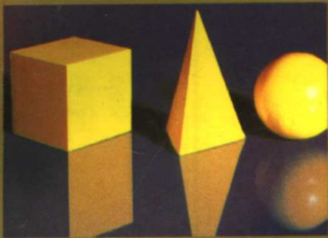
课课通金库



三年级

初中几何课课通

金库

金库

海南国际新闻出版中心

·课课通金库·

初中几何课课通

·三年级·

主　编：石　俊
副主编：纪坤鹏　戴　颖　吴道圣　朱晓林
编　写：纪坤鹏　戴　颖　戴　军　吴道圣
石强生　尤素萍　吴志贤　钱克[illegible]
朱晓林　李冰倩　韩颖忠

海南国际新闻出版中心

琼新登字 05 号
责任编辑 邱 禹

·课课通全库·

初中几何课课通

·三年级·

石 俊 主编

海南国际新闻出版中心出版发行
(海南省海口市海府--横路华宇大厦)
安徽省南陵县印刷厂
787×1092 毫米 开本 32 印张 9.7
印数 1—15000 册
1997 年 7 月第一版 1997 年 7 月第一次印刷

ISBN 7—80609—542—X/G·341
定价:9.70 元

前　言

为了帮助初中生更好地掌握每课的教学内容，培养学生的自学能力，使所学的基础知识更为扎实，我们约请全国多所重点中学的特级和高级教师精心编撰了这套《课课通金库》，共十五册。参加撰稿的老师都是重点中学的学科带头人和业务骨干，他们具有丰富的教学经验和命题经验，对教学艺术素有研究，精通教材，熟悉了解学生学习中的难点、疑点、重点和考点。这套书可以说是他们多年教学经验的结晶。

这套丛书是严格按照国家教委九年义务教育新大纲、新教材的要求精心编写的，在帮助学生梳理知识网络的基础上，强化识记内容，突出重点和难点。又通过典型题解，提高学生的理解与运用能力，增强辨误纠错的技巧，从而达到知识与能力并重，理解与运用兼备的目的。

针对各门学科的特点，这套丛书在编排和栏目设置上匠心独运，精心设计，科学安排。内容编排详略得当，循序渐进。栏目新颖实用，覆盖了各科的知识点、能力点。有些学科并安排了期中、期末试卷，分A、B卷。A卷为普及型，有助于学生把握采分点，取得优秀成绩；B卷为提高型，以利于学有余力的学生进行超能训练，强化、巩固、提高所学的知识。

希望这套《课课通金库》能有助于学生巩固课堂所学的知识，同时也帮助学生开拓视野，扩展思路，提高能力，成为每一位学生的良师益友。

海南国际新闻出版中心

目　　录

第六章　解直角三角形

一、锐角三角函数

要点归纳

1. 正弦、余弦和正切、余切的概念

如图 6-1：$\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$

则 $\sin A=\cos B=\dfrac{a}{c}$

$\sin B=\cos A=\dfrac{b}{c}$

$\mathrm{tg}A=\dfrac{a}{b}$　$\mathrm{ctg}A=\dfrac{b}{a}$

$\mathrm{tg}B=\dfrac{b}{a}$　$\mathrm{ctg}B=\dfrac{a}{b}$

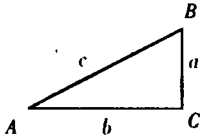


图 6-1

2. 正弦与余弦的取值范围

$\because 0<a<c$　　$0<b<c$

$\therefore 0<\sin A<1$　$0<\cos A<1$（$\angle A$ 为锐角）

3. 锐角三角函数之间的关系

(1) $\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$　(2) $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$

(3) $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)$　(4) $\mathrm{ctg}\alpha=\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)$

(5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　(6) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$

4. 特殊角的正弦、余弦、正切、余切值

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\mathrm{ctg}\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. 正弦、余弦、正切、余切的变化情况

当角度在 0°～90°间变化时，正弦、正切值随着角度的增大(减小)而增大(减小)，余弦、余切值随着角度的增大(减小)而减少(增大)。

6. 查表时修正值的使用

当角度增加时，正弦正切值要加上修正值，余弦、余切值要减去修正值；反之，由正弦、余弦、正切、余切值求角度时，也要注意这个问题。

重点难点

1. 正弦、余弦、正切、余切的概念是重点。

2. 同角三角函数间的关系的应用和转化是难点。

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(2)商数关系：$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(3)倒数关系：$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$

3. 互余两角的三角函数间的关系的应用和转化是重点也是

难点。

(1)$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$　(2)$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$

(3)$tg\alpha=ctg(90°-\alpha)$　(4)$ctg\alpha=tg(90°-\alpha)$

典型例题

例 1　如图 6-2 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$　$BC=5, AC=6$。

(1)求 $\sin A, \sin B$ 的值；

(2)过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，求 $\cos\angle ACD$ 的值。

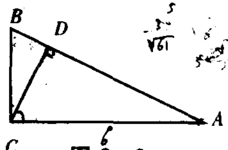


图 6-2

分析　(1)求 $\sin A$、$\sin B$ 的值，先找出以 $\angle A$、$\angle B$ 为锐角的直角三角形，再求出它们的对边与斜边的比，为此要先由勾股定理求斜边 AB。

(2)求 $\cos\angle ACD$ 可以在直角三角形 ACD 中求其邻边 CD 和斜边 AC 的比，但较烦，运用直角三角形两锐角互余、同角的余角相等，将求 $\cos\angle ACD$ 转化为求 $\cos B$，则较容易。

解(1)　$\because AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{61}$

$$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{\sqrt{61}}=\frac{5\sqrt{61}}{61}$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{\sqrt{61}}=\frac{6\sqrt{61}}{61}$$

(2)　$\because \angle ACB=90°, \therefore \angle A+\angle B=90°$

$\because CD\perp AB$　$\therefore \angle ACD+\angle A=90°$

$\therefore \angle ACD=\angle B$

$$\therefore \cos\angle ACD=\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{5\sqrt{61}}{61}$$

例 2 如图 6-3，已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，AD是角平分线，且$BD:CD=4:3$，求$\sin B$的值。

分析 要求$\sin B$，由定义只要求$\dfrac{AC}{AB}$，但有困难，可考虑过D作AC的平行线交AB于E，得$\mathrm{Rt}\triangle BDE$，求出$\dfrac{DE}{BE}$，即得。

解 作$DE/\!/AC$交AB于E。

即得$\angle EDA=\angle DAC$

$\because \angle EAD=\angle DAC$

$\therefore \angle EDA=\angle EAD$

$\therefore DE=EA$

$\because DE/\!/AC \quad \therefore \dfrac{BE}{EA}=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \dfrac{BE}{ED}=\dfrac{4}{3}$，在$\triangle BDE$中，$\angle BDE=90^\circ$

$\therefore \sin B=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{3}{4}$。

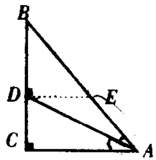


图 6-3

例 3 若A为锐角，证明：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

分析 欲证上式，首先应作出以锐角A为一内角的直角三角形（$\angle C=90^\circ$）如图 6-4，设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c，则$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，这样就可将上式的左端转化为直角三角形的三边关系，再应用勾股定理即可得证。

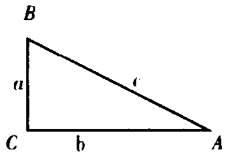


图 6-4

证明 作以A为一内角的直角三角形ABC（$\angle C=90^\circ$）

则 $\sin A=\dfrac{a}{c}\quad \cos A=\dfrac{b}{c}$

$\therefore \sin^2 A+\cos^2 A=\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$

又 $\because \angle C=90^\circ \quad \therefore a^2+b^2=c^2$

$\therefore \sin A+\cos^2 A=\dfrac{c^2}{c^2}=1$

说明 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 是同一锐角的正弦、余弦之间的重要关系，今后的学习中应用很广泛，必须掌握。

例 4 化简 $\sqrt{1-2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}-\sqrt{1+2\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}$。

分析 化简本题的关键是将被开方数化成完全平方的形式，为此需逆向运用 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，将 1 化为 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ$ 及 $\sin^2 80^\circ+\cos^2 80^\circ$。

解 原式 $=\sqrt{\sin^2 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\cos^2 10^\circ}-$

$\sqrt{\sin 80^\circ+2\sin 80^\circ\cos 80^\circ+\cos^2 80^\circ}$

$=\sqrt{(\sin 10^\circ-\cos 10^\circ)^2}-$

$\sqrt{(\sin 80^\circ+\cos 80^\circ)^2}$

$=|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|-|\sin 80^\circ+\cos 80^\circ|$

$=|\sin 10^\circ-\sin 80^\circ|-|\sin 80^\circ+\sin 10^\circ|$

$=(\sin 80^\circ-\sin 10^\circ)-(\sin 80^\circ+\sin 10^\circ)$

$=\sin 80^\circ-\sin 10^\circ-\sin 80^\circ-\sin 10^\circ$

$=-2\sin 10^\circ$

例 5 查表求 $\sin 38^\circ 26'$ 和 $\cos 38^\circ 26'$ 的值。

解 $\sin 38^\circ 24'=0.6211$

$(+2')\quad (+0.0005)$

$\sin 38^\circ 26'=0.6216$

$\cos 38°24' = 0.7837$

$(+2')\quad(-0.0004)$

$\cos 38°26' = 0.7833$

说明 在用修正值表时，正弦为“角加值加”，“角减值减”，余弦则为“角加值减”，“角减值加”，要注意区别，以防出错。

例 6 如图 6-5 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$ $a=5$ $c=13$，求$\angle B$(精确到 1°)。

分析 要求$\angle B$，只要求出$\angle B$的正弦或余弦值，再查表，而已知$\angle B$的邻边和斜边，故用余弦。

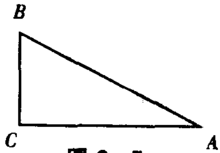


图 6-5

解 $\because \cos B=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5}{13}\approx 0.3846$

$\therefore$查表得 $\angle B\approx 67°$

例 7 计算$(3\text{tg}30°)^{31}\cdot(\dfrac{1}{3}\text{ctg}30°)^{30}$

分析 对原题的结构观察后知，为了使运算简捷，应先把题中的某些乘方的积转化为积的乘方。

解 原式$=3\cdot\text{tg}30°\cdot[3\text{tg}30°)^{30}\cdot(\dfrac{1}{3}\text{ctg}30°)^{30}]$

$=3\text{tg}30°\cdot[3\text{tg}30°\cdot\dfrac{1}{3}\text{ctg}30°]^{30}$

$=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1^{30}=\sqrt{3}$

例 8 化简 $\sqrt{\text{tg}^2 15°+\text{ctg}^2 15°+2}-(\text{tg}15°+\text{tg}75°)-\text{ctg}45°+\text{tg}^2 30°$

分析 解决本题的关键是应用$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha\neq 1$，将被开方数化为完全平方的形式，以及应用$\text{tg}(90°-\alpha)=\text{ctg}\alpha$将 tg75°化为

$\text{ctg}15°$。

解 原式 $= \sqrt{\text{tg}^2 15° + 2\text{tg}15°\text{ctg}15° + \text{ctg}^2 15°} - (\text{tg}15° +$

$\text{tg}75°) - 1 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2$

$= \sqrt{\text{tg}15° + \text{ctg}15°} - (\text{tg}15° + \text{ctg}15°) - 1 + \frac{1}{3}$

$= \text{tg}15° + \text{ctg}15° - \text{tg}15° - \text{ctg}15° - \frac{2}{3}$

$= -\frac{2}{3}$

例 9 如图 6-6 在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$a = 20$，$\angle B = 55°$，求 b(保留两个有效数字)。

分析 由已知 a 和$\angle B$，求 b 可选用以下的两个关系式中的一个：

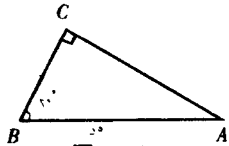


图 6-6

(1)由 $\text{tg}B = \frac{b}{a}$ 得 $b = a\text{tg}B$

(2)由 $\text{ctg}B = \frac{a}{b}$ 得 $b = \frac{a}{\text{ctg}B}$

显然(1)算划比较方便。

解 $\because \text{tg}B = \frac{b}{a}$

$\therefore b = a \cdot \text{tg}B = 20 \cdot \text{tg}55° = 20 \times 1.4281 \approx 29$

例 10 如图 6-7 已知$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$CD \perp AB$于 D，且 $AD : BD = 9 : 4$，求 $\text{tg}A$ 的值。

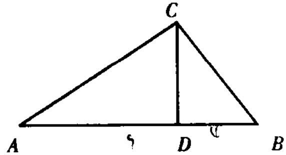


图 6-7

分析 要求 $\text{tg}A$ 的值，只要

在直角三角形 ABC 中求 $\frac{BC}{AC}$，或在直角三角形 ACD 中求 $\frac{CD}{AD}$，由条件 $\angle C=90^\circ$，$CD\perp AB$，可得 $BC^2=BD\cdot AB$，$AC^2=AD\cdot AB$，从而可求得 $\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{BD}{AD}=\frac{4}{9}$，于是有 $\frac{BC}{AC}=\frac{2}{3}$。

解 $\because \angle C=90^\circ \quad CD\perp AB$

$\therefore BC^2=BD\cdot AB \cdot AC^2=AD\cdot AB$

$\therefore \frac{BC^2}{AC^2}=\frac{BD\cdot AB}{AD\cdot AB}=\frac{BD}{AB}=\frac{4}{9}$

$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{2}{3} \quad \therefore \mathrm{tg}A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}$

例 11 已知 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\frac{4\cos\alpha-5\sin\alpha}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$ 的值。

分析 由已知 $\mathrm{tg}\alpha$ 的值及式子中所含的函数为 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，我们很容易想到由 $\mathrm{tg}\alpha$ 求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值后代入式子求值的方法，而通过进一步分析我们发现，$\mathrm{tg}\alpha$、$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 这三者之间，存在着商数关系，若把分式中的分子、分母当中的各项同除以 $\cos\alpha$，则原式中只含有 $\mathrm{tg}\alpha$ 和常数了，这样就可以把 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{5}$ 直接代人求原式的值，从而使运算过程变得非常简单。

解 原式 $=\dfrac{\frac{4\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{4-5\mathrm{tg}\alpha}{2+3\mathrm{tg}\alpha}$

$$=\frac{4-5\times\frac{3}{5}}{2+3\times\frac{3}{5}}=\frac{5}{19}$$

例 12 查表求下列正切值或余切值：

(1) $\mathrm{tg}64^\circ24'$ (2) $\mathrm{tg}79^\circ51'$

(3)$\mathrm{ctg}15°18'$　　(4)$\mathrm{ctg}7°44'$

分析　和正弦表一样，正切表也是“顺”着查，即从表的左边看度数，表的顶端看分数；而余切表也是“倒”着查，即在表的右边的一列中查找度数，在表的底端查分数。

查表时，不仅要看小数点后的四位数字，还要注意整部分是几，因为正切值和余切值也不像正弦或余弦那样，整数部分一般都是零。

解　(1)$\mathrm{tg}64°24' = 2.087$

(2)$\mathrm{tg}79°51' = 5.586$

(3)$\mathrm{ctg}15°18' = 3.655$

(4)$\mathrm{ctg}7°44' = 7.364$

例 13　查表求下列正切值或余切值：

(1)$\mathrm{tg}30°49'$　　(2)$\mathrm{ctg}14°32'$

(3)$\mathrm{tg}49°28'$　　(4)$\mathrm{ctg}34°16'$

分析　查本题各角度的正切值或余切值都要用到修正值，使用原则和正、余弦表一样，通过观察不难发现：

(1)当角度在 0°～90°间变化时，正切值随着角度的增大(或减小)而增大(或减小)；

(2)当角度在 0°～90°间变化时，余切值随着角度的增大(或减小)而减小(或增大)。

解　(1)$\mathrm{tg}53°48' = 1.3663$　(2)$\mathrm{ctg}14°30' = 3.867$

$(+1')\ +0.0008$　　$(+2')\ (-0.009)$

$\therefore \mathrm{tg}53°48' = 1.3671$　$\therefore \mathrm{ctg}14°30' = 3.858$

(3)$\mathrm{tg}\ 49°30' = 1.1708$　(4)$\mathrm{ctg}\ 34°18' = 1.4659$

$(-2)\ (-0.0014)$　　$(-2)\ (+0.0018)$

$\therefore \mathrm{tg}49°28' = 1.1694$　$\therefore \mathrm{ctg}34°10' = 1.4677$

例 14 已知下列正切值或余切值：求锐角 A 或 B

(1)$\mathrm{tg}A=1.4036$ (2)$\mathrm{ctg}A=0.8637$

(3)$\mathrm{tg}B=7.226$ (4)$\mathrm{ctg}B=2.325$

分析 查表的方法和正弦表、余弦表的方法基本上相同，仍要注意使用修正值处理余差时，正切和余切在加、减上的区别，在出现的余差与修正值不一致时，如何选用最接近的值使误差最小。

解 (1)$1.4019=\mathrm{tg}\ 54°30'$

$(+0.0017)\ (+2')$

$\therefore$锐角 $A=54°32'$

(2)$0.8632=\mathrm{ctg}\ 49°12'$

$+0.0005\quad(-1')$

$\therefore$锐角 $A=49°11$

(3)$\because 7.222=\mathrm{tg}82°7'$ 且这是表中最接近的数

$\therefore$锐角 $B=82°7'$

(4)$2.322=\mathrm{ctg}\ 23°18'$

$(+0.002)\ (-1')$

$2.324=\mathrm{ctg}23°17'$ （最接近）

$\therefore$锐角 $B=23°17'$

错题分析

例 1 $\sin2\alpha$ 与 $2\sin\alpha$ 恒等吗？为什么？

错误解法

由乘法交换律得：$\sin2\alpha=2\sin\alpha$，即 $\sin2\alpha$ 与 $2\sin\alpha$ 是恒等的。

正确解法

$\sin 2\alpha$ 与 $2\sin\alpha$ 不恒等，例如 $\alpha=30°$时

$$\sin 2\alpha=\sin(2\times 30°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

而 $2\sin\alpha=2\sin 30°=2\times\frac{1}{2}=1$

分析 $\sin 2\alpha$ 是一个完整的记号，它不表示 $\sin\cdot 2\alpha$，因此，不能用乘法交换律来说明 $\sin 2\alpha$ 与 $2\sin\alpha$ 恒等，上面的正确答案中，也说明两者是不恒等的。

例 2 你能不能找到一个角 α 使 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$？为什么？

错误解法

能，因为，$0<\frac{2}{3}<1$，$0<\frac{4}{5}<1$，符合正弦值和余弦值的范围

正确解法

不能，因为，$\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 是相互联系的，必须满足关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

而 $(\frac{2}{3})^2+(\frac{4}{5})^2=\frac{244}{225}\neq 1$

所以找不到这样的角 α。

分析 上面的错误解答，把 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 割裂开来，孤立地看待它们的取值范围，却没有看到同一个角的正弦与余弦之间的联系，因而得出了错误的解答。客观事物之间往往存在着相互影响，相互制约的内在联系，在数学问题中经常遇到这种情况，上面的错误解答便是一个明显的例证，因此，要求在解答数学问题时，要随时防止由于孤立地看待问题以致得出不全面的或者完全错误的结论。

例 3 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$,求锐角 α 的正切值。

错误解法

$$\because \sin\alpha=\frac{15}{17}\quad \text{即}\frac{a}{c}=\frac{15}{17}\Rightarrow\begin{cases}a=15\\c=17\end{cases}$$

$$\therefore b=\sqrt{17^2-15^2}=8$$

$$\therefore \mathrm{tg}2=\frac{a}{b}=\frac{15}{8}$$

正确解法

由 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$,即 $\dfrac{\alpha}{c}=\dfrac{15}{17}$

设 $a=15k\quad c=17k(k>0)$

$\because \alpha$ 是锐角

$$\therefore b=\sqrt{(17k)^2-(15k)^2}=8k$$

$$\therefore \mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{15k}{8k}=\frac{15}{8}$$

分析 在 $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$ 中,$\dfrac{a}{c}$ 是一个比值,因此由 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{15}{17}$,不能认为 $a=15$ 而 $c=17$,上面的错误解答,虽然答数 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{15}{8}$ 是对的,但计算过程又犯了以特殊代替一般的错误。必须明确:$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$ 等三角函数分别表示一个比值,应当如上面的正确解答,设比例系数 k 求解。

例 4 已知 α 是一个锐角,且 $\sin\alpha=\dfrac{2}{7}$,求 $\cos\alpha$ 的值。

错误解法

由公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

得 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(\dfrac{2}{7})^2=\dfrac{45}{49}$