高职高专规划教材

主编 李晓

高等数学

浙江大学出版社

浙江省教育厅基金资助项目(20020313)

高等数学

主　编　李　晓
副主编　胡　月　薛有才
　　　　张晓东　王晓凤
参　编　包　晔　李永利
　　　　杨泳波

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李晓主编. 一杭州：浙江大学出版社，2004.8

ISBN 7－308－03753－3

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065968 号

内 容 提 要

本书根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写，是浙江省教育厅基金项目《高职高专数学教育管理模式研究》成果之一。

本书包括一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数、常微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、方阵的特征值、特征向量和二次型及其化简等共十四章。

本书起点较低，进展较为平缓，主线突出，并且编写了较多的数学文化知识和数学史料，以增加学生对数学史、数学思想和方法的了解，提高他们的数学文化素质。

本书可作为两年制或三年制的高职高专、成人院校理工类各专业的高等数学教材，也可作为教师进修或专升本学生自学的参考读物。

责任编辑 徐素君 叶明立

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址：http://www.zjupress.com)

经　　销 浙江省新华书店

排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷 浙江大学印刷厂

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 25.75

字　　数 550 千

版 印 次 2004 年 8 月第 1 版 2006 年 6 月第 5 次印刷

书　　号 ISBN 7－308－03753－3/O·311

定　　价 32.00 元

前　　言

《高等数学》是大学理、工、农、医、经济管理等各专业必修的一门重要数学基础课程，当然也是高职高专理工类所有专业必修的基础课程，而且还是一门重要的文化素质和科学素质课程。随着计算机科学技术的发展，数学课程的地位日趋重要。数学的重要性首先表现在数学的科学性上，数学是理解和认识世界的强有力的普遍的思维方式；其次，数学的重要性表现在数学的应用性上，“高技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”，因此“高技术本质上是一种数学技术”；再次，数学的重要性表现在它的教育意义上，数学教育能够培养出社会所需要的合格人才。“高等数学”作为基础课程，它承担着提高学生素质，帮助学生完成由中学到大学的跨越，并在后续课程中起着重要的作用。所以，“高等数学”课程在大学教育中有着重要的地位和作用。

本教材是为高职高专理工科学生量体裁衣撰写的教材，它强调内容的科学性、先进性和可读性，同时兼顾教材的应用性。本教材是浙江省教育厅“高职高专数学教育管理模式研究”课题(编号：20020313)的研究成果之一。教材在编著过程中作了以下探索：

(1) 低起点。考虑到高职高专各个层次学生的需要，教材与中学教材接轨，从中学的函数及线性方程组起步。

(2) 突出主线。教材以高等数学的最基本、最重要的知识为主线，尽量避免那些证明烦琐而对高职高专学生来讲又难以接受的知识，以让学生掌握最基本、最重要的数学知识为目的。

(3) 注重思想和方法。教材着眼于用数学思想和方法分析问题，以提高学生的科学素质。

(4) 进展较为平缓。教材的编排尽量分散难点，深入浅出，使一般学生通过努力都能顺利地掌握教材中的知识。

(5) 尽量以提出问题、讨论问题、解决问题的方式展开教材，使学生在学习中既掌握数学基本知识，又学会解决问题。

(6) 教材中配有较多的典型例题，以期起到举一反三的作用。同时，教材中也配有

较多难易程度不同的各种类型的习题，为教学留有比较充分的选择余地。

(7)注重应用。“高等数学”的应用非常广泛，教材在篇幅允许的条件下尽量予以介绍或提及，以让学生有一些初步的体会，并有利于后续课程的学习。

(8)注重在提高学生科学素质的同时，培养和提高学生的人文素质，教材中选编了较多的数学文化和数学史等阅读材料，既让学生了解数学的发展历程，又能提高学生的人文素养。

本教材的教学时数为150学时左右，打 * 号的内容需要另加学时。教学中也可作适当的增删，以适用于其他学时的教学需要。

参加本书编写的有：薛有才(第一章和全书的阅读材料)，李晓(第二、三、四、五章)，杨泳波(第六章)，包晔(第七章)，张晓东(第八、九章)，王晓凤(第十、十一章)，李永利(第十二章)，胡月(第十三、十四章)。全书的框架结构安排，统稿和定稿由主编李晓承担。在成书过程中，各位编者所在学校领导和同仁、浙江大学出版社徐素君副编审给予了热情的帮助和支持，在此我们一并表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第一章 函 数

要想获得真理和知识，惟有两件武器，那就是清晰的直觉和严格的演绎.

——笛卡尔

作为变化着的量的一般性质及它们之间依赖关系的反映，在数学中产生了变量和函数的概念，而数学对象的这种根本扩展就决定了向数学的新阶段——变量的数学过渡.

——A·Д亚历山大洛夫

函数概念是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型，是高等数学研究的主要对象.本章将在中学已学过的函数知识的基础上，进行补充、概括、总结和提高.

第一节 函数的概念

一、预备知识

1. 区间

设 a, b 为两个实数，且 $a<b$，称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为以 a, b 为端点的开区间，记为 (a, b)，即 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$.

同样有：

闭 区 间　　$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

半开区间　　$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$

　　　　　　$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$

以上区间称为有限区间，有限区间的长度为 $(b-a)$，从数轴上看区间 $[a, b]$ 是有限

的线段. 此外,还有无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

特别应注意,$-\infty$,$+\infty$分别读作负无穷大、正无穷大,它们不是数,仅仅是记号.

以后为使叙述更简捷,我们常用“区间 I”来代表上述各类有限或无限区间,读者应注意“I”的具体所指.

2. 邻域

设 x_0,δ 为两个实数,且 $\delta > 0$,称数集$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$,即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.

因为不等式 $|x - x_0| < \delta$ 等价于 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$,在数轴上它表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点的集合,即$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 所以称 x_0 为邻域中心,δ 为邻域半径(如图 1 - 1).

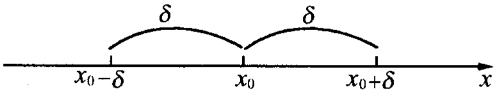

图 1 - 1

【例 1.1.1】 $U(2, \frac{1}{2}) = \left\{x \mid |x - 2| < \frac{1}{2}\right\}$是以点 $x_0 = 2$ 为中心,以$\frac{1}{2}$ 为半径的邻域,即开区间(1.5, 2.5).

有时我们要用到去掉中心的邻域,称数集 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 为点 x_0 的 δ 去心邻域,记为 $U(\hat{x}_0, \delta)$.

即
$$U(\hat{x}_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$
$$= (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

【例 1.1.2】 $U(\hat{2}, 3) = \{x \mid 0 < |x - 2| < 3\}$为以 2 为中心,以 3 为半径的去心邻域,即为开区间$(-1, 2) \cup (2, 5)$.

二、函数的概念

1. 常数、变量

在观察各种自然现象时,在生产实践和科学实验中,我们常常会遇到一个基本概

念，就是量的概念. 例如：长度、面积、体积、速度、力、某物品的价格、某人的高度等等都是量. 量是数学的最基本的研究对象. 在我们所讨论的问题中，常常又有两种不同的量，一种量在过程中保持不变. 例如火车在两站之间的运价，火车在进行过程中的乘客数、全部行李的重量等，这种量叫常量. 另一种量在过程中不断变化，可取得不同的值. 例如：火车在两站之间运行的速度等，这种量称为变量.

我们知道，事物的变动是绝对的，而静止是相对的. 因此，说某个量是常量，总是相对于一定的问题或在一定的条件下讲的. 譬如：火车在两站之间的行驶速度，在开始阶段或刹车阶段是变量，在正常行驶阶段作严格匀速行驶，则速度就是常量. 还有，如果一个量在所讨论的问题中变化极微，而这种变化所产生的影响又可以忽略，为使问题简化，我们就宁可把它当作常量处理. 由于常量的相对性和变量的绝对性，今后，我们常把常量当作一种特殊的变量来看待. 一般用字母 a, b, c……表示常量，用 x, y, z, s, t……表示变量.

2. 函数的概念

在自然现象或技术过程中往往会出现多个变量，它们之间相互联系，相互依赖，并按照一定的规律变化着.

【例 1.1.3】 圆的面积 S 与半径 r 有关联式：

$$S = \pi r^2$$

【例 1.1.4】 斜边为 10 但两腰不固定的直角三角形，一腰长度为 a，与它所对应角 A 有关联式：

$$a = 10\sin A$$

不难看出，上面两个例子中 S 与 r，a 与 A 存在着确定的对应关系，把这种单值对应关系抽象化就得函数概念.

定义 设 D 是一个非空实数集，x 与 y 是两个变量，若对于任意一个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 都有惟一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，称 D 是这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量或函数.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应规律 f，函数 y 有惟一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

函数值的集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$，称为函数的值域.

【例 1.1.5】 物体在时刻 $t=0$ 从高度为 h 处自由下落(空气阻力忽略不计)，设在时刻 t 下落的距离为 s，则 s 是 t 的函数：

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-1}$$

其中 g 是重力加速度(为常数). 物体到达地面的时间为 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$,所以这个函数的定义域为闭区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

【例 1.1.6】 某种商品的单价是 a(元),其销售金额 y 是销售量 x 的函数:

$$y=ax$$

其定义域为$(0, +\infty)$.

【例 1.1.7】 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,求 $f(-2)$,$f(x+h)$,$f(\frac{1}{x})$,$f[f(x)]$.

解

$$f(-2)=\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}$$

$$f(x+h)=\frac{1}{1-(x+h)}=\frac{1}{1-x-h}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}\quad(x\neq 0,x\neq 1)$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$$

$$=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{x-1}{x}\quad(x\neq 0,x\neq 1)$$

由函数的定义我们可以看出函数关系包含下面两个要素:

(1) 自变量的取值范围,即函数的定义域 D;

(2) 自变量与因变量的对应法则 f.

而函数的值域可由定义域及对应法则所确定. 因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应法则分别都相同时,才表示同一个函数. 至于用什么字母来表示自变量和因变量,则仅仅是一个形式问题.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 5 中定义域为 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$,但式(1-1)对于任何实数 t 都有意义.

若函数关系用解析式表示,不考虑实际意义,规定函数的定义域就是自变量所有可取的使算式有意义的一切实数值. 例如: 函数 $y=\frac{1}{x^2-1}$的定义域为$(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$;函数 $y=\frac{1}{\lg(2x-3)}$的定义域为$\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2, +\infty)$;函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{7}$的

定义域为[−3,4].

如果自变量取定义域内的任一数值时，对应的函数值都只有一个，这样的函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 今后若无特别声明，我们所提及的函数都是单值函数.

有时，我们会遇到这样的函数，在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同的公式来表示，这种函数叫做**分段函数**.

【例 1.1.8】 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

定义域为 $D=(-\infty,\ -\infty)$，值域为 $W=[0,\ +\infty)$，其图形如图 1－2.

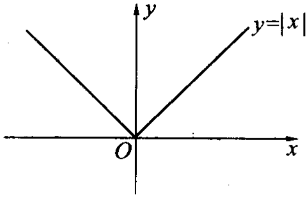

图 1－2

【例 1.1.9】 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

称为符号函数，它的定义域为 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=\{-1,\ 0,\ 1\}$，其图形如图 1－3. 利用该函数可改变某些函数的表达形式，如例 1.1.8 中函数可改写为：

$$y=|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$$

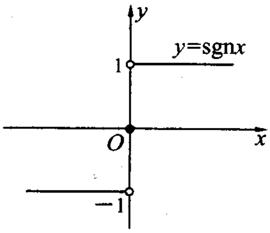

图 1－3

【例 1.1.10】 设变量 y 为不超过 x 的最大整数部分，记为$[x]$. 则：

$$y=[x]=\begin{cases} \cdots\cdots & \\ -2, & -2\leqslant x<-1 \\ -1, & -1\leqslant x<0 \\ 0, & 0\leqslant x<1 \\ 1, & 1\leqslant x<2 \\ 2, & 2\leqslant x<3 \\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

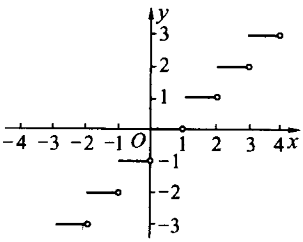

图 1－4

它的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为一切整数，图形（如图 1－4）称为阶梯曲线，此函数称为取整函数.

【例 1.1.11】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，并作出 $y=f(x)$ 的图形.

解 $f(-1)=(x+1)\big|_{x=-1}=0$

$$f(0) = 0$$
$$f(2) = (x-1)\big|_{x=2} = 1$$

$y = f(x)$ 的图形如图 1－5 所示.

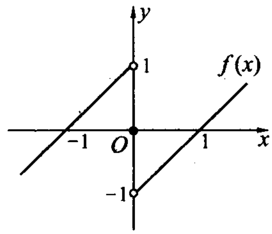

图 1－5

3. 函数的表示法

最常见的函数表示方法有三种：

(1) 解析法. 将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法，称为解析法，也称为公式法.

(2) 表格法. 将自变量的值与对应的函数值列成表的方法，称为表格法. 如平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系.

(3) 图像法. 在坐标系中用图形来表示函数的关系的方法，称为图像法.

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在常数 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界，或说 $f(x)$ 是 I 上的有界函数；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如：函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对于一切实数成立(取 $M=1$). 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上有界，因为对任何 $x\in[2, +\infty)$，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$(取 $M=\dfrac{1}{2}$)；但 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上无界，因为不存在 $M>0$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对 $(0, 2)$ 内任意 x 都成立. 可见函数的有界性是相对于某区间而言的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的，区间 I 称为单调增加(单调减少)区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数；单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有意义，且区间 I 关于原点对称，若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在常数 $l\neq 0$，对于任意 $x\in I$，有 $x+l\in I$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$为周期函数,l 为周期.满足等式的最小正数 l 称为基本周期或最小周期.

四、反函数

定义　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W. 若对于任意 $y\in W$, D 中都有惟一确定的 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$,则得到一个定义在 W 上,以 y 为自变量,以 x 为因变量的新函数 $x=\phi(y)$,称之为 $y=f(x)$的反函数,而 $y=f(x)$称为直接函数.

由于习惯用 x 表示自变量,y 表示函数,所以往往把 $x=\phi(y)$改写为 $y=\phi(x)$,常记为 $y=f^{-1}(x)$.

五、基本初等函数

常数函数　$y=c$, c 为常数,定义域为$(-\infty, +\infty)$.

幂函数　$y=x^{\mu}$, μ 为任意实数,定义域随 μ 而定,无论 μ 为何值函数在$(0, +\infty)$内都有意义.

指数函数　$y=a^{x}$, $a>0$, $a\neq 1$,定义域为$(-\infty, +\infty)$.

对数函数　$y=\log_{a}x$, $a>0$, $a\neq 1$,定义域为$(0, +\infty)$.

三角函数　$y=\sin x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$;

$y=\cos x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$;

$y=\tan x$,定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,k 为整数;

$y=\cot x$,定义域为 $x\neq k\pi$,k 为整数.

反三角函数　$y=\arcsin x$,定义域为$[-1, 1]$;

$y=\arccos x$,定义域为$[-1, 1]$;

$y=\arctan x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$;

$y=\mathrm{arccot}\, x$,定义域为$(-\infty, +\infty)$.

以上基本初等函数的性质在中学已经讲过,这里不再重复.

六、复合函数

设函数 $y=f(u)$,而 $u=\phi(x)$,且 $\phi(x)$的值域全部落在 $f(u)$的定义域内,则函数 $y=f[\phi(x)]$是 x 的函数,称此函数为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\phi(x)$复合而成的复合函数,称 u 为中间变量.

【例 1.1.12】　由物理学知道,质点的动能 E 是速度 v 的函数.

$$E=\frac{1}{2}mv^{2}$$