高联考研

2007年

李永乐·李正元考研数学⑨

数学一

【理工类】

# 数学全真模拟经典400题

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

2007年李永乐·李正元考研数学⑨

# 数学全真模拟经典400题

## （理工类·数学一）

主　编　清　华　大　学　李永乐
北　京　大　学　李正元
中国人民大学　袁荫棠

编　者　（以姓氏笔画为序）
北　京　大　学　刘西垣
北　京　大　学　李正元
清　华　大　学　李永乐
中国人民大学　严　颖
北　京　大　学　范培华
中国人民大学　袁荫棠
空军雷达学院　徐宝庆
东北财经大学　龚兆仁
天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

数学全真模拟经典400题：理工类/李永乐，李正元，袁荫棠主编.
－北京：国家行政学院出版社，2001
（考研必备）
ISBN 7-80140-174-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.①李…　②李…　③袁…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第044469号

**数学全真模拟经典400题**
［理工类・数学一］
李永乐　李正元　袁荫棠　主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路6号
邮政编码：100089
发行电话：88517082
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×1092　1/16开本　13.75印张　360千字
2006年8月第7版　2006年8月第1次印刷
ISBN 7-80140-174-3/O・13　　定价：22.00元

# 前　　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典 400 题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《**2007 年考研数学全真模拟经典 400 题**》根据 2007 年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

**1. 每题均全新优化设计，综合性强**

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计或改编了 10 套模拟试题，这 10 套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到 3 个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这 10 套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

**2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细**

我们在设计这 10 套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据 2007 年考研数学大纲为 2007 年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练题集，本书中的试题难度略高于 2006 年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2007年考研数学复习全书》（数学一），弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2007年考研数学复习全书》（数学一）中所介绍的解题方法、技巧和思路。

**特别提醒考生注意：**①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者不辞辛苦，认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中，编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务，决不假手他人，更不会“借”他人的东西。在这个意义上，“经典”两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点、综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要急，更不要泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》（数学一）所介绍的解题方法，然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题，不要一看了事。

鉴于以上两点，我们希望考生认真对待本书中每道题，对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2007年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典400题》能对广大考生有所帮助，为实现考研目标助一臂之力！

**说明：**为了使本书更具有针对性，减轻考生的经济负担，我们将原《数学全真模拟经典400题》（数学一、数学二合订本）改为数学一、数学二单行本，书名继续沿用《数学全真模拟经典400题》。

编　者

2006年8月

# 目　录

## 第 1 部分　考生必须了解的信息



## 第 2 部分　新增考点专题训练



## 第 3 部分　全真模拟经典试题

## 第 4 部分　全真模拟经典试题答案及详解

# 第1部分

# 考生必须了解的信息

## 一、2007 年考研数学考试大纲修订情况

**(一) 关于试卷结构**

**1. 内容比例**

高等数学由原来的“约 60%”调整为“约 56%”,线性代数、概率论与数理统计均由原来的“约 20%”调整为“约 22%”.

**2. 题型比例**

(1) 填空题与选择题由原来的“约 40%”调整为“约 45%”.

**注意**:该项今年有较大变化.首先,将原来的“一、填空题”调整为“二、填空题”,同时将原来的“二、选择题”调整为“一、选择题”.其次,选择题的题量由原来的“8 道”变为“10 道”,即增加了 2 道高等数学内容的选择题,同时,其分值由原来的“32 分”调整为“40 分”.

(2) 解答题(包括证明题)由原来的“约 60%”调整为“约 55%”,其中高等数学内容的解答题由原来的“5 道”变为“4 道”.

**(二) 关于考试内容与考试要求**

**1. 高等数学**

(1) 将“无穷小(大)”修订为“无穷小(大)量”,将“广义积分”修订为“反常积分”.

(2) 将“六、多元函数积分学”考试要求的第 6 条中“…… 会用高斯公式、斯托克斯公式计算曲面、曲线积分”修订为“…… 掌握用高斯公式计算曲面积分的方法,并会用斯托克斯公式计算曲线积分”.

**2. 概率论与数理统计**

“二、随机变量及其分布”考试要求的第 2 条中增加了“几何分布”内容,并要求掌握其应用.

## 二、2006 年考研数学试题特点剖析

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题全面考查基本概念、基本理论和基本运算,紧扣考试大纲,涉及知识面宽,体现了“厚基础、重能力”的命题指导思想.题目难易适中且有所创新,

注重考查综合运用知识的能力.

**1. 注重基础知识**

注重基础知识是2006年试题的突出特点,考生只要掌握好基本概念和基本思想,就可以正确解答这些题目.如数学一的填空题中求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$,运用等价无穷小量代换或者使用洛必达法则,都能够很容易得到结果,此题放在第(1)题位置,有利于建立考生答题的信心.又如数学一的第(7)题考查考生用导数判别函数图形的性态,再根据函数增量与微分的几何意义来判断$\Delta y$与$\mathrm{d}y$的大小关系,只要考生基本功扎实,就可以答对此题.

在对基本原理的考查上,主要考查数学思想及其灵活应用.如数学一第(10)题,考查函数条件极值的必要条件,只要运用函数无条件极值的必要条件的概念,即可推出结论.再如数学一中第(22)题的概率问题,密度函数为分三段的分段函数,而通常是分两段的分段函数,此题也属于概念的灵活应用.特别是数理统计题(数学一中第(23)题),本题需要根据似然函数的定义建立$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$,就可以求出$\theta$的最大似然估计$\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

**2. 题目解法灵活多样**

2006年的数学试题考查了考生的发散思维能力和对知识综合运用的能力,如果考生能用简便方法解题,可以节省出答题时间,有效解决答题时间不够用的问题.如数学一第(15)题可以利用对称性计算二重积分,能够收到既节省时间又提高准确度的效果.再如线性代数题(数学一第(21)题),该题目新颖且不落俗套,但难度并不高.此外,试卷中的一些试题虽然是基本题,但知识点增多,考查学生运用交叉知识解决较复杂问题的能力.如数学一第(16)题是一个关于极限知识的综合性题目,考生容易想到用单调有界原理证明数列$\{x_n\}$有极限,进而求出$\lim\limits_{x\to 0}x_n$,在此基础上解答第(Ⅱ)问"求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$"时,先转化成$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,再由洛必达法则求出$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$,即可由此计算出所求的极限值.高等数学中的不等式证明题经常要用到构造辅助函数,函数的单调性,一阶导数,二阶导数等多个知识点,而2006年数学一的第(22)题也是知识点较多的综合题.

**3. 分步设问,梯次递进**

2006年的很多数学试题在设计上先搭一个台阶,引导考生的思路,便于考生上手.例如数学一第(20)题,先设第(Ⅰ)问"证明$\mathrm{r}(A)=2$",据此考生可容易解答第(Ⅱ)问,通过对增广矩阵进行初等变换化成梯形阵,即可求出$a,b$的值,进而得到方程组的通解.

又如数学一第(18)题,第(Ⅰ)问先验证$f(\sqrt{x^2+y^2})$满足$f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$,考生自然要先用复合函数微分法求出函数$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,代入条件$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$即得证,再通过求解第(Ⅰ)问中的微分方程来完成第(Ⅱ)问,得到$f(u)$的表达式.如果不设第(Ⅰ)问而直接设第(Ⅱ)问,则试题的难度会大幅度提高.

**4. 试题没有偏题怪题**

2006年数学试题不偏不怪,难度适中,考生只需从基本概念入手就可以解决问题,而不需要高难的技巧.比如数学一第(10)、(19)、(23)题等题,这些试题考查了基本的概念和原理,考生只有基本功过硬才能得高分,而只靠背题型、临时突击掌握一些解题的套路是不行的.

**5. 试题难度下降**

与2005年相比,2006年数学试题的难度进行了有效的调整,难度有所下降,符合考生的实际水

平．试题降低了对高难度技巧的要求，但不降低对知识点的要求，如数学一第(15)题，这是一个二重积分题，题目的原型是：

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x+y\geqslant 0\}$，$f$连续，计算 $I=\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2+xyf(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

本题主要考查二重积分的对称性及利用极坐标计算二重积分的方法．但是对于抽象函数$f(x^2+y^2)$，因为没有给出具体的对应关系，并且要利用函数的奇偶性，对区域$D$还要用$y=x$分为两部分(直接化极坐标也可以计算)，因此题目有一定的难度．最后将题目改成：

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

这样，考查的知识点、基本原理和方法相同，技巧性与难度却降下来了．此外，在基本方法和基本运算上，一般尽量避免复杂的计算，如数学一第(20)题，以具体的矩阵阶数代替了抽象的$n$阶，并减少了参数，降低了题目的难度．又如数学一第(23)题，给出$N$，考生就可以方便地建立似然函数，从而求得$\hat{\theta}$，如果按照题目原型不给$N$，就会增加题目的难度．

## 三、思考与建议

通过阅卷，我们发现考生存在的问题有：

(1) 考生存在的主要问题是，基础知识不牢固，很多考生只是背题型，按照套路做题，对基本概念不够重视，理解不深，不能灵活应用，不能从基本概念入手解决问题．

(2) 考生存在的另一个问题是综合运用知识的能力较差，其原因是数学解题能力没有达到要求，遇到新题型不能综合地应用知识解决问题．

针对上述存在的问题，建议考生在复习中首先强化基本概念、基本理论和基本运算，然后加强综合训练．考生应注意积累解题方法，一题多解的题目要选择简便解法，以便节省时间，提高效率．

# 第2部分

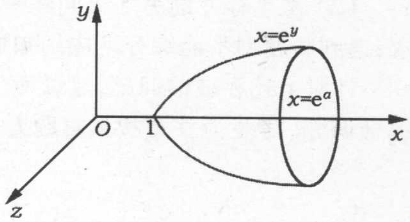
# 新增考点专题训练

## 一、高等数学

### ▶ * 利用高斯公式计算曲面积分

【题 1】 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\sum$ 是由曲线 $x = \mathrm{e}^y(0 \leqslant y \leqslant a)$ 绕 $x$ 轴旋转成的旋转曲面(如图).

【解】 作平面 $x = \mathrm{e}^a$,与曲面 $\sum$ 围成闭区域 $\Omega$(如图),由高斯公式可得




$$I + \iint\limits_{y^2+z^2 \leqslant a^2} 2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}z\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}V,$$

故原积分 $$I = -\iint\limits_{y^2+z^2 \leqslant a^2} 2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi a^2(\mathrm{e}^{2a}-1).$$

---

【题 2】 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_{S^+} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中 $S^+$ 是 $1 - \dfrac{z}{7} = \dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{16}$ $(z \geqslant 0)$ 的上侧.

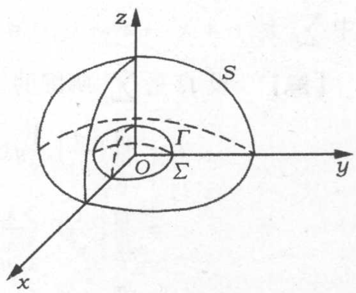
【分析】 直接计算此曲面积分是相当困难的,因而应利用高斯公式.考虑到被积表达式中有分母 $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$,所以在增补曲面以构成封闭曲面时,要注意所增补的曲面不能过原点,同时所构成的封闭曲面不要包围原点.

【解】 以 $\Gamma$ 表示以原点为中心的上半单位球面($z \geqslant 0$).可以验证 $\Gamma$ 被包在 $S$ 的内部.$\Gamma$ 的内侧和外侧分别表示为 $\Gamma_{内}$ 和 $\Gamma_{外}$.记 $\sum_{下}$ 为平面 $z = 0$ 上满足

---

* 该项虽然不是新增的考试内容,但新大纲提高了其考试要求,故也精编了相关试题,希望考生予以重视.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 1, \\ \dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16} \leqslant 1 \end{cases}$$




部分的下侧，这样 $S^+ + \Gamma_{内} + \sum_{下}$ 构成一个封闭曲面的外侧. 此封闭曲面既不经过也不包围坐标原点（如图），于是

$$I = \iint\limits_{S^+} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \oiint\limits_{S^+ + \Gamma_{内} + \sum_{下}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} -$$

$$\iint\limits_{\Gamma_{内}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \iint\limits_{\sum_{下}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

其右端的第一项，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{S^+ + \Gamma_{内} + \sum_{下}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \iiint\limits_{V} \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\mathrm{d}V = 0,$$

其中 $V$ 是 $S^+ + \Gamma_{内} + \sum_{下}$ 所包围的区域；其第三项显然为 0，所以，

$$I = -\iint\limits_{\Gamma_{内}} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iint\limits_{\Gamma_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

再次利用高斯公式来计算 $\iint\limits_{\Gamma_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

记 $\sigma_{下}$ 为平面 $z=0$ 上满足 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 部分的下侧，则 $\Gamma_{外} + \sigma_{下}$ 构成封闭曲面，其所包围的区域记为 $\Omega$，则

$$\oiint\limits_{\Gamma_{外}+\sigma_{下}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V = 2\pi.$$

而 $\iint\limits_{\sigma_{下}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$

因此 $I = \iint\limits_{\Gamma_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Gamma_{外}+\sigma_{下}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$

**评注** 本题中 $\Gamma$ 既可取为上半单位球面，也可取为以原点为球心，以 $r$ 为半径的上半球面，只需使 $\Gamma$ 被包含在 $S$ 内即可. 本题的结论还表明它与曲面 $S$ 的具体形式是无关的，只需 $S$ 是不经过原点的分片光滑曲面（$z \geqslant 0$）.

---

**【题 3】** 设 $f(u)$ 有连续导函数，计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$\sum$ 是$y = x^2 + z^2 + 6, y = 8 - x^2 - z^2$ 所围立体的外侧.

【解】 设$\Omega$是$\sum$ 所围的区域,它在$xOz$ 面上的投影区域为$x^2 + z^2 \leqslant 1$,由高斯公式

$$I = \iiint\limits_{\Omega}\{\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})] + \frac{\partial}{\partial y}[\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})] + \frac{\partial}{\partial z}(z)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}[\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y}) + 1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

用柱坐标可以算得

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2+6}^{8-r^2}r\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^1(2 - 2r^2)r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi(1 - \frac{1}{2}) = \pi.$$

---

【题4】 求$I = \iint\limits_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$,$\sum$ 是锥面$z^2 = x^2 + y^2$ 在$-1 \leqslant z \leqslant 0$ 的部分,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是$\sum$ 上任一点$(x,y,z)$ 的法线向量的方向余弦,且$\cos\gamma < 0$.

【解】 补一块$\sum_1:\begin{cases}x^2 + y^2 \leqslant 1,\\ z = -1,\end{cases}$ 法向量向上,则

$$\iint\limits_{\Sigma} = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1}.$$

由 $$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1}(-1)\mathrm{d}S = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi,$$

再由第一类曲面积分与第二类曲面积分间的关系式及高斯公式,得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -3\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{-\frac{1}{\cos\varphi}}r^4\mathrm{d}r$$

$$= \frac{6\pi}{5}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\cdot\frac{1}{\cos^5\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{6\pi}{5}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\cos^{-5}\varphi\mathrm{d}\cos\varphi = -\frac{9\pi}{10}.$$

所以 原式 $= -\frac{9\pi}{10} - (-\pi) = \frac{\pi}{10}.$

---

【题5】 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是曲线 $\begin{cases} y=\sqrt{1+z^2} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\leqslant z\leqslant 2)$ 绕 $z$ 轴旋转而成的旋转面，其法线向量与 $z$ 轴正向的夹角为锐角.

【解】 旋转曲面的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 补充曲面

$\sum_1:\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 5, \\ z=2, \end{cases}$ 其法线向量与 $z$ 轴正向相反；

和 $\sum_2:\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2, \\ z=1, \end{cases}$ 其法线向量与 $z$ 轴正向相同.

设由曲线 $\sum,\sum_1,\sum_2$ 所围空间区域为 $\Omega$，则

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_2} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 5}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=-\int_1^2 z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0+0 \\
&=-\int_1^2 z^2\pi(1+z^2)\mathrm{d}z=-\pi\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right)\Big|_1^2 \\
&=-\frac{128}{15}\pi.
\end{aligned}$$

---

【题6】 计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\sum$ 为 $z=a^y(0\leqslant y\leqslant 2,a>0,a\neq 1)$ 绕 $z$ 轴旋转所成的旋转曲面的下侧.

【解】 旋转曲面的方程为 $z=a^{\sqrt{x^2+y^2}}$，加上曲面 $\sum^*:z=a^2$ 的上侧，作成一个封闭曲面，使用高斯公式，有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\iiint\limits_{\Omega} 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma^*} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{a^r}^{a^2} z\mathrm{d}z-\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(1-a^4)\mathrm{d}y \\
&=2\pi\left[2a^4-\frac{a^4}{\ln a}+\frac{1}{4(\ln a)^2}(a^4-1)\right]-4\pi(1-a^4).
\end{aligned}$$

---

【题7】 设函数 $f(u)$ 具有连续导数，计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{y+2}f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)+3xy^2+e^z\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{x+1}f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)+3x^2y-y\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是 $z=1+\sqrt{x^2+y^2}(1\leqslant z\leqslant 2)$ 表面外侧.

【解】 添加平面 $\Sigma_1: z=2$，取上侧，则有

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{(y+2)^2}f' + 3y^2 + \frac{1}{x+1}f'\cdot\left(-\frac{x+1}{(y+2)^2}\right) + 3x^2 - 1 + 1\right]dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} 3(x^2+y^2)\,dxdydz$$

$$= 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr\int_{1+r}^2 dz = \frac{3}{10}\pi.$$

而 $$\iint_{\Sigma_1} = \iint_D (2-x^2-y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2-r^2)r\,dr = \frac{3}{2}\pi,$$

故 原式 $= \frac{3}{10}\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{6\pi}{5}$.

## 二、概率论与数理统计

### ▶ 关于几何分布及其应用

【题1】 用还原抽样方式从 $1,2,\cdots,9$ 等九个阿拉伯数字中一个接一个地抽取数字，直到出现被 3 整除的数字为止，则被 3 整除的数字出现在第三次抽取的概率为________.

【分析】 易见，从 $1,2,\cdots,9$ 等九个阿拉伯数字中随意抽出的一个数，能被 3 整除的概率 $p=1/3$. 以 $X$ 表示题中要求的抽样次数，则 $X$ 的概率分布为

$$\boldsymbol{P}\{X=n\} = p(1-p)^{n-1} \quad (n=1,2,\cdots),$$

即参数为 $p=1/3$ 的几何分布. 因此被 3 整除的数字出现在第三次抽取的概率为

$$\boldsymbol{P}\{X=3\} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

---

【题2】 重复做一系列独立试验，每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，试验做到第 $n$ 次成功停止，试求试验次数 $X$ 的数学期望 $\boldsymbol{E}(X)$.

【解】 设随机变量 $X_i$ 为第 $(i-1)$ 次试验成功后到再一次试验成功时的试验次数，$1\leqslant i\leqslant n$. 显然，$X = X_1+X_2+\cdots+X_n$，而且对每一个 $X_i$，它的可能性取值为 $1,2,\cdots,k,\cdots$.

当 $X_i=k$ 时，它表示前 $(k-1)$ 次试验失败，而第 $k$ 次试验成功，即

$$\boldsymbol{P}\{X_i=k\} = (1-p)^{k-1}p.$$

因而，
$$\boldsymbol{E}(X_i) = \sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{P}\{X_i=k\} = \sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p$$

$$= p\frac{1}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}.$$

故
$$\boldsymbol{E}(X) = \boldsymbol{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p} = \frac{n}{p}.$$

---

【题3】 已知随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立且服从同一(几何) 分布：

$$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=pq^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots).$$

对于 $k=1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)$，试求 $P\{X=k\mid X+Y=n\}$.

【解】 对于任意 $n\geqslant 2$，因为 $X$ 和 $Y$ 相互独立，故由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P\{X+Y=n\}&=\sum_{k=1}^{n-1}P\{X=k,Y=n-k\}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}pq^{n-k-1}\\&=(n-1)p^2q^{n-2}.\end{aligned}$$

根据条件概率的定义，对于任意 $k=1,2,\cdots,n(n=2,3,\cdots)$，有

$$\begin{aligned}P\{X=k\mid X+Y=n\}&=\frac{P\{X=k,X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}\\&=\frac{P\{X=k,Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}\\&=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}\\&=\frac{pq^{k-1}pq^{n-k-1}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1}.\end{aligned}$$

---

【题4】 独立地重复进行某项试验，直到首次成功为止，每次试验成功的概率为 $p$. 假设前5次试验每次的试验费用为10元，从第6次起每次的试验费用为5元. 试求该项试验的总费用的期望值 $a$.

【解】 （Ⅰ）以 $X$ 表示试验的总次数，首先求 $X$ 的概率分布. 设 $A_k=\{$第 $k$ 次试验成功$\}(k=1,2,\cdots)$，则 $P(A_k)=p$；$X$ 的概率分布为

$$P\{X=n\}=P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)=pq^{n-1}(n=1,2,\cdots),$$

其中 $q=1-p$. 于是试验的总次数 $X$ 服从参数为 $p$ 的几何分布.

（Ⅱ）现在求试验的总费用的期望值 $a$. 由条件知，试验的总费用

$$Y=\begin{cases}10X, & 若\ X\leqslant 5,\\ 50+5(X-5), & 若\ 5>X\end{cases}=\begin{cases}10X, & 若\ X\leqslant 5,\\ 25+5X, & 若\ 5>X.\end{cases}$$

该项试验的总费用是一随机变量，其期望值为

$$\begin{aligned}a&=EY\\&=10\sum_{n=1}^{5}npq^{n-1}+\sum_{n=6}^{\infty}(25+5n)pq^{n-1}\\&=5p\sum_{n=1}^{5}nq^{n-1}+5p\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}+25q^5,\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^q\sum_{n=1}^{5}nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{5}q^n=\frac{q-q^6}{1-q},$$

$$\sum_{n=1}^{5}nq^{n-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q-q^6}{1-q}\right)=\frac{5q^6-6q^5+1}{(1-q)^2}=\frac{5q^6-6q^5+1}{p^2};$$

$$p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p};$$

$$a = EY = \frac{5}{p}(5q^6 - 6q^5 + 2) + 25q^5.$$

例如,设 $p = 0.8, q = 0.2$,得 $a = 12.498$ 元;设 $p = q = 0.5$,得 $a = 19.6875$ 元;设 $p = 0.2, q = 0.8$,得 $a = 41.808$ 元;设 $p = 0.1, q = 0.9$,得 $a = 70.4775$ 元.