Introduction to Variational Methods for
Homoclinic and Heteroclinic Orbits of Hamiltonian Systems

变分法与哈密顿系统

同宿轨道和异宿轨道引论

李成岳　编著

科学技术文献出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

Introduction to Variational Methods
for Homoclinic and Heteroclinic Orbits
of Hamiltonian Systems

变分法与哈密顿系统同宿轨道和异宿轨道引论

李成岳　编著

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

变分法与哈密顿系统同宿轨道和异宿轨道引论/李成岳编著.-北京:科学技术文献出版社,2006.5

ISBN 7-5023-5215-5

Ⅰ.变… Ⅱ.李… Ⅲ.①变分法-轨道 ②哈密顿系统-轨道 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 158722 号

出版者	科学技术文献出版社
地址	北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话	(010)58882909,(010)58882959(传真)
图书发行部电话	(010)68514009,(010)68514035(传真)
邮购部电话	(010)58882952
网址	http://www.stdph.com

E-mail: stdph@istic.ac.cn

策划编辑	陈玉珠
责任编辑	张述庆
责任校对	张述庆
责任出版	王杰馨
发行者	科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印刷者	北京国马印刷厂
版(印)次	2006 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
开本	850×1168 32 开
字数	265 千
印张	8.625
印数	1~1000 册
定价	20.00 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

哈密顿系统是非线性科学研究中的重要领域。本书以临界点理论(主要是极小极大方法)为基础,详细介绍了 20 世纪 90 年代以来哈密顿系统同宿轨道、异宿轨道研究取得的重大进展,主要涉及 P. H. Rabinowitz, V. Coti Zelati, I. Ekeland, E. Sere, M. Willem, K. Tanaka, P. L. Felmer, T. Q. Maxwell 等人的杰出工作,其中重点介绍了二阶哈密顿系统方面研究成果的创新性和方法性。为保证本书的自闭性,还介绍了线性泛函分析和非线性泛函分析的基础知识。本书可作为高校数学系高年级本科生选修课教材和数学专业研究生教材,也可供相关数学工作者参考使用。

科学技术文献出版社是国家科学技术部系统惟一一家中央级综合性科技出版机构,我们所有的努力都是为了使您增长知识和才干。

前　言

哈密顿系统是非线性科学研究中的重要领域. 由于天体力学、等离子物理、航天科学以及生物工程中的很多模型都是以哈密顿系统或其扰动的形式出现的，因此该领域的研究多年来一直长盛不衰，这一领域已成为一片富有丰硕成果而又充满无限生机的数学沃土.

所谓哈密顿系统是指如下的常微分方程(组)：

$$\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial q}(t,p,q)\equiv H_q(t,p,q)$$

$$\dot{q}=-\frac{\partial H}{\partial p}(t,p,q)\equiv -H_p(t,p,q)$$

其中 $p,q\in\mathbf{R}^n, H\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n},\mathbf{R})$.

令 $z=(p,q)$，则上述方程可表示为

$$\dot{z}=JH_z(t,z)$$

上式通常称为一阶哈密顿系统，以后记为(HS1). 这里

$$J=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}$$

其中 $I=I_n$ 是 $n\times n$ 阶单位矩阵. 在实际问题中，一类简单而重要的情形是

$$H(t,p,q)=\frac{1}{2}|p|^2+V(t,q)$$

在此情形下，上述哈密顿系统可简化为

$$\ddot{q}+V_q(t,q)=0$$

习惯上称之为二阶哈密顿系统，以后简单记为(HS2).

在常微分方程定性理论中，平衡点(对应于常数解)扮演了重要的角色，对其稳定性的讨论已为人们所熟知. 对方程的一个经典解 $u=u(t)$ 而言，若 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}u(t)$ 都存在，并且恰好等于同一个平衡点，则称之为方程的一条同宿轨道；同样地，若 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}u(t)$ 都存在，而 $\lim\limits_{t\to-\infty}u(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)$ 为不同的平衡点，则把它称为方程的异宿轨道. 形象地讲，这两种轨道的差别在于它们"起始"和"终止"于同一个平衡点还是两个不同的平衡点. 它们在揭示动力系统的混沌性质方面起着重要的作用.

利用变分法发现哈密顿系统的周期轨道(即周期解)、同宿轨道、异宿轨道和其它类型的轨道，最早始于20世纪20至30年代Morse和Hedlund在异宿测地线方面的工作. 此后，Kozlov和Bolotin发现了多重摆问题的异宿轨道. 20世纪80年代末以后，在哈密顿系统周期轨道研究基础之上，发现同宿轨道、异宿轨道和其它类型轨道的工作取得了重大进展.

迄今为止，关于哈密顿系统的同宿轨道和异宿轨道研究方面的成果已经很多. 与发现哈密顿系统的周期轨道相比，研究其同宿轨道和异宿轨道的技术难点主要表现在三个方面. 首先，处理问题涉及的泛函定义在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^+$ 上，而不像周期问题中定义在有限区间上，因而对(PS)序列的分析研究更加复杂，事实上这里的绝大多数泛函不再满足(PS)条件. 其次，为了利于解决轨道存在问题，选择什么样的函数类作为研究范围可能是清楚的，但选择合适的范数往往不是很容易的. 最后，定义在已经确定的函数空

间上的泛函有可能是无穷大，这就需要对泛函进行修正，但在这个方面目前还没有一般性的规律可循. 尽管如此，人们在探索过程中仍取得了若干成功. 本书的主要目的就是介绍这方面的研究成果.

全书分为六章. 第一章简要介绍了经典变分法中的 Euler 方程. 第二章介绍了本书可能用到的 Banach 空间、Hilbert 空间和 Sobolev 空间的知识，特别是对广义函数和 Sobolev 嵌入定理作了较为重点的讲述. 第三章介绍了非线性泛函分析方面的基础知识，如 Banach 空间中的 Frechet 导数和 Gauchet 导数等，并讨论了 Banach 空间中微分方程的初值问题. 第四章介绍了极小极大理论，如山路引理、鞍点定理等，并概要讨论了其在哈密顿系统周期轨道研究中的应用. 第五、六两章是本书的重点，分别详细介绍了极小极大原理(也包括极小化序列方法)在哈密顿系统的同宿轨道和异宿轨道研究中的应用. 最后这两章的内容反映了 20 世纪 90 年代以来该领域的最新研究成果，主要涉及到 P. H. Rabinowitz, V. Coti Zelati , I. Ekeland, E. Sere, M. Willem, K. Tanaka, P. L. Felmer, T. O. Maxwell 等人的典型工作，由于这方面的研究大多数针对于二阶哈密顿系统，所以我们也把介绍重点放在这里. 本书强调研究成果的创新性和方法性，因此主要介绍其中许多原创性的和具有启发性的工作，而后人在此基础上所进行的过分复杂的推广和延伸，来被列入本书的内容。

本书自 2002 年 6 月开始写作，在写作过程中得到了中央民族大学“十五”科研规划基金和国家自然科学基金(批准号 10371007)的资助. 2004 年本书被列为国家科学技术学术著作出版基金资助项目. 自 2005 年 3 月起，作者在韩国国立汉城大学做

为期一年的学术访问，在此期间对书稿做了最后的修订。本书是在作者 1991 年以来为数学系开设高年级选修课及研究生课所写的讲稿的基础上，并吸收了该研究领域的最新成果写作而成的．在写作过程中，我的研究生钟仕增、路月峰参加了本书部分文字录入工作，并分别对第一、第四章有一定贡献．在此谨向所有支持本书写作和出版的单位与个人表示衷心的感谢．

由于水平所限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正．

李成岳

2006 年 1 月

科学技术文献出版社方位示意图

目　　录

第一章　经典变分法

1696 年，约翰.贝努利提出了最速降线问题，引起了牛顿、莱布尼茨等知名数学家的极大兴趣，使人们在研究多元函数极值的同时，展开了对更有意义的泛函极值问题的讨论. 到了 18 世纪，经过欧拉、拉格朗日等人的工作，逐步形成了一个解决数学物理问题的新学科——变分法. 本章主要介绍 17 至 19 世纪经典变分理论研究的概况，重点是各类泛函相应变分问题的欧拉方程，为以后临界点理论的学习和研究提供基础知识. 对经典变分法的进一步了解，读者可参考文献[1]、[3]、[5]等.

§1.1　经典变分问题

这一节介绍对变分学的初期发展有重要影响的几个变分问题.

1.1.1　最速降线问题

设 O 与 A 是高度不同且不在同一铅垂线上的两定点，如果不考虑摩擦和空气阻力，一质点在重力作用下从 O 点沿一曲线降落至 A 点，问曲线呈何种形状时，质点降落的时间最短？

不妨设经过 O 与 A 的铅垂平面为 XOY，OX 为水平轴，OY 轴铅垂向下，A 点的坐标为 (a,b)，且 $b>0$. 质点从 O 开始运动，它的速度 v 与它的纵坐标满足

$$v^2 = 2gy \tag{1.1.1}$$

其中 g 是重力加速度. 设质点降落曲线的方程为

$$y = y(x)$$

则有

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy} \tag{1.1.2}$$

由此得

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1.1.3}$$

对此式积分, 得出质点沿曲线

$$y = y(x)$$

由 O 降落至 A 所需的时间为

$$t = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1.1.4}$$

最速降线问题就是在满足边界条件

$$y(0) = 0,\ y(a) = b \tag{1.1.5}$$

的所有连续可微函数 $y(x)$ 中求出一个使泛函(1.1.4)达到最小.

1.1.2 悬链线问题

在平面内求长度为 l, 两端系于固定两点的绝对柔软而不伸长的绳索的形状.

设 A,B 两点的坐标分别为 $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$. 假设绳索状态曲线为

$$y = y(x)$$

则其满足

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2(x)}dx = l \tag{1.1.6}$$

绳索在平衡状态时,它的重心最低, 从而

$$J = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx \tag{1.1.7}$$

最大. 本问题就是寻找一个函数

$$y = y(x)$$

使它在满足

$$y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$$

及式(1.1.6)的条件下，使 J 最大.

1.1.3　等周问题

求长为定值 l 的平面封闭曲线 Γ，使其所围成的平面 D 的面积最大.

设曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.1.8}$$

$$x(t_0) = x(t_1),\ y(t_0) = y(t_1) \tag{1.1.9}$$

由弧长公式知

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \tag{1.1.10}$$

由 Green 公式，Γ 所围面积 A 为

$$A = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx')dt \tag{1.1.11}$$

于是等周问题归结为：求一对函数 $x(t), y(t)$，在其满足条件(1.1.9)和等周条件(1.1.10)下使泛函(1.1.11)取最小值.

1.1.4　测地线问题

设 $A(x_0, y_0, z_0)$，$B(x_1, y_1, z_1)$ 为曲面

Σ: $\varphi(x, y, z) = 0$

上的两点，求在曲面 Σ 上经过 A 和 B 的长度最短的曲线. 这种曲

线称为测地线.

设过 A 和 B 的曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \tag{1.1.12}$$

则曲线 Γ 的长度为

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx \tag{1.1.13}$$

于是测地线问题归结为求曲线 Γ,在其满足边界条件

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ z_0 = z(x_0) \end{cases}, \begin{cases} y_1 = y(x_1) \\ z_1 = z(x_1) \end{cases} \tag{1.1.14}$$

及约束条件

$$\varphi(x, y(x), z(x)) = 0 \tag{1.1.15}$$

下使泛函(1.1.13) 取最小值.

1.1.5　哈密顿最小作用原理

牛顿力学是以描述质点运动的牛顿方程

$$mx''(t) = f(t, x, \dot{x})$$

为基础的, 这里质点的空间位置

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

必须用笛卡儿直角坐标表示. 此后拉格朗日和哈密顿相继建立了新的力学体系, 允许自由地选择描述系统状态的变量. 拉格朗日力学使用抽象的位形空间描述力学系统的运动, 所用的位形空间可以是欧氏空间, 也可以是任意的微分流形. 考虑具有 n 个自由度的拉格朗日力学系统, 它在位形空间的路径函数用

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t))$$

表示. 设 A, B 是位形空间的两固定点, 以 Γ 表示在 t_A 时刻从 A 出发, 于时刻 t_B 到达 B 的路径的集合. 设系统的拉格朗日函数为

$$L = L(t, q, \dot{q}) \tag{1.1.16}$$

对任意 $\gamma \in \Gamma$，定义泛函

$$I(\gamma)=\int_{t_A}^{t_B} L(t,q,\dot{q})dt \tag{1.1.17}$$

那么哈密顿最小作用原理可叙述为：

系统在给定始点和终点的状态后，其真实运动和任何容许运动的区别是其使泛函(1.1.17)达到最小.

该原理是哈密顿1834年提出的，是力学中的基本原理，具有普遍性和广泛的应用性.

以上五个问题有一个共同点，就是最后都归结为求某泛函的最小值或最大值. 一般地，有

定义 1.1.6　设 X 为距离空间，$I=I(y)$ 是定义在 X 上的泛函. 若存在 $y_0 \in X$ 及某个 $\delta>0$，使对于一切 $y \in B_\delta(y_0)$ 有

$$I(y_0) \leqslant I(y)(\text{或 } I(y_0) \geqslant I(y)) \tag{1.1.18}$$

成立，则称泛函 $I(y)$ 在 y_0 处取得极小值(或极大值)，y_0 称为 $I(y)$ 的一个极值点. 求泛函极值的问题就叫做变分问题，相应的极值点就叫做变分问题的解. 专门研究变分问题的学科叫变分法(或变分学).

泛函的最小值(或最大值)当然是它的极值，于是问题1.1.1—1.1.5均为变分问题. 事实上，经典变分问题中的极值一般以最小值(或最大值)的形式出现.

需要指出的是，变分问题并不都是可解的，即极值点并不总是存在的. 这可由以下例子来说明：

设 $y(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，具有分段连续的导数，且满足

$$y(-1)=-1,\ y(1)=1$$

求某个满足上述条件的 $y(x)$ 使泛函

$$I(y)=\int_{-1}^{1} x^4 y'^2 dx \tag{1.1.19}$$

达到最小.