的成绩的期望.

解：设学生甲和学生乙在这次英语测验中选择了正确答案的选择题个数分别是ξ和η，

则 $\xi\sim B(20,0.9), \eta\sim B(20,0.25)$，

所以，$E\xi=20\times0.9=18,\quad E\eta=20\times0.25=5.$

由于答对每题得5分，学生甲和学生乙在这次英语测验中的成绩分别是5ξ和5η.

所以，他们在测验中的成绩的期望分别是

$E(5\xi)=5E\xi=5\times18=90,$

$E(5\eta)=5E\eta=5\times5=25.$

7.（课本第11页例3）有一批数量很大的产品，其次品率是15%.对这批产品进行抽查，每次抽出1件，如果抽出次品，则抽查终止，否则继续抽查，直到抽出次品，但抽查次数最多不超过10次，求抽查次数ξ的期望（结果保留三个有效数字）.

解：抽查次数ξ取1～10的整数，从这批数量很大的产品中每次抽取一件检查的试验可以认为是彼此独立的，取出次品的概率是0.15，取出正品的概率是0.85，前$k-1$次取出正品而第k次（$k=1,2,\cdots,9$）取出次品的概率

$P(\xi=k)=0.85^{k-1}\times0.15,(k=1,2,\cdots,9);$

需要抽查10次即前9次取出的都是正品的概率：

$P(\xi=10)=0.85^9.$

由此可得ξ的概率分布如下：

ξ	1	2	3	4	5
P	0.15	0.1275	0.1084	0.092	0.0783
ξ	6	7	8	9	10
P	0.0666	0.0566	0.0481	0.0409	0.2316

根据以上的概率分布，可得ξ的期望

$E\xi=1\times0.15+2\times0.1275+\cdots+10\times0.2316=5.35.$

☆小　结☆

$E\xi$ 的计算方法：

(1)已知随机变量 ξ 的分布列求 $E\xi$，可直接用定义.

(2)已知 ξ 的期望，求 ξ 的线性函数 $\eta=a\xi+b$ 的期望，可直接用 ξ 的期望的性质.

(3)如能分析所给随机变量，是服从常见的分布(如二项分布、几何分布等)，可直接用它们的期望公式求 $E\xi$.

(4)对于应用题，必须对实际问题进行具体分析，先求出随机变量的概率分布，然后根据定义计算出 $E\xi$.

达标练习　[P_9]

知识与基础

1.已知随机变量 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $E\xi=$　　　　(B)

A. $\frac{17}{3}$　　B. $\frac{17}{6}$

C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{5}{2}$

2.如果 ξ 是离散型随机变量，则对 $E\xi$ 描述不正确的命题是　　　　(A)

A. $E\xi$ 是 ξ 的所有代数平均值

B. $E\xi$ 是 ξ 所有值的加权平均数

C. 若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$

D.若 $\xi+\eta=3$，则 $E\xi=3-E\eta$

3.随机变量 ξ 的分布列为

ξ	1	2	4
P	0.4	0.3	0.3

那么 $E(5\xi+4)$ 等于　　　　(A)

A. 15　　B. 11

C. 2.2　　D. 2.3

4.若 $P(\xi=0)=p$，$P(\xi=1)=1-p$，则 $E\xi=$ $\underline{\ 1-p\ }$.

能力与技巧

5.有 10 件产品，其中 3 件次品，从中任取两件，若 ξ 表示取到次品的个数，则 $E\xi$ 等于 $\underline{\ \frac{3}{5}\ }$.

6.一次单元测试由 50 个选择题构成，每个选择题 4 个选项，其中恰有一个正确答案.每题选择正确得 2 分，不选或选错得 0 分，满分是 100 分.学生甲选对任一题的概率为 0.8，求他在这次测试中成绩的期望.

解：设学生甲答对题数为 ξ，成绩为 η，

则 $\xi\sim B(50,0.8)$，$\eta=2\xi$，

故成绩的期望为 $E\eta=E(2\xi)=2\times50\times0.8=80$(分).

发散与创新

7.若对某个数学问题，甲、乙两人都在研究，甲解出该题的概率为 $\frac{2}{3}$，乙解出该题的概率为 $\frac{4}{5}$，设解出此题的人数为 ξ，求 $E\xi$.

解：记“甲解出该题为事件 A”，“乙解出该题为事件 B”，ξ 可能取值为 0，1，2.

$$P(\xi=0)=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-\frac{2}{3})(1-\frac{4}{5})=\frac{1}{15},$$

$$\begin{aligned}P(\xi=1)&=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)\\&=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)\\&=\frac{2}{3}(1-\frac{4}{5})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{4}{5}\\&=\frac{2}{5},\end{aligned}$$

$$P(\xi=2)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}.$$

所以，ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$

故 $E\xi=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{8}{15}=\frac{22}{15}\approx1.467$.

教学后记 ☞ 反思提高