



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

全程导学及习题全解
合订本

同济大学第五版

主 编 周 琰
副主编 孟 慧 杨 春
主 审 王进良

- ◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆ 习题详解 精确解答教材习题
- ◆ 提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

全程导学及习题全解
合订本

同济大学第五版

主 编 周 琬
副主编 孟 慧 杨 春
主 审 王进良

- ◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆ 习题详解 精确解答教材习题
- ◆ 提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学全程导学及习题全解: 合订本/周珑主编. —北京: 中国时代经济出版社, 2006.9

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 7 - 80221 - 121 - 2

I. 高… II. 周… III. 高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 090377 号

高等
数学
全程
导学
及习
题全
解
(合
订本)

周
珑
主
编

出 版 者	中国时代经济出版社
地 址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦东办公区 11 层
邮政编码	100007
电 话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传 真	(010)68320634
发 行	各地新华书店
印 刷	北京市白帆印务有限公司
开 本	880 × 1230 1/32
版 次	2006 年 9 月第 1 版
印 次	2006 年 9 月第 1 次印刷
印 张	22.25
字 数	570 千字
印 数	1 ~ 5000 册
定 价	23.00 元
书 号	ISBN 7 - 80221 - 121 - 2/G·069

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书是根据高等教育出版社出版的,同济大学应用数学系主编的《高等数学》(上、下册)(第五版)的一本配套的学习辅导和习题解答教材。全书紧扣教材内容,针对各章节全部习题给出详细解答,思路清晰,逻辑缜密,循序渐进的帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼,帮助读者梳理各章脉络,统揽全局。在《高等数学》(第五版)(上、下册)教材习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表性的题型,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为在校大学生和自考生学习《高等数学》(第五版)(上、下册)课程的教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书,也可以作为《高等数学》(第五版)(上、下册)课程教师的教学参考书。

前 言

《高等数学》是解决理工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具,也是理工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《高等数学》(第五版)(上、下册)课程的理论精髓和解题方法,我们根据同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)教材,编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据《高等数学》(第五版)教材中每一章的内容,编写了以下几方面的内容:本章小结:精练了各章中的主要知识点,理清各知识点之间的脉络联系,囊括了主要定理及相关推论和重要公式等,帮助读者迅速了解本章重要知识点,系统理解各章的体系结构,奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解:精选具有代表性的重点题型进行讲解,分析问题的突破点,指引解决问题的思路,旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题全解:依据教材各章节的习题,进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求,在解答过程中,对于重点和难点习题进行了分析和讲解,归纳解题技巧。

自测题:根据教学要求、教学重点,编写了一套难易适中的自测题,并对自测题进行了详细的解答。

本教材由周琰、孟慧、杨春等同志编写,全书由王进良老师主审。王进良老师高深的造诣、严谨的治学态度,使编者受益匪浅,

对此深表感谢。本书编写过程中得到杜心康、宁建建等同志的大力协助,并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持,为此表示衷心的感谢!对《高等数学》(第五版)教材的作者——同济大学应用数学系的老师们,表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,本书难免有缺点和疏漏,存在一些不妥之处,敬请各位专家及广大读者批评指正。

编 者

2006年8月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
本章重点内容导学	(1)
典型例题讲解	(2)
习题全解	(6)
习题 1-1	(6)
习题 1-2	(16)
习题 1-3	(19)
习题 1-4	(22)
习题 1-5	(25)
习题 1-6	(27)
习题 1-7	(29)
习题 1-8	(31)
习题 1-9	(34)
习题 1-10	(37)
总习题一	(39)
同步自测题及解析	(45)
第二章 导数与微分	(49)
本章重点内容导学	(49)
典型例题讲解	(50)
习题全解	(53)
习题 2-1	(53)
习题 2-2	(57)
习题 2-3	(65)
习题 2-4	(68)
习题 2-5	(74)
总习题二	(79)
同步自测题及解析	(84)

第三章 微分中值定理与导数的应用	(88)
本章重点内容导学	(88)
典型例题讲解	(88)
习题全解	(93)
习题 3-1	(93)
习题 3-2	(98)
习题 3-3	(101)
习题 3-4	(104)
习题 3-5	(113)
习题 3-6	(120)
习题 3-7	(126)
习题 3-8	(129)
总习题三	(132)
同步自测题及解析	(140)
第四章 不定积分	(144)
本章重点内容导学	(144)
典型例题讲解	(144)
习题全解	(150)
习题 4-1	(150)
习题 4-2	(155)
习题 4-3	(163)
习题 4-4	(169)
习题 4-5	(176)
总习题四	(183)
同步自测题及解析	(194)
第五章 定积分	(199)
本章重点内容导学	(199)
典型例题讲解	(199)
习题全解	(206)
习题 5-1	(206)
习题 5-2	(212)
习题 5-3	(216)
习题 5-4	(225)

习题 5-5	(227)
总习题五	(231)
同步自测题及解析	(240)
第六章 定积分的应用	(246)
本章重点内容导学	(246)
典型例题讲解	(246)
习题全解	(251)
习题 6-2	(251)
习题 6-3	(263)
总习题六	(268)
同步自测题及解析	(270)
第七章 空间解析几何与向量代数	(274)
本章重点内容导学	(274)
典型例题讲解	(274)
习题全解	(280)
习题 7-1	(280)
习题 7-2	(284)
习题 7-3	(288)
习题 7-4	(291)
习题 7-5	(294)
习题 7-6	(296)
总习题七	(302)
同步自测题及解析	(309)
第八章 多元函数微分法及其应用	(313)
本章重点内容导学	(313)
典型例题讲解	(314)
习题全解	(320)
习题 8-1	(320)
习题 8-2	(324)
习题 8-3	(330)
习题 8-4	(336)
习题 8-5	(346)
习题 8-6	(352)

习题 8-7	(357)
习题 8-8	(361)
习题 8-9	(366)
习题 8-10	(370)
总习题八	(372)
同步自测题及解析	(382)
第九章 重积分	(386)
本章重点内容导学	(386)
典型例题讲解	(386)
习题全解	(392)
习题 9-1	(392)
习题 9-2	(395)
习题 9-3	(418)
习题 9-4	(428)
习题 9-5	(444)
总习题九	(449)
同步自测题及解析	(461)
第十章 曲线积分与曲面积分	(466)
本章重点内容导学	(466)
典型例题讲解	(466)
习题全解	(471)
习题 10-1	(471)
习题 10-2	(478)
习题 10-3	(485)
习题 10-4	(494)
习题 10-5	(501)
习题 10-6	(505)
习题 10-7	(510)
总习题十	(517)
同步自测题及解析	(528)
第十一章 无穷级数	(532)
本章重点内容导学	(532)
典型例题讲解	(533)

习题全解	(538)
习题 11-1	(538)
习题 11-2	(544)
习题 11-3	(549)
习题 11-4	(554)
习题 11-5	(557)
习题 11-6	(561)
习题 11-7	(565)
习题 11-8	(573)
总习题十一	(578)
同步自测题及解析	(589)
第十二章 微分方程	(594)
本章重点内容导学	(594)
典型例题讲解	(595)
习题全解	(600)
习题 12-1	(600)
习题 12-2	(603)
习题 12-3	(610)
习题 12-4	(620)
习题 12-5	(629)
习题 12-6	(636)
习题 12-7	(645)
习题 12-8	(651)
习题 12-9	(657)
习题 12-10	(668)
习题 12-11	(672)
习题 12-12	(677)
总习题十二	(686)
同步自测题及解析	(700)

第一章 函数与极限

本章重点内容导学

一、映射与函数

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素

定义域
对应规律

3. 函数的特性

有界性、奇偶性、单调性、周期性

4. 初等函数的类型

二、极限

1. 数列的极限

(1) “ $\epsilon-N$ ”定义及其应用

(2) 收敛数列的性质

唯一性、有界性、保号性

(3) 极限存在准则

夹逼准则、单调有界准则、柯西准则

2. 函数的极限

(1) “ $\epsilon-\delta$ ”定义及其应用

(2) 函数极限的性质

唯一性、局部保号性

3. 无穷小与无穷大的定义、关系

4. 极限运算法则及存在准则

5. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

三、函数的连续性

1. 函数的连续性

2. 函数的间断点

第一类间断点: $\begin{cases} \text{可去间断点} \\ \text{跳跃间断点} \end{cases}$

第二类间断点: $\begin{cases} \text{无穷间断点} \\ \text{振荡间断点} \end{cases}$

3. 连续函数的和、差、积、商的连续性

4. 闭区间上连续函数的有界性与最大值最小值定理, 零点定理与介值定理.

典型例题讲解

例1 求函数 $f(x) = \arcsin \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\ln(x-\frac{1}{2})}$ 的定义域.

解 当 $\arcsin \sqrt{3x-1}$ 和 $\ln(x-\frac{1}{2})$ 同时有定义时, 函数才有定义.

$$\text{所以} \begin{cases} 0 \leq \sqrt{3x-1} \leq 1 \\ 3x-1 \geq 0 \\ x-\frac{1}{2} > 0 \\ x-\frac{1}{2} \neq 1 \end{cases}$$

解上述不等式可得

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}$ 或 $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$.

例2 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 求 $f(2x + \frac{1}{2}) + f(2x - 1)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 要使 $f(2x + \frac{1}{2}) + f(2x - 1)$ 同时有定义.

$$\text{可得} \begin{cases} -1 < 2x + \frac{1}{2} < 1 \\ -1 < 2x - 1 < 1 \end{cases}$$

解不等式可得

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $0 < x < \frac{1}{4}$ 或 $(0, \frac{1}{4})$.

例3 设 $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1+x & x \leq 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$

求 $f[g(x)]$, $f[f(x)]$, $g[g(x)]$.

$$\text{解 } f[g(x)] = \begin{cases} f(-x^2) & x > 0 \\ f(x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x^2 & x > 0 \\ 1+x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f[f(x)] = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ f(1+x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1+x & -1 < x \leq 0 \\ 2+x & x \leq -1 \end{cases}$$

$$g[g(x)] = \begin{cases} g(-x^2) & x > 0 \\ g(x) & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

例4 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}} (0 \leq a \leq 1)$.

解 当 $0 \leq a \leq 1$ 时,

$$1 \leq \sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}} \leq \sqrt[n]{4}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4} = 1.$$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} = 0.$$

例6 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x-3} \\ &= \frac{2+4}{2-3} = -6. \end{aligned}$$

例7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解 解法一} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+2x)^{\frac{1}{2x}})^2 = e^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2\sin x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x}} = e^2. \end{aligned}$$

例8 求 $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{12}{x^3-8} - \frac{1}{x-2})$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{12}{x^3-8} - \frac{1}{x-2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12-(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2-2x+8}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+4)}{x^2+2x+4} \\ &= -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例9 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2}{1+2x} + ax + b) = 2$, 求常数 a, b .

$$\begin{aligned} \text{解 由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2}{1+2x} + ax + b) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + (ax+b)(1+2x)}{1+2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+2a)x^2 + (a+2b)x + b}{1+2x} = 2 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{cases} 1+2a=0 \\ \frac{a+2b}{2}=2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{9}{4}.$$

例10 设 $f(x) = ax^2 + bx, g(x) = \sin 2x$

试讨论当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 无穷小量的关系.

解 $g(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \sim 2x$

$\therefore$ 当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的二阶无穷小量;

当 $a = 0$, 且 $b = 2$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小量;

当 $a = 0, b \neq 2$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小量.

$$\text{例11 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} & x < 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} & x > 0 \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2 \sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -3a \sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2}+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -6a \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \cdot \frac{x}{4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \cdot \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \cdot \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} \\
 &= 2a^2 + 4
 \end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则有

$$\begin{cases} -6a=6 \\ -6a=2a^2+4 \end{cases}$$

解方程可得 $a=-1$

$\therefore$ 当 $a=-1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 12 证明方程 $x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1 = 0$ 在区间 $[-1, 0]$ 上有一个根.

证明 令 $f(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1$

则 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续

而且 $f(0) = 1 > 0$, $f(-1) = -1 < 0$.

由零点定理可知在 $[-1, 0]$ 内至少存在一点 $\xi (-1 < \xi < 0)$,

使得 $f(\xi) = 0$

$\therefore \xi$ 是 $x^6 - 2x^5 + 5x^3 + 1 = 0$ 在 $[-1, 0]$ 之间的一个根.

习题全解

习题 1-1

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3)$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.