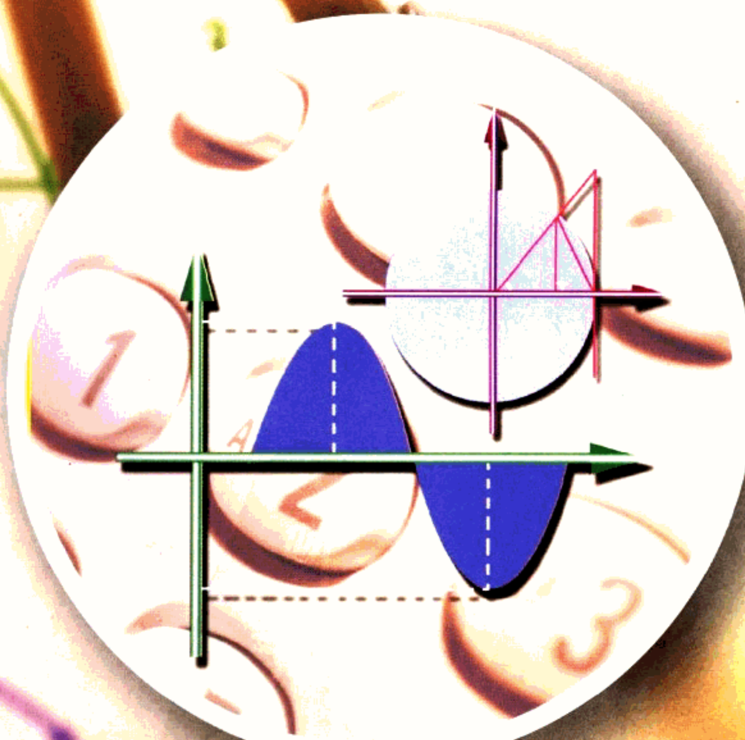
高中学科素质教育丛书

数学

SHUXUE

高中一年级（下）



四川出版集团·四川教育出版社

高中学科素质教育丛书

数　　学

高中一年级（下）

本册主编　李　勇

审　　定　邹祥明

编　　著　张彬政　赖建军

李正国　唐代勇

钟　伟　彭晓金

曾　勇　宋　刚

周贤章　李茂江

海唯一　林大平

四川出版集团

四川教育出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高中学科素质教育丛书．数学．一年级．下/李勇编．
成都：四川教育出版社，2005 （2006 重印）
ISBN 7－5408－4043－9

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课－高中－教学参考
资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 009557 号

责任编辑	何伍鸣　刘　任
版式设计	张　涛
封面设计	金　阳
责任校对	伍登富
责任印制	黄　萍
出版发行	四川出版集团　四川教育出版社 （成都市槐树街 2 号　　邮政编码　610031）
出 版 人	安庆国
印　　刷	内江市龙华档案印务有限公司印刷
版　　次	2005 年 2 月第 1 版
印　　次	2006 年 1 月第 2 次印刷
成品规格	185mm × 260mm
印　　张	8.75
字　　数	222 千
印　　数	15401－33200 册
定　　价	8.75 元

本书若出现印装质量问题，请与本社调换。电话：（028）86259359
编辑部电话：（028）86259381　　邮购电话：（028）86259694

前　言

为了让广大高中师生更好地理解新教材、用好新教材，四川教育出版社组织众多专家，经过反复研讨、论证，共同编写出一套适合素质教育、配合高中新教材使用的新的助学读物——“高中学科素质教育丛书”。丛书包括高中一年级的诸学科：语文、数学、英语、物理、化学、历史、思想政治、地理、信息技术。高中二年级则为：语文、数学、英语、物理、化学、生物或思想政治、历史、地理。各科均由经验丰富、功力深厚的优秀特级、高级教师和教研员执笔编写，并特约了各学科的权威教师对书稿进行仔细的审查和修改。编者根据各学科的不同特点，集合成不同板块，大体由“知识要点重点提示”、“学科素质要求”、“典型例题解析”、“素质能力训练”等板块（各书根据具体情况有所不同）构成，与教学同步。此外，各学科在章节（或单元）教学结束、期中和期末，还为学生设计了“综合素质检测（或单元检测等另外叫法）”，便于师生对照检查教学效果。各种“训练”和“检测”，均附有参考答案。

这套丛书的最大特点是一个“新”字。

一是与新教材配套。能让广大师生从教和学两个方面更准确地把握新教材的特点，从感知和训练两个方面去实现学科素质教育的目标。

二是角度新。以一种新的切入角度，将训练应试能力的现实与提高学科素养的方向有机地结合起来，体现了丛书的实用性和前瞻性。

三是体例新。丛书不同于传统的“单元练习”，既有基础知识的要求，也有学科素质的要求和训练，还有学科知识的适度扩展和延伸。

四是题型新。丛书各科的素质训练，既有基础知识题，又有能力训练题；既有单一题型，又有综合题型，还有开放性题型。新编题型占有较大比重，进一步扩大了学生的发挥空间。

在编写过程中，编者十分注意“3＋X”高考改革趋势，强调以学生为本，兼顾差异，实行分层，注重学法，让每一位学生通过使用本丛书都有所收获，都有所发展。更希望它对广大师生的教和学都有所帮助！

编　者

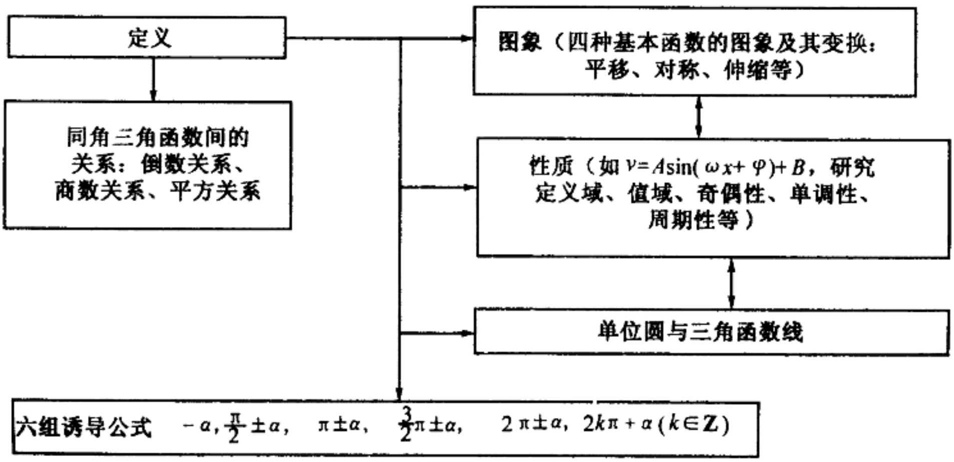
目 录

第四章　三角函数

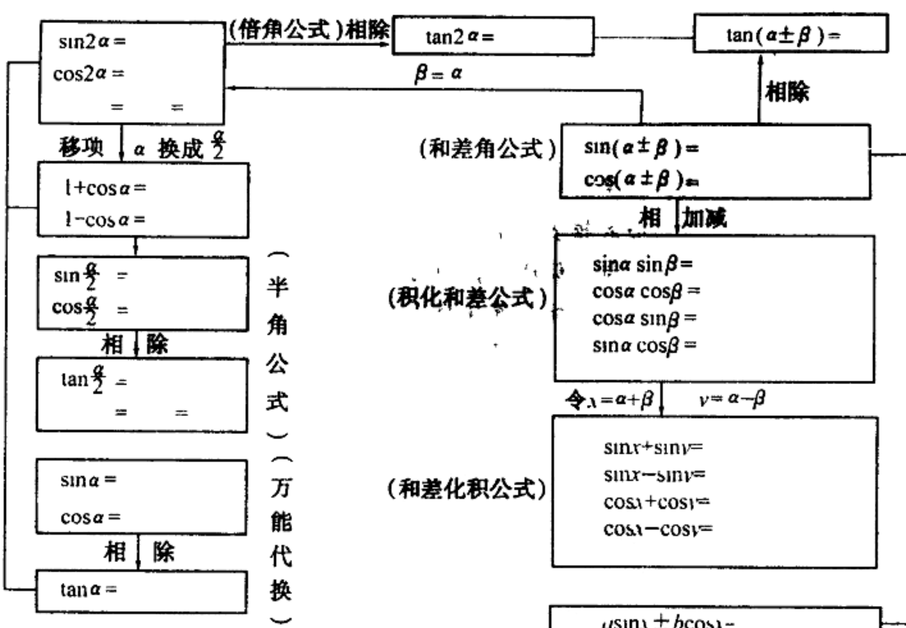
【学习指导】

一、知识结构框图

1．三角函数



2．两角和与差的三角函数



二、教学目标要求

1．理解任意角的概念，包括正角、负角、零角、象限角、轴上角、区间角和终边相同的角；任意角 α 的各三角函数值仅与 α 的终边所在的位置有关，与其终边上的点的选取无关；区间角和象限角既有区别又有联系．

2．理解弧度制的建立，包括弧度与角度的互化，弧长公式、扇形面积公式及其运用．

3．掌握正弦、余弦、正切的定义，并会利用与单位圆有关的三角函数线表示正弦、余弦和正切；了解任意角的余切、正割、余割的定义；熟记三角函数在各象限的符号以及特殊角的三角函数值；掌握同角三角函数的基本关系式；掌握正弦、余弦的诱导公式．

4．掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式；掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式；通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力．能正确运用三角公式进行简单的三角函数式的化简、求值和恒等式证明（包括引出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆）．

5．会用正弦线、正切线画出正弦函数、正切函数的图象，并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象；理解周期函数与最小正周期的意义；结合图象理解正弦、余弦、正切函数的性质；会用“五点法”画出正弦函数、余弦函数和函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，理解 A、ω、φ 的物理意义．

6．会由已知三角函数值求角，并会用符号 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 表示．

三、重点、难点分析

学习本章知识，要从两个方面加以注意：一方面是三角函数的图象及性质．函数图象是函数的一种直观表示方法，它能形象地反映函数的各类基本性质，因此对三个基本的三角函数图象应掌握．此外还要弄清 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与 $y=\sin x$ 图象的关系，掌握“A”，“ω”“φ”的含义，对于三角函数的性质，要紧扣定义，从定义出发，导出各三角函数的定义域、值域、符号、最值、单调区间、周期性及奇偶性等．二方面是三角函数式的变换，涉及公式较多，掌握这些公式要做到如下几点：一要把握各自的结构特征，由特征促记忆，由特征促联想，由特征促应用；二要从这些公式的导出过程抓内在联系，抓变化规律，这样才能在选择公式时灵活准确．同时还要善于观察三角函数式在代数结构、函数名称、角的形式等三个方面的差异，根据差异选择公式，根据差异确定变换方向和变换方法．

四、学习方法指导

本章内容的特点是概念、公式、性质繁多复杂，题目灵活，知识的内在联系紧密，在历年高考中所占比重大，但高考题目大多是中档或偏易题目，所以在学习时要狠抓基础，不要做太多的难题．学好三角函数的关键在于掌握各类三角函数的概念、运算公式、图象和性质，并且要和函数的知识融为一体，并在函数的思想和方法指导下学习本章知识．由于本章知识多，运算灵活，所以学习时要善于把知识做横向和纵向的比较，多思考、多联想、多总结，以发现规律，提高分析和解决问题的能力，同时要注意对整体处理、换元、化归等数学思想的领悟．

§4.1 角的概念的推广

知识要点归纳

1. 理解任意角的概念，并进一步理解正角、负角、零角的概念，以及区间角、象限角、终边在坐标轴上的角、终边相同的角的定义.

2. 掌握象限角、终边相同的角、终边在坐标轴上的角及区间角的各种表示方法；会求指定区间内与已知角终边相同的角.

典型例题导引

例1 在$0^\circ \sim 360^\circ$间，求出与下列各角终边相同的角，并判定是哪个象限的角.

(1) 908°；　(2) -734°.

分析 将已给角化成$\alpha + k\cdot 360^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$)，其中α在$0^\circ \sim 360^\circ$.

解 (1) $908^\circ = 188^\circ + 2\times 360^\circ$，则$188^\circ$即为所求角，$908^\circ$为第三象限角；

(2) $-734^\circ = 346^\circ - 3\times 360^\circ$，则$346^\circ$即为所求角，$-734^\circ$为第四象限角.

评析 一般地化任意角x为$\alpha + k\cdot 360^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$) 形式时，可由x除以360°来定k及α的值，对不符合要求的α可以通过修正k值来进一步求解. 与角α终边相同的角的集合可表示为$\{\beta | \beta = \alpha + k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$，其中必须明确：①$k$为整数；②终边相同的角有无数个，它们之间相差$360^\circ$的整数倍.

例2 下列命题中，正确的是（　　）.

A. 终边相同的角一定相等　　B. 锐角都是第一象限角

C. 第一象限的角都是锐角　　D. 小于90°的角都是锐角

分析 角的概念推广后，应注意以下角的概念的区别：①“0°到90°的角”：是指一个大于或等于0°且小于90°的角；②“第一象限角”：表示为$\{\theta | k\cdot 360^\circ < \theta < 90^\circ + k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；③锐角：表示为$\{\theta | 0^\circ < \theta < 90^\circ\}$；④“小于$90^\circ$的角”：表示为$\{\theta | \theta < 90^\circ\}$，它包括一切负角.

通过以上分析知选B.

例3 若α是第一象限角，试确定$\frac{\alpha}{2}$，2α所在的象限.

解 $\because \alpha$是第一象限角. $\therefore k\cdot 360^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 90^\circ$，$k\in \mathbf{Z}$.

(1) $\because \frac{k}{2}\cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < \frac{k}{2}\cdot 360^\circ + 45^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$)，当$k = 2n$ ($n\in \mathbf{Z}$) 时，$n\cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < n\cdot 360^\circ + 45^\circ$，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角；当$k = 2n+1$ ($n\in \mathbf{Z}$) 时，$n\cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < n\cdot 360^\circ + 225^\circ$　$\therefore \frac{\alpha}{2}$是第三象限角.

(2) $\because 2k\cdot 360^\circ < 2\alpha < 2k\cdot 360^\circ + 180^\circ$ ($k\in \mathbf{Z}$)　$\therefore 2\alpha$是第一象限角或第二象限角，或终边在y轴的非负半轴上的角.

评析 用类似的方法，可以求出当 α 分别在Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ象限时，$\frac{\alpha}{2}$、2α 所在的范围（结果如下表所示）.

角 α 所在象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限	Ⅰ，Ⅲ	Ⅰ，Ⅲ	Ⅱ，Ⅳ	Ⅱ，Ⅳ
角 2α 的范围	Ⅰ，Ⅱ或 y 轴的非负半轴	Ⅲ，Ⅳ或 y 轴的非正半轴	Ⅰ，Ⅱ或 y 轴的非负半轴	Ⅲ，Ⅳ或 y 轴的非正半轴

开放探索创新

例 4 经过 5 小时又 25 分钟，时钟的分针和时针各转多少度？

分析 时针转一周用 12 小时，即 12 小时转 360°，那么时针每小时应转 $-360°\div 12=-30°$，而 5 小时 25 分 $=5\frac{5}{12}$小时，故时针转动的度数为 $-5\frac{5}{12}\times 30°=-162.5°$，分针转动的度数为 $-5\frac{5}{12}\times 360°=-1950°$.

评析 时钟的分针、时针都是按顺时针方向转动，所以它们转动的角度为负角.

学习目标评估

一、选择题

1. 给出命题：(1) $-85°$是第四象限角；(2) $225°$是第三象限角；(3) $480°$是第二象限角；(4) $-330°$是第一象限角. 其中正确的有（　　）.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

2. 已知集合 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于 $90°$的角$\}$，则下面正确的是(　　).

A. $A=B=C$　　B. $A\subsetneqq C$

C. $A\cap C=B$　　D. 以上都不对

3. 已知 α 是锐角，那么 2α 是（　　）.

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 小于 $180°$的正角　　D. 不大于直角的正角

4. 如果 α 是第一象限的角，则 $-\frac{\alpha}{2}$是（　　）.

A. 第一象限角　　B. 第一、四象限角

C. 第二象限角　　D. 第二、四象限角

5. 若 α 为锐角，则 $-\alpha+k\cdot 180°$（$k\in \mathbf{Z}$）所在的象限是（　　）.

A. 第一象限　　B. 第四象限　　C. 第一、三象限　　D. 第二、四象限

6. 下列各角中，终边与 $-30°$角的终边相同的角是（　　）.

A. $-330°$　　B. $-1830°$　　C. $-630°$　　D. $990°$

7. 若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称，则必有（　　）.

A. $\alpha+\beta=90^\circ$

B. $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ+90^\circ$（$k\in\mathbf{Z}$）

C. $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ$（$k\in\mathbf{Z}$）

D. $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ+180^\circ$（$k\in\mathbf{Z}$）

8. 终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是（　　）.

A. $\{\theta|\theta=k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\theta|\theta=k\cdot180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\theta|\theta=k\cdot90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\theta|\theta=k\cdot180^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题

9. 与 -1999° 的终边相同且绝对值最小的角是____________.

10. 若 $180^\circ<\alpha<360^\circ$，且 α 与 -50° 角的终边相同，则 α 等于____________.

11. 若角 $\alpha=-20^\circ+k\cdot180^\circ$ 在 $-720^\circ\sim360^\circ$ 间，则实数 k 的取值范围是____________.

12. 若将时钟拨慢 5 分钟，则时针转了________度，分针转了________度.

三、解答题

13. 把下列各角写成 $k\cdot360^\circ+\alpha$（$0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$）（$k\in\mathbf{Z}$）的形式，并指出它们所在的象限或终边位置.

（1）-135°；　（2）-540°；　（3）1110°；　（4）765°.

14.（1）试写出终边在 x 轴上的角的集合，终边在 y 轴上的角的集合；

（2）若角 α 的终边为第一象限或第三象限的角平分线，请写出角 α 的集合；

（3）试写出终边在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合，并指出上述集合中介于 -180° 和 180° 之间的角；

（4）试由（1）、（2）、（3）推出：当角 α 与角 β 的终边在一条直线上时 α 与 β 的关系.

§4.2 弧度制

知识要点归纳

1. 角度制与弧度制是度量角的两种不同的单位制，规定圆周角的$\frac{1}{360}$为1度的角，而把长度等于半径的弧所对的圆心角叫做一弧度的角．一般地$|\alpha|=\frac{l}{r}$（其中l为圆心角α所对的弧长，r为圆的半径）．

2. 角度制与弧度制的转化公式：$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx0.01745\text{rad}$，$1\text{rad}=\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)\approx57.30^\circ=57^\circ18'$．弧长公式$l=\frac{n}{180}\pi r$，扇形面积公式$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$．

典型例题导引

例1 在直径为20 cm的圆中，求下列各圆心角所对的弧长：(1) $\frac{4\pi}{3}$；(2) 165°．

解 (1) 弧长$l=\alpha\cdot\gamma=\frac{4}{3}\pi\times10=\frac{40\pi}{3}$ (cm)；

(2) $165^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot165^\circ=\frac{11}{12}\pi$（弧度），

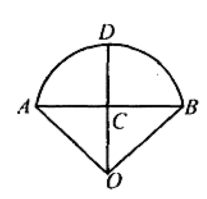
$\therefore$弧长$l=\frac{11}{12}\pi\cdot10=\frac{55}{6}\pi$ (cm)．

例2 已知四边形的四个内角之比为1:3:5:6，分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来．

解 设四边形的四个内角分别为α，3α，5α，6α，则$\alpha+3\alpha+5\alpha+6\alpha=360^\circ$，得$\alpha=24^\circ$，$\therefore$用角度制表示，这四个内角大小分别是$24^\circ$，$72^\circ$，$120^\circ$，$144^\circ$；若用弧度制表示，则分别是$\frac{2\pi}{15}$，$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{5}$．

例3 已知2弧度的圆心角所对的弦长为2，那么这个圆心角所对的弧长是（ ）．

A. 2　　B. sin2　　C. $\frac{2}{\sin1}$　　D. 2sin1



分析 如图，$\angle AOB=2$弧度，过O点作$OC\perp AB$于C，并延长OC交$\overset{\frown}{AB}$于D，$\angle AOD=\angle BOD=1$弧度，且$AC=\frac{1}{2}AB=1$，在Rt$\triangle AOC$中，$OA=\frac{AC}{\sin\angle AOC}=\frac{1}{\sin1}$．从而$\overset{\frown}{AB}$的长为$l=|\alpha|\cdot r=2\cdot\frac{1}{\sin1}=\frac{2}{\sin1}$．故选C．

开放探索创新

例4 已知一扇形的周长为c ($c>0$)，当扇形的中心角为多少弧度时，它有最大的面

积？

解 设扇形所在圆的半径为 r，中心角为 α（$\alpha>0$），扇形的面积为 S，则 $c=2r+\alpha r$，$r=\frac{c}{2+\alpha}$，故 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{c^2\alpha}{2\alpha^2+8\alpha+8}$，整理得 $2S\alpha^2+(8S-c^2)\alpha+8S=0$（*）由 $S\neq0$ 及 $\Delta\geqslant0$ 知 $-16Sc^2+c^4\geqslant0$，又 $\because c\neq0$ $\therefore S\leqslant\frac{c^2}{16}$ 即扇形有最大面积 $\frac{c^2}{16}$. 将 $S=\frac{c^2}{16}$ 代入（*）式，解之得 $\alpha=2$ (rad). 故当扇形中心角为 2 弧度时，扇形有最大面积 $\frac{c^2}{16}$.

学习目标评估

一、选择题

1. 把 $-1485°$ 化为 $2k\pi+\alpha$（$0\leqslant\alpha<2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$）的形式是（　　）.

A. $-8\pi+\frac{\pi}{4}$　　B. $-8\pi-\frac{\pi}{4}$

C. $-10\pi-\frac{\pi}{4}$　　D. $-10\pi+\frac{7}{4}\pi$

2. $\alpha=-3$，则 α 的终边在（　　）.

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 大小不同的若干圆内，若圆心角都是 1 弧度，则下述结论正确的是（　　）.

A. 所夹弧长相等　　B. 所对弦长相等

C. 所夹弧长等于各自半径　　D. 所夹的弧长为 $\frac{57°18'}{180}R$（R 为半径）

4. 将分针拨快 10 分钟，则分针转过的弧度数是（　　）.

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $-\frac{\pi}{6}$

5. 若 2 弧度的圆心角所对的弧长为 4 cm，则这个圆心角所夹扇形的面积是（　　）.

A. 4cm^2　　B. 2cm^2　　C. $4\pi\text{cm}^2$　　D. $2\pi\text{cm}^2$

6. 若一段圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长，则其圆心角的弧度数为（　　）.

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 已知扇形的周长是 6 cm，面积为 2 cm^2，则扇形中心角的弧度数是（　　）.

A. 1　　B. 4　　C. 1 或 4　　D. 2 或 4

二、填空题

8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A:\angle B:\angle C=3:5:7$，则 $\angle A=$__________弧度；$\angle B$________弧度.

9. 圆的半径变为原来的 $\frac{1}{2}$，而弧长不变，则该弧所对的圆心角是原来的________倍.

10. 一个半径为 R 的扇形，它的周长为 $4R$，这个扇形所含弓形的面积是__________.

11. 集合 $M=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$ 与 $P=\{x\mid x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，则 M，P 之间的关系是________________.

三、解答题

12. 一个半径为 r 的扇形，若它的周长等于弧所在的半圆的长，那么扇形的圆心角是多少弧度，是多少角度？扇形的面积是多少？

13. 地球与太阳间平均距离为 1.5×10^8km，一人测得在地球观测太阳所张的视角为 $32'$，求太阳直径的近似值.

§4.3 任意角的三角函数

知识要点归纳

1. 理解在坐标系中任意角的三角函数的定义，它是通过直角坐标系中角的终边上某一点的坐标，给出了三角函数的定义，根据定义可知：(1) 一个角的三角函数值只与这个角的终边位置有关，即角 α 与角 $\beta=2k\pi+\alpha$ ($k\in\mathbf{Z}$) 的同名三角函数值相等；(2) $\because |x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，$|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，故有 $|\sin\alpha|\leqslant1$，$|\cos\alpha|\leqslant1$，这是三角函数中最基本的一组不等式关系；(3) 根据三角函数的定义，三角函数值的符号可以由其角的终边所在象限内点的坐标符号确定，亦即角 α 的终边所在的象限唯一确定. 其符号规律为："一全正，二正弦，三正切，四余弦".

2. 熟练掌握各象限中三角函数值的符号. 在计算或化简三角函数关系式时，常常需要对角的范围以及相应的三角函数值的正负情况进行讨论. 因此，在解答这类习题时要三思而行：(1) 角的范围是什么？(2) 对应的三角函数值是正还是负？(3) 与此相关的定义、性质或公式有哪些？

3. 掌握三角函数的几何表示——三角函数线，利用三角函数线可求出三角函数的定义域、值域，解（证）三角不等式，培养形象思维和动手能力.

典型例题导引

例 1 求值 $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{67\pi}{6}\right)+\tan\frac{19\pi}{3}$

解 $\because \cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{12\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

$\sin\left(-\frac{67}{6}\pi\right)=\sin\left(-12\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

$\tan\frac{19\pi}{3}=\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$.

例 2 判断下列三角函数式的符号.

(1) $\tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$；　　(2) 若 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，确定 $\cot\alpha$ 与 $\sec\alpha$ 的符号.

解 (1) $\because -\frac{17\pi}{6}=-4\pi+\frac{7}{6}\pi$ 且 $\frac{7}{6}\pi$ 是第三象限角，故 $-\frac{17}{6}\pi$ 是第三象限角.

$\therefore \tan\left(-\frac{17\pi}{6}\right)>0$；

(2) 由 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，知 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 异号，故 α 是第二或第四象限角. 当 α 是第二象限角时，$\cot\alpha<0$，$\sec\alpha<0$；当 α 是第四象限角时，$\cot\alpha<0$，$\sec\alpha>0$.

评析 三角函数值的符号视其角所在象限而定. 在使用这一结论时，要结合具体函数来确定符号，如第二象限角 α，其正弦为正，余弦为负，这个十分简单的道理往往因被忽视而致错.

例 3 已知 $\tan x>0$，且 $\sin x+\cos x>0$，则角 x 是（　　）.

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

分析 由 $\tan x>0$ 知 x 为第一或第三象限角，若用第二个条件判断 x 的象限，则需较多的变换. 注意选项提供的信息，即 x 所在象限的唯一性，考查 x 为第三象限的情况，此时 $\sin x$ 与 $\cos x$ 均为负值，与 $\sin x+\cos x>0$ 矛盾. 故由排除法知 x 为第一象限角. 故选 A.

例 4 (1) 已知角 α 的终边经过点 P (4，-3)，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值；

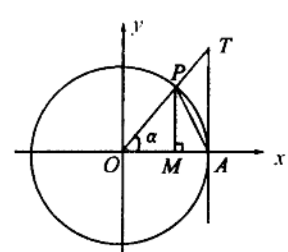
(2) 已知角 α 的终边经过点 P ($4a$，$-3a$)，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

解 (1) 由定义知，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$　$\therefore 2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$；

(2) 若 $a>0$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2}{5}$，若 $a<0$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

开放探索创新

例 5 当 $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，比较 α，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的大小.



分析 当 $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 的大小可以考虑用代数中比较大小的方法和利用正余弦函数的值域加以比较，但 $\sin\alpha$ 与 α 的大小就不易用代数方法比较了，转而考虑用三角函数线来比较其大小.

解 如图，设锐角 α 的终边交单位圆于点 P，过单位圆与 x 轴正半轴的交点 A 作圆的切线交 OP 于 T，并过点 P 作 $PM\perp$

Ox 轴，垂足为 M，则 $MP=\sin\alpha$，$AT=\tan\alpha$．$\overset{\frown}{AP}$ 的长为 d，连 PA，因为 $S_{\triangle AOP}<S_{扇形OAP}<S_{\triangle OAT}$，即$\frac{1}{2}|OA|\cdot|MP|<\frac{1}{2}|OA|^2\cdot\alpha<\frac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$，所以$|MP|<\alpha<|AT|$，所以 $MP<d<AT$，即 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$．

评析 三角函数线使得代数中的三角函数和几何中的有向线段联系在一起．这就为几何法解决代数问题，代数法（三角代换）解决几何问题提供了可能．

学习目标评估

一、选择题

1．设角 α 的终边过点P（$3a$，$4a$）（$a\neq0$），则下列式子中正确的是（　　）．

A．$\sin\alpha=\frac{4}{5}$　　B．$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

C．$\tan\alpha=\frac{4}{3}$　　D．$\cot\alpha=-\frac{4}{3}$

2．钝角 α 的正弦、余弦、正切（　　）．

A．全为正值　　B．全为负值

C．$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha>0$　　D．$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha<0$

3．α 是第二象限角，P（x，$\sqrt{5}$）为其终边上一点，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，则 $\sin\alpha$ 为（　　）．

A．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$-\frac{\sqrt{10}}{4}$

4．已知点 P（$\cos\theta$，$\tan\theta$）在第三象限，则在（0，2π）内 θ 的取值范围是（　　）．

A．$(0,\ \frac{\pi}{2})$　　B．$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$　　C．$(\pi,\ \frac{3}{2}\pi)$　　D．$(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi)$

5．设角 α 是第二象限角，且$|\cos\frac{\alpha}{2}|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则角$\frac{\alpha}{2}$是（　　）．

A．第一象限角　　B．第二象限角　　C．第三象限角　　D．第四象限角

6．若 A 是$\triangle ABC$ 的内角，则下列各式中一定成立的是（　　）．

A．$\sin A\cdot\cos A>0$　　B．$\tan A\cdot\cos A>0$

C．$\sin A\cdot\csc A>0$　　D．$\tan A\cdot\cot A>0$

7．化简 $a^2\cos2\pi-b^2\sin\frac{7\pi}{2}+ab\cos3\pi-ab\sin\frac{9\pi}{2}$的结果为（　　）．

A．a^2+b^2　　B．a^2-b^2　　C．$(a-b)^2$　　D．$-2ab$

8．已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，且角 α 的正弦线与余弦线是等长的有向线段，则 α 的终边（　　）．

A．在 x 轴上　　B．在 y 轴上

C．在直线 $y=x$ 上　　D．在直线 $y=-x$ 上

二、填空题

9．α 是三角形的内角，则 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 可能同时取负值的有__________个．

10．若 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$，则 α 终边在第__________象限．

11．函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$的值域是______________．

12. 下列四个判断：①$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$\sin\alpha+\cos\alpha>1$；②$\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$\sin\alpha<\cos\alpha$；③$\alpha\in(\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi)$时，$\sin\alpha>\cos\alpha$；④$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，若$\cos\alpha+\sin\alpha<0$，则$|\cos\alpha|>|\sin\alpha|$，其中正确的是（填序号）____________.

三、解答题

13. 已知角 α 的始边为 x 轴的非负半轴，终边在直线 $y=kx$ 上，若 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，且$\cos\alpha<0$，试求实数 k 的值.

14. 利用三角函数线证明：$|\sin x|+|\cos x|\geqslant 1$.

15. 已知 θ 是第二象限角，(1) 试确定$\sin\theta\cdot\cos\theta$的符号；(2) 试确定$\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)$的符号.

§4.4 同角三角函数的基本关系式

知识要点归纳

1. 熟记并掌握同角三角函数的基本关系式：(1) 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；(2) 商数关系：$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；(3) 倒数关系：$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$. 需要注意的是：①这是一组同角关系，如$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$就不一定成立；②利用平方关系式在进行开方运算时，要注意运算结果的符号. 例如，若 α 在第二象限，则$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$，开方时先将结果套上绝对值，再根据角所在的象限及相应的三角函数值的正负情况确定其符号；③在进行具体运算时应尽可能避免用平方关系，一般来讲，已知一个角的三角函数值求同角的另一个三角函数值时，至多只需进行一次开方运算.

2. 了解三角函数式的计算或化简时经常使用的技巧：(1)“1”的代换. (2) 整体处理.

3. 公式的等价变形，如$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$，$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$，$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$ 等.

4. 同角三角函数关系式的应用：(1) 已知一个角的某一个三角函数值，求这个角的其他三角函数值；(2) 化简三角函数式；(3) 证明三角恒等式.

典型例题导引

例1 已知 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，求 $2\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta$ 的值.

解 原式 $=\frac{2\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan^2\theta-3\tan\theta-5}{1+\tan^2\theta}=-\frac{12}{5}$.

例2 已知 α 是第三象限角，化简 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

解 原式 $=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$. $\because\alpha$ 是第三象限角， $\therefore\cos\alpha<0$,

原式 $=\frac{-2\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\tan\alpha$.

例3 求证：$\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

证明：左端 $=\frac{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$

$=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=$ 右端，

$\therefore$ 等式成立.

开放探索创新

例4 已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，且 $\frac{3}{4}\pi<\alpha<\pi$. 求：(1) $\tan\alpha$ 的值；(2) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$ 的值.

解 (1) 方法一：$\because\frac{3}{4}\pi<\alpha<\pi$，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha<0$，又 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ $=1-\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$①，同理可得 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$②. 由①，②得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. $\therefore\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

方法二：由 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，可得 $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{12}{25}$，$\because\cos\alpha\neq0$，所以 $\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{12}{25}$，即 $12\tan^2\alpha+25\tan\alpha+12=0$，解得 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ 或 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$. 又 $\frac{3}{4}\pi<\alpha<\pi$，$\therefore\tan\alpha>\tan\frac{3}{4}\pi=-1$，$\therefore\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

(2) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\frac{7}{5}\times(1-\frac{12}{25})=\frac{91}{125}$.

学习目标评估

一、选择题

1. $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\cot\alpha$ 的值等于（　　）.

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\pm\frac{4}{3}$　　D. $\pm\frac{3}{4}$