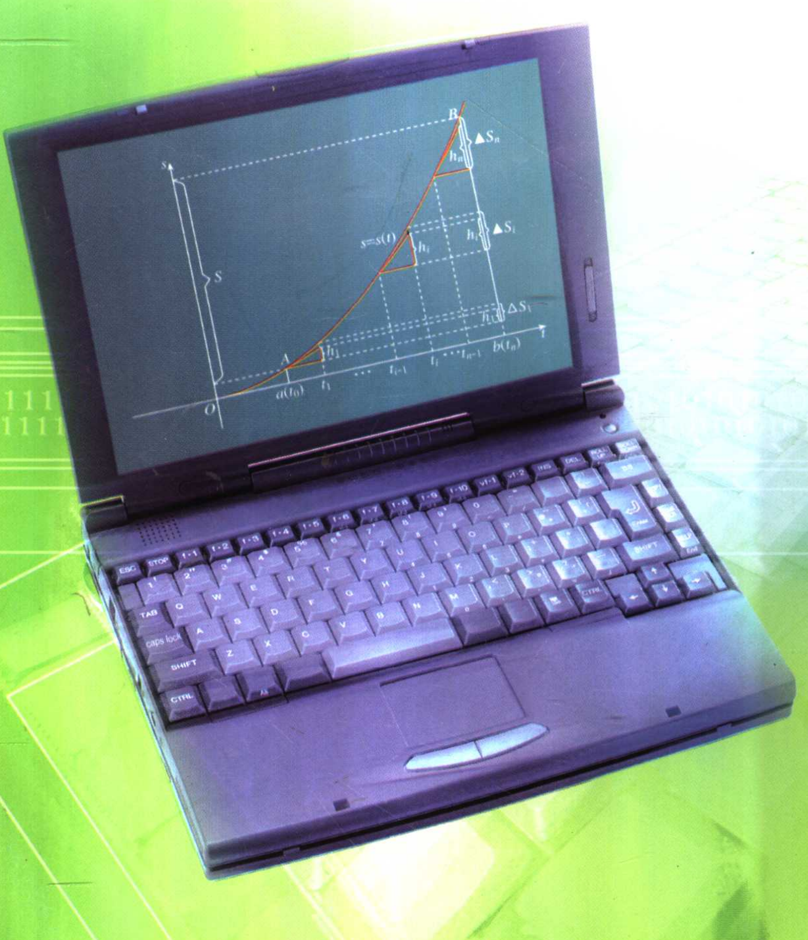
经全国中小学教材审定委员会
2005 年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 2-2

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A 版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2–2

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书
数　学
选修 2-2
A 版
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著
*
人民教育出版社 出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：8.75　字数：176 000
2005 年 6 月第 1 版　2006 年 7 月第 4 次印刷
ISBN 7-107-18663-9
G·11753(课)　定价：7.55 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：钱珮玲
主要编者：钱珮玲　王　嵘　张劲松　郭慧清　李龙才　宋莉莉　杨照宇　蒋佩锦
责任编辑：李龙才
美术编辑：王俊宏　王　艾　张傲冰
封面设计：吴　敬

本册导引

我们根据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了这套实验教科书.

本书是高中数学选修课程系列 2 中的一个模块，包括导数及其应用，推理与证明，数系的扩充与复数的引入三章内容. 微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 推理与证明是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 数系的扩充过程体现了数学的发现和创造过程，同时体现了数学发展的客观需求和背景，复数的引入是中学阶段数系的又一次扩充.

导数和定积分都是微积分的核心概念，它们有着极其丰富的背景和广泛的应用. 第一章通过大量实例，引导同学们经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，体会导数的思想，理解导数的含义. 通过用导数研究函数的单调性、极值等性质和解决各种最优化问题，体会导数在解决数学问题和实际问题中的广泛应用和强大力量. 本章还初步介绍定积分的概念及其简单的应用，同学们也将初步体会定积分的思想及其丰富内涵，为进一步学习微积分打下基础. 此外，通过对微积分发展史的介绍，同学们可以体会到微积分在人类思想、文化发展史上的价值.

第二章同学们将学习两种基本的推理——合情推理和演绎推理. 合情推理具有猜测和发现新结论、探求解决问题的思路的作用；演绎推理则具有证明结论，整理和建构知识体系的作用，是公理体系中的基本推理方法. 二者联系紧密、相辅相成. 同学们还将学习证明的两类基本方法——直接证明和间接证明，从中体会证明的功能和特点，了解数学证明的基本方法，感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯.

在第三章中，同学们将在问题情境中了解数系扩充的过程以及引入复数的必要性，学习复数的一些基本知识，体会人类理性思维在数系扩充中的作用.

学习始于疑问. 在本书中，我们将通过适当的问题情景，引出需要学习的数学内容，然后在“观察”“思考”“探究”等活动的带领下，引导同学们自己发现问题、提出问题，通过亲身实践、主动思维，经历不断的、从具体到抽象的概括活动来理解和掌握数学基础知识，打下坚实的数学基础.

学而不思则罔. 只有通过自己的独立思考才能真正学会数学，同时应当掌握科学的思

维方法．在本书中，我们将利用数学内容之间的内在联系，特别是数学思想方法的一致性，启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、化归等数学思考的常用逻辑方法，使大家学会数学思考与推理，在数学思维能力上有一个大的提高．

学习的目的在于应用．在本书中，我们将努力为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会，以使同学们加深对数学概念本质的理解，认识数学知识与实际的联系性，并学会用数学解决一些实际问题．另外，我们还开辟了“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目，为大家提供选学素材，有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究．

祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、用数学解决问题的能力等方面都有较大提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识．

本书部分数学符号

$x \to a$	x 趋于 a
Δx	x 的增量
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	函数 f 的导（函）数
$f'(a)$	函数 f 的导（函）数在 a 的值
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	函数 f 由 a 到 b 的定积分
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1+a_2+\cdots+a_n$
i	虚数单位
$\mathbf{C}$	复数集
z，$a+b\mathrm{i}$	复数 z，实部为 a，虚部为 b 的复数

目 录

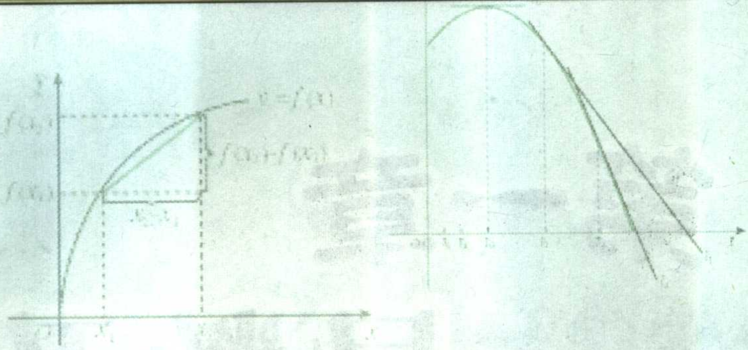
第一章 导数及其应用

为了描写现实世界中运动、变化着的现象，在数学中引入了函数. 刻画静态现象的数与刻画动态现象的函数都是数学中非常重要的概念. 随着对函数的研究的不断深化，产生了微积分，它是数学发展史上继欧氏几何后的又一个具有划时代意义的伟大创造，被誉为数学史上的里程碑.

微积分的创立与处理四类科学问题直接相关. 一是已知物体运动的路程作为时间的函数，求物体在任意时刻的速度与加速度，反之，已知物体的加速度作为时间的函数，求速度与路程；二是求曲线的切线；三是求函数的最大值与最小值；四是求长度、面积、体积和重心等. 几百年中，科学家们对这些问题的兴趣和研究经久不衰. 终于，在十七世纪中叶，牛顿和莱布尼兹在前人探索与研究的基础上，凭着他们敏锐的直觉和丰富的想象力，各自独立地创立了微积分.

导数是微积分的核心概念之一. 它是研究函数增减、变化快慢、最大(小)值等问题的最一般、最有效的工具，因而也是解决诸如运动速度、物种繁殖率、绿化面积增长率，以及用料最省、利润最大、效率最高等实际问题的最有力的工具. 定积分也是微积分的核心概念之一，与导数相比，定积分的起源要早得多，它的思想萌芽甚至可以追溯到两千多年前. 自然科学和生产实践中的许多问题，如一般平面图形的面积、变速直线运动的路程、变力所作的功等都可以归结为定积分的问题. 实际上，微积分在物理、化学、生物、天文、地理以及经济等各种科学领域中都有非常广泛而重要的应用.

在本章，我们将利用丰富的背景与大量实例，学习导数和定积分的基本概念与思想方法；通过应用导数研究函数性质、解决生活中的最优化问题等实践活动，通过应用定积分解决一些简单的几何和物理问题，初步感受导数和定积分在解决数学问题与实际问题中的作用；通过微积分基本定理的学习，初步体会导数与定积分之间的内在联系.



CHAPTER 1

1.1 变化率与导数

丰富多彩的变化率问题随处可见. 让我们从其中的两个问题，开始变化率与导数的学习吧！

1.1.1 变化率问题

问题 1　气球膨胀率

很多人都吹过气球. 回忆一下吹气球的过程，可以发现，随着气球内空气容量的增加，气球的半径增加得越来越慢. 从数学的角度，如何描述这种现象呢？

我们知道，气球的体积 V（单位：L）与半径 r（单位：dm）之间的函数关系是

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

如果将半径 r 表示为体积 V 的函数，那么

$$r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

当空气容量 V 从 0 增加到 1 L 时，气球半径增加了

$$r(1)-r(0)\approx 0.62\ (\text{dm}),$$

气球的平均膨胀率为

$$\frac{r(1)-r(0)}{1-0}\approx 0.62\ (\text{dm/L}).$$

类似地，当空气容量 V 从 1 L 增加到 2 L 时，气球半径增加了

$$r(2)-r(1)\approx 0.16\ (\text{dm}),$$

气球的平均膨胀率为

$$\frac{r(2)-r(1)}{2-1}\approx 0.16\ (\text{dm/L}).$$

可以看出，随着气球体积逐渐变大，它的平均膨胀率逐渐变小了.

思考？

当空气容量从V_1增加到V_2时，气球的平均膨胀率是多少？

问题 2　高台跳水

人们发现，在高台跳水运动中，运动员相对于水面的高度h（单位：m）与起跳后的时间t（单位：s）存在函数关系

$$h(t)=-4.9t^2+6.5t+10.$$

如果我们用运动员在某段时间内的平均速度$\overline{v}$描述其运动状态，那么：

在$0\leqslant t\leqslant 0.5$这段时间里，

$$\overline{v}=\frac{h(0.5)-h(0)}{0.5-0}=4.05\ (\mathrm{m/s});$$

在$1\leqslant t\leqslant 2$这段时间里，

$$\overline{v}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=-8.2\ (\mathrm{m/s}).$$

探究

计算运动员在$0\leqslant t\leqslant \frac{65}{49}$这段时间里的平均速度，并思考下面的问题：

(1) 运动员在这段时间里是静止的吗？

(2) 你认为用平均速度描述运动员的运动状态有什么问题吗？

如果上述两个问题中的函数关系用$f(x)$表示，那么问题中的变化率可用式子

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

表示，我们把这个式子称为函数$f(x)$从x_1到x_2的**平均变化率**（average rate of change）．习惯上用Δx❶表示x_2-x_1，即

$$\Delta x=x_2-x_1,$$

可把Δx看作是相对于x_1的一个“增量”，可用$x_1+\Delta x$代

❶ Δx是一个整体符号，而不是Δ与x相乘．

替 x_2；类似地，

$$\Delta f=f(x_2)-f(x_1).$$

于是，平均变化率可以表示为

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

思考？

观察函数 $f(x)$ 的图象（图1.1-1），平均变化率

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

表示什么？

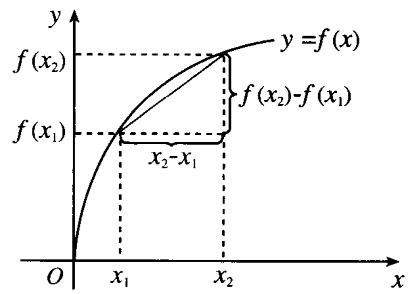


图 1.1-1

1.1.2 导数的概念

在高台跳水运动中，运动员在不同时刻的速度是不同的. 我们把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度（instantaneous velocity）. 运动员的平均速度不一定能反映他（她）在某一时刻的瞬时速度. 那么，如何求运动员的瞬时速度呢？比如，$t=2$ 时的瞬时速度是多少？

我们先考察 $t=2$ 附近的情况. 在 $t=2$ 之前或之后，任意取一个时刻 $2+\Delta t$，Δt 是时间改变量，可以是正值，也可以是负值，但不为 0. 当 $\Delta t<0$ 时，$2+\Delta t$ 在 2 之前；当 $\Delta t>0$时，$2+\Delta t$ 在 2 之后. 计算区间 $[2+\Delta t, 2]$ 和区间 $[2, 2+\Delta t]$ 内的平均速度 $\bar{v}$，可以得到如下表格.

$\Delta t<0$ 时，在 $[2+\Delta t,\ 2]$ 这段时间内	$\Delta t>0$ 时，在 $[2,\ 2+\Delta t]$ 这段时间内
$\bar{v}=\frac{h(2)-h(2+\Delta t)}{2-(2+\Delta t)}=\frac{4.9\Delta t^2+13.1\Delta t}{-\Delta t}$ $=-4.9\Delta t-13.1$	$\bar{v}=\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{(2+\Delta t)-2}=\frac{-4.9\Delta t^2-13.1\Delta t}{\Delta t}$ $=-4.9\Delta t-13.1$
当 $\Delta t=-0.01$ 时，$\bar{v}=-13.051$；	当 $\Delta t=0.01$ 时，$\bar{v}=-13.149$；
当 $\Delta t=-0.001$ 时，$\bar{v}=-13.0951$；	当 $\Delta t=0.001$ 时，$\bar{v}=-13.1049$；
当 $\Delta t=-0.0001$ 时，$\bar{v}=-13.09951$；	当 $\Delta t=0.0001$ 时，$\bar{v}=-13.10049$；
当 $\Delta t=-0.00001$ 时，$\bar{v}=-13.099951$；	当 $\Delta t=0.00001$ 时，$\bar{v}=-13.100049$；
当 $\Delta t=-0.000001$ 时，$\bar{v}=-13.0999951$；	当 $\Delta t=0.000001$ 时，$\bar{v}=-13.1000049$；
……	……

观察

当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势？

我们发现，当 Δt 趋近于 0 时，即无论 t 从小于 2 的一边，还是从大于 2 的一边趋近于 2 时，平均速度都趋近于一个确定的值 -13.1.

从物理的角度看，时间间隔 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\bar{v}$ 就无限趋近于 $t=2$ 时的瞬时速度. 因此，运动员在 $t=2$ 时的瞬时速度是 -13.1 m/s.

为了表述方便，我们用

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=-13.1$$

表示“当 $t=2$，Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 趋近于确定值 -13.1”.

> 我们称确定值 -13.1 是 $\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 当 Δt 趋于 0 时的极限.

探究

1. 运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度怎样表示？
2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率怎样表示？

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**（derivative），记作 $f'(x_0)$或 $y'|_{x=x_0}$，即

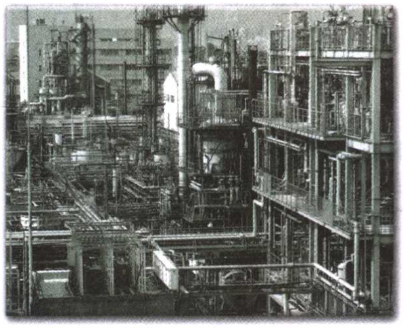
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$y'|_{x=x_0}$ 表示函数 y 关于自变量 x 在 x_0 处的导数.

17 世纪，力学、航海、天文等方面取得了突飞猛进的发展，这些发展对数学提出了新的要求，它们突出地表现为本章引言中提到的四类问题，其中的两类问题直接导致了导数的产生：一是根据物体的路程关于时间的函数求速度和加速度；二是求已知曲线的切线.

由导数的定义，我们知道，高度 h 关于时间 t 的导数就是运动员的瞬时速度；气球半径 r 关于体积 V 的导数就是气球的瞬时膨胀率.

实际上，导数可以描述任何事物的瞬时变化率，如效率、点密度、国内生产总值 GDP（Gross Domestic Product 的缩写）的增长率等等.



例 1 将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品，需要对原油进行冷却和加热. 如果在第 x h时，原油的温度（单位:℃）为 $f(x)=x^2-7x+15$ $(0\leqslant x\leqslant 8)$. 计算第 2 h 和第6 h时，原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

解：在第 2 h 和第6 h时，原油温度的瞬时变化率就是 $f'(2)$和 $f'(6)$.

根据导数的定义，

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(2+\Delta x)^2-7(2+\Delta x)+15-(2^2-7\times 2+15)}{\Delta x}$$

$$=\frac{4\Delta x+\Delta x^2-7\Delta x}{\Delta x}=\Delta x-3,$$

所以，

$$f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x-3)=-3.$$

同理可得

$$f'(6)=5.$$

请同学们自己完成具体运算过程.

在第 2 h 与第 6 h 时，原油温度的瞬时变化率分别为-3

与5. 它说明在第2 h附近，原油温度大约以3 ℃/h的速率下降；在第6 h附近，原油温度大约以5 ℃/h的速率上升.

一般地，$f'(x_0)$反映了原油温度在时刻x_0附近的变化情况.

练　习

计算第3 h和第5 h时原油温度的瞬时变化率，并说明它们的意义.

1.1.3　导数的几何意义

我们知道，导数$f'(x_0)$表示函数$f(x)$在$x=x_0$处的瞬时变化率，反映了函数$f(x)$在$x=x_0$附近的变化情况. 那么，导数$f'(x_0)$的几何意义是什么呢？

观察

如图1.1-2，当点$P_n(x_n, f(x_n))(n=1, 2, 3, 4)$沿着曲线$f(x)$趋近于点$P(x_0, f(x_0))$时，割线$PP_n$的变化趋势是什么？

利用信息技术工具，演示图1.1-2中PP_n的动态变化效果. 做一做，看一看！

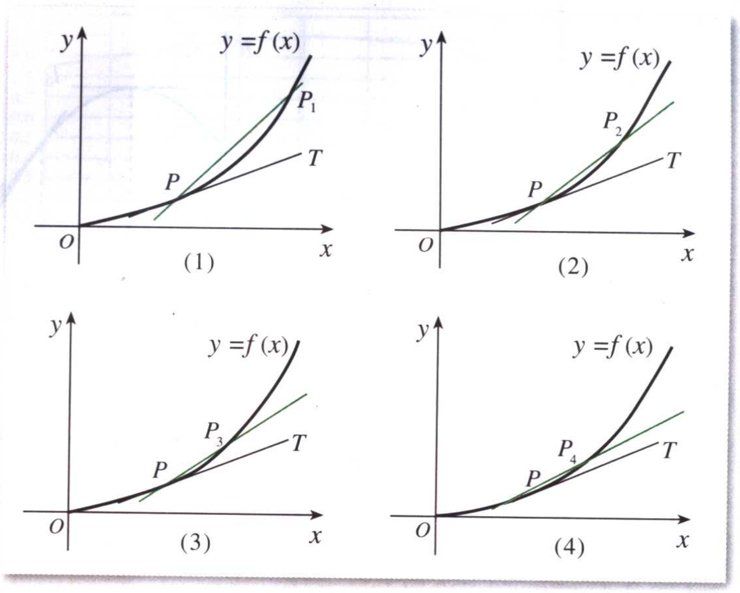


图1.1-2

此处切线定义与以前学过的切线定义有什么不同？

我们发现，当点 P_n 趋近于点 P 时，割线 PP_n 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 PT 称为过点 P 的**切线** (tangent line). 值得关注的问题是，割线 PP_n 的斜率与切线 PT 的斜率 k 有什么关系呢?

容易知道，割线 PP_n 的斜率是

$$k_n=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}.$$

当点 P_n 无限趋近于点 P 时，k_n 无限趋近于切线 PT 的斜率. 因此，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率 k. 即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

继续观察图 1.1-2，可以发现，在点 P 附近，PP_2 比 PP_1 更贴近曲线 $f(x)$，PP_3 比 PP_2 更贴近曲线 $f(x)$……过点 P 的切线 PT 最贴近点 P 附近的曲线 $f(x)$. 因此，在点 P 附近，曲线 $f(x)$ 就可以用过点 P 的切线 PT 近似代替.

数学上常用简单的对象刻画复杂的对象. 例如，用有理数 3.1416 近似代替无理数 π. 这里，我们用曲线上某点处的切线近似代替这一点附近的曲线，这是微积分中重要的思想方法——以直代曲.

例 2　如图 1.1-3，它表示跳水运动中高度随时间变化的函数 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 的图象. 根据图象，请描述、比较曲线 $h(t)$ 在 t_0，t_1，t_2 附近的变化情况.

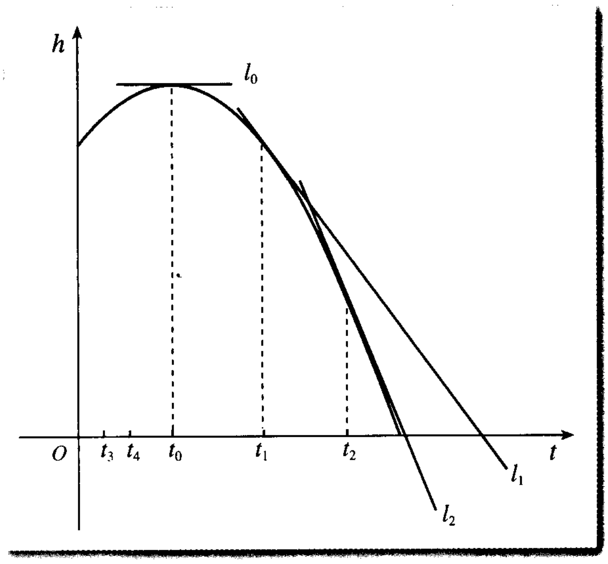


图 1.1-3

解：我们用曲线 $h(t)$ 在 t_0，t_1，t_2 处的切线，刻画曲线 $h(t)$ 在上述三个时刻附近的变化情况.

(1) 当 $t=t_0$ 时，曲线 $h(t)$ 在 t_0 处的切线 l_0 平行于 x