

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇



希望杯

数学能力培训教程

杨翠芝 等◎编著



- ◎掌握美的数学
- ◎学会创新思考
- ◎登上更高境界

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

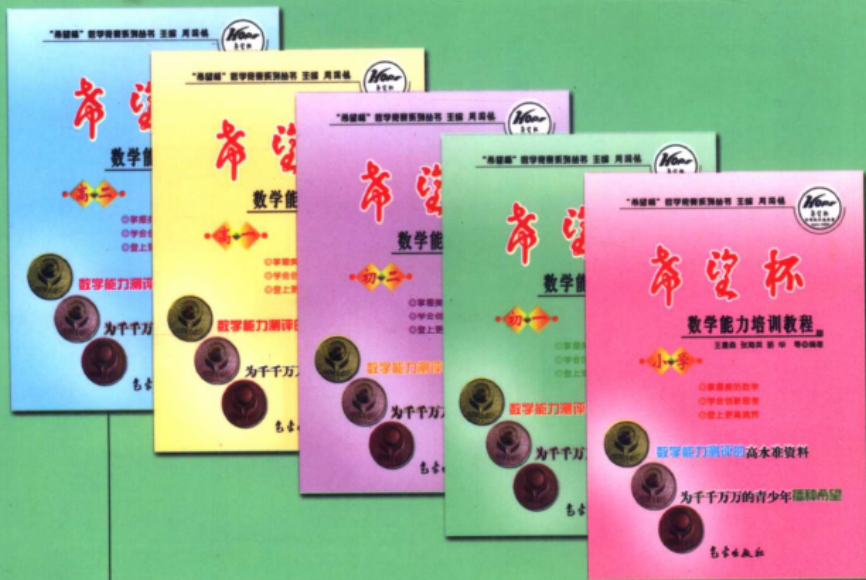
气象出版社



★ 圆形，表示广阔的天空。

★ 英文 hope（希望）形如一只展翅飞翔的鸟。喻义：“希望杯”全国数学邀请赛为广大的青少年在科学思维能力上的健康发展开辟了一个广阔的空间，任他们自由翱翔。

★ “since 1990” 字样表示：“希望杯”全国数学邀请赛是从 1990 年开始创办的。



XIWANGBEI SHUXUE NENGLI PEIXUN JIAOCHENG

ISBN 7-5029-4047-2



9 787502 940478 >

ISBN 7-5029-4047-2/G · 1124

定价：14.00元

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

“希望杯”数学能力

培 训 教 程

初 一

杨翠芝 等◎编著

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程·初一/周国镇主编.
北京:气象出版社,2005.10

(“希望杯”数学竞赛系列丛书)

ISBN 7-5029-4047-2

I. 希… II. 周… III. 数学课-初中-教学参考资料 N. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 120733 号

气象出版社出版

(北京海淀区中关村南大街 46 号 邮编:100081)

总编室:010-68407112 发行部:010-62175925

网址:<http://cmp.cma.gov.cn> E-mail:qxpbs@263.net

责任编辑:黄丽荣 章澄昌 终审:汪勤模

封面设计:贾衍凤 版式设计:刘祥玉 责任校对:李佳凡

*

河北天普润印刷厂印刷

气象出版社发行

*

开本:850×1168 1/32 印张:10.125 字数:263千字

2005年12月第一版 2006年1月第二次印刷

印数:20001-40000 定价:14.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等,请与本社
发行部联系调换

“希望杯”全国数学邀请赛 组织委员会

顾 问

- 龚 昇** 著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长
- 梅向明** 著名数学家
北京师范大学原院长
- 徐利治** 著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

- 陈德泉** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长,现任
副理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 计 雷** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长,现任
副理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 徐伟宣** 应用数学家
中国科学院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任

- 曾任六届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 周国镇** 数学教育专家
《数理天地》杂志社社长、总编
历届“希望杯”组委会秘书长、命题委员会主任
- 刘学红** 中国青年报记者、中青在线网总裁
- 周春荔** 数学教育专家
首都师范大学教授
- 吕伟泉** 广东省教研室副主任
- 汪江松** 数学教育专家
《中学数学》主编
湖北大学教授
- 肖果能** 数学教育专家
中南大学教授
- 顾宏达** 数学教育专家
上海黄浦教育学院原院长
- 黄建弘** 数学教育专家
上海师资培训中心实验基地主任
- 欧益生** 浙江嘉兴市教研室主任
- 曾大洋** 福建泉州市数学会秘书长
- 龙开奋** 数学教育专家
广西师范大学副教授

委 员

- 北 京 牛玉石
- 天 津 王成维
- 澳 门 吕晓白
- 河 北 石瑞贞 胡天顺 张丽晨 关登超 耿昌敏 石扶兴
- 李本洲
- 山 西 张起林 白 枫 温树成 宋 校 马建党 王芝梅

内蒙古	张杨	志素	仁莉	王敦	荣特	刘爱	平清	刘彦	彰舒	南丁	高秀	恩敏
辽宁	赵陈	素玉	艳华	孙陈	家桂	顺王	清东	刘	蓉	舒凤	杰	魏丽
吉林	张于	胜利	华辉	刘李	颖修	赵孙	红兵	祝承	亮先	李春	花泉	
黑龙江	杨国	家政	政威	熊王	斌珠	王凤	春为	金绍	毛育	黎东		李鹏
上海	李许	国威	峰成	夏建	明珠	李刘	刘健	俞颂	莹旺	孔德	杨浩	陶建平
江苏	任方	明政	华政	李世	杰洋	应建	军丹	马建	新柱	何仁	荣中	
浙江	付熊	晋以	情祥	徐侯	源加	温董	乐华	王一	毛有	肖建	中杰	
福建	赵马	水国	军松	陈余	宝明	刘统	菊牛	杨德	焱	赵小	平	
江西	汪肖	江真	武署	谢黄	文毓	曾徐	山洪	郑俊	盛云	劳兆	喜忠	刘文
山东	周殷	周切	文清	梁石	乘永生	徐梁	小贱	邓志	刘仲	林国	邓正	刘超
河南	刘何	浩江	力明	王永	金浓	卢建	川明	刘				付冠
湖北	张李	黎荣	方英	石王	颖朝	钟莫	德林	冯惠	芹兴	王国	风	吴挽
湖南	王张	文秋	科让	王金	胡朝	牟王	兴华	罗朝	灵	罗	红	蓉
广东	王胡	秋学	让燕	王占	吕咏	徐学	徐芳					徐云
广西	杨闫	学让	燕德	李占	玉							
宁夏	闫卫	学让	燕德	李占	玉							
青海	杨卫	学让	燕德	李占	玉							
新疆	杨卫	学让	燕德	李占	玉							
				黄志	清	张	小平					

前 言

这套教程充分注意了新颁布的中小学数学教学大纲,力求充分体现“希望杯”的特色,为广大师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法,以“鼓励学好课本知识,适当拓宽知识面,激发学习数学的兴趣和热情,培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题,这些题目中绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命定的,其余则是由全国各地数学命题的研究人员编拟。这些题目,不但贴近现行的中小学数学课本,而且很有启发性、思考性和趣味性,寓科学于趣味之中,寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平,并且能实实在在地提高科学思维素质,而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此,历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好:中考、高考命题人员经常从中吸取营养;有远见的数学教师大量地从中选取资料,来充实和丰富教学内容;众多的数学教学和培训机构则用来作为教材的主要内容之一。最有说服力的是千千万万的中小學生,正是经过对“希望杯”试题的学习、研究,提高了水平,大大加强了学数学的兴趣和信心,他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是,北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子中有

不少人,在中学时代,都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年开始举办,至今已举办16届。16年来,参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级,每个年级的试题、培训题累计都超过2000个,四个年级的题目则累计近万个,几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容,不仅如此,而且蕴含了丰富的数学思想和方法。若要将这些题目全部做一遍,对于一位数学教师来说,确也值得和可能,但是对于一位中学生,则难度就很大了。因此如何从中提取最精彩最重要的部分,按数学的系统整理出来,就非常必要。本教程正是做了这样一件事:它从每个年级的2000多个题目中各精选了四分之一左右,分为若干个专题,对每个专题,给出了相关的必备知识,再详细分析若干个题目,然后安排做少量的题,这样一个过程,一个专题就拿下来了。一个个专题,陆续学下来,中学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握,数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小學生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容,另一方面又有不少中小學生并不满足于此,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程分课本以内的和课本以外的两部分。前者占教程的大部分,后者只占小部分。

《“希望杯”数学能力培训教程》现由气象出版社于2005年12月出版,包括初一、初二、高一、高二、小学(四、五年级),计五册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲,更突出对科学思维能力的培养,而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要,本教程将逐年修订,不断优化,力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小學生走向热爱数学、掌握数学的成功道路。

教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员,有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛,并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚的欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

2005年10月15日

注:周国镇 数学教育专家,《数理天地》杂志社社长兼总编;中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事,数学教育委员会主任;“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长,命题委员会主任。

目 录

“希望杯”全国数学邀请赛组织委员会

前 言

第一部分 基础篇

第 1 讲	有理数	(1)
第 2 讲	绝对值	(16)
第 3 讲	数轴	(31)
第 4 讲	比较数的大小	(41)
第 5 讲	一元一次方程	(52)
第 6 讲	用一元一次方程解应用题	(63)
第 7 讲	线段和角	(87)
第 8 讲	图形计数	(95)
第 9 讲	有趣的动手做	(103)
第 10 讲	数据和图	(111)
第 11 讲	相交线与平行线	(127)
第 12 讲	平面直角坐标系	(141)
第 13 讲	三角形	(146)
第 14 讲	面积问题	(158)
第 15 讲	用一元一次方程组解应用题	(171)
第 16 讲	不等式(组)	(181)
第 17 讲	实数	(191)

第二部分 提高篇

第 18 讲	不定方程(组)	(202)
第 19 讲	完全平方数	(215)
第 20 讲	质数与合数	(221)

第 21 讲	整除问题	(230)
第 22 讲	抽屉原理	(241)
第 23 讲	逻辑问题	(247)
第 24 讲	新概念问题	(256)
第 25 讲	联系电脑的问题	(269)
第 26 讲	数学英语	(279)
第 27 讲	开放题	(290)
第 28 讲	探究规律题	(305)

第一部分 基础篇



第1讲 有理数

一、知识提要

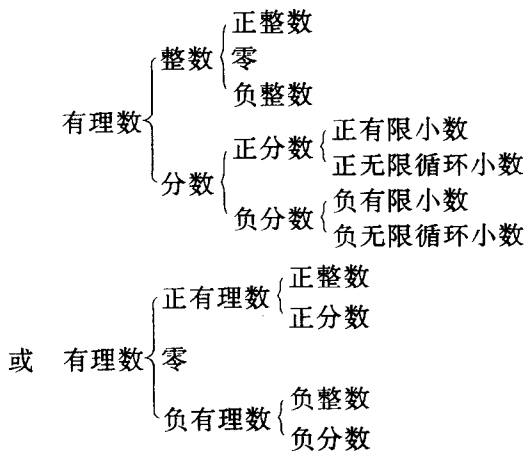
1. 整数和分数统称为有理数.

2. 有理数还可以这样定义:

形如 $\frac{p}{m}$ (其中 m, p 均为整数, 且 $m \neq 0$) 的数是有理数.

这种表达形式常被用来证明或判断某个数是不是有理数.

3. 有理数的数系表:



4. 有理数可以用数轴上的点表示.

5. 零是正数和负数的分界点;零不是正数也不是负数.

6. 如果两个数的和为 0,则称这两个数互为相反数. 如果两个数的积为 1,则称这两个数互为倒数.

7. 有理数的运算法则:

(1) 加法:两数相加,同号的取原来的符号,并把绝对值相加;异号的取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值,绝对值相等时,和为 0;一个数与 0 相加,仍得这个数.

(2) 减法:减去一个数等于加上这个数的相反数.

(3) 乘法:两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘;一个数与 0 相乘,积为 0.

乘方:求 n 个相同因数 a 的积的运算称为乘方,记为 a^n .

(4) 除法:除以一个数等于乘以这个数的倒数.

8. 有理数的运算律:

加法交换律: $a + b = b + a$;

加法结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

乘法交换律: $a \times b = b \times a$;

乘法结合律: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;

乘法分配律: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

二、例题

例 1 若 $19a + 98b = 0$,则 ab 是 ()

(A) 正数. (B) 非正数. (C) 负数. (D) 非负数.

分析 由 $19a + 98b = 0$,得 $19a = -98b$,可知 a, b 的符号相反或 $a = b = 0$,故有 $ab \leq 0$,即 ab 是非正数,选(B).

例 2 有如下四个命题:

① 有理数的相反数是正数;

- ② 两个同类项的数字系数是相同的；
 ③ 两个有理数的和的绝对值大于这两个有理数绝对值的和；
 ④ 两个负有理数的比值是正数。

其中真命题有 ()
 (A) 4 个. (B) 3 个. (C) 2 个. (D) 1 个.

第 11 届(2000 年)初一第 2 试

分析 ① 错误:只有负数的相反数才是正数;② 错误:因为同类项与数字系数无关;③ 显然不成立;④ 正确,应选(D).

例 3 有理数 a 等于它的倒数,有理数 b 等于它的相反数,则 $a^{1998} + b^{1998}$ 等于 ()
 (A) 0. (B) 1. (C) -1 . (D) 2.

第 9 届(1998 年)初一第 2 试

解 由 a 等于它的倒数, b 等于它的相反数,

$$\text{得 } a = \frac{1}{a}, b = -b.$$

$$\text{所以 } a^2 = 1, b = 0.$$

$$\text{因此, } a^{1998} + b^{1998} = (a^2)^{999} + 0^{1998} = 1.$$

故选(B).

例 4 $-4 \times 3^2 - (-4 \times 3)^2$ 等于 ()
 (A) 0. (B) 72. (C) -180 . (D) 108.

第 5 届(1994 年)初一第 1 试

分析 观察法,由 $-4 \times 3^2 < 0, (-4 \times 3)^2 > 0$,
 得 $-4 \times 3^2 - (-4 \times 3)^2 < 0$,选(C).

例 5 用简便方法计算 $7 + 97 + 997 + 9997 + 99997 =$

第 10 届(1999 年)初一培训题

分析 观察所给数的特点发现,它们分别与整十、整百、整千、整万接近,所以将它们表示成两数差的形式,如 $7 = 10 - 3$,

$97 = 100 - 3, 997 = 1000 - 3, \dots$ 然后再计算.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 7 + 97 + 997 + 9997 + 99997 \\ &= (10 - 3) + (100 - 3) + (1000 - 3) + \\ &\quad (10000 - 3) + (100000 - 3) \\ &= (10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000) - 3 \times 5 \\ &= 111110 - 15 = 111095. \end{aligned}$$

注:一般地,若所给数字与十,百,千,……比较接近时,首先将所给数字表示成十,百或千,……与一个较小数字的和(或差),然后再化简求值,这种方法称为凑整法.

$$\text{例 6} \quad -117 \times \left(\frac{1}{32} - 0.125 \right) \div (-1.2) \times \left(-1 \frac{3}{13} \right) =$$

第 10 届(1999 年)初一第 1 试

分析 所给式中既有分数又有小数,通常可将小数化成分数进行计算;又因为所给式中只有乘,除(括号内除外)两种运算,所以要先将除法运算转化成乘法运算,这样便于约分化简.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & -117 \times \left(\frac{1}{32} - 0.125 \right) \div (-1.2) \times \left(-1 \frac{3}{13} \right) \\ &= -117 \times \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{8} \right) \times \frac{5}{6} \times \frac{16}{13} \\ &= - \left(117 \times \frac{1}{13} \right) \times \left(\frac{16}{32} - \frac{16}{8} \right) \times \frac{5}{6} \\ &= -9 \times \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \times \frac{5}{6} \\ &= 9 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{45}{4} = 11 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 7 设 $a = 1 \div 2 \div 3 \div 4, b = 1 \div (2 \div 3 \div 4), c = 1 \div (2 \div 3) \div 4, d = 1 \div 2 \div (3 \div 4)$, 则 $(b \div a) \div (c \div d) =$

分析 根据“除以一个非零数等于乘以这个数的倒数”,可将

a, b, c, d 表达式及待求式进行化简, 然后再代入求值.

$$\text{解} \quad a = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24},$$

$$b = \frac{1}{2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = 6,$$

$$c = \frac{1}{2 \times \frac{1}{3}} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$d = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 \times \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{所以} \quad (b \div a) \div (c \div d) = \frac{b \times \frac{1}{a}}{c \times \frac{1}{d}} = \frac{bd}{ac}$$

$$= \frac{6 \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{24} \times \frac{3}{8}} = 64 \times 4 = 256.$$

例 8 $2 + (-3) + (-4) + 5 + 6 + (-7) + (-8) + 9 + 10 + (-11) + (-12) + 13 + 14 + 15 = \underline{\hspace{2cm}}.$

第3届(1992年)初一第1试

分析 观察所求式发现: 各数的绝对值逐渐递增, 数字前的正负号也有一定规律, 从而想到要适当地添加括号, 将所求式先分组, 再化简计算.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= [2 + (-3)] + [(-4) + 5] + [6 + (-7)] + \\ &\quad [(-8) + 9] + [10 + (-11)] + [(-12) + 13] \\ &\quad + (14 + 15) \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 29 = 29. \end{aligned}$$

例 9 $20 \div (0.30 + 0.31 + 0.32 + \cdots + 0.69)$ 的值的整数部分是 (\quad)