研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

高等空间机构学

Advanced Spatial Mechanism

黄 真 赵永生 赵铁石 著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

高等空间机构学

Advanced Spatial Mechanism

黄 真 赵永生 赵铁石 著

高等教育出版社

内容提要

本书全面介绍了作者近年在空间机构和并联机器人机构各方面的研究成果和最新进展，作为教材还注意到本书应有的系统性。全部内容包括机构分析和机构综合两个方面。在机构分析上，本书介绍了作者提出的基于约束螺旋的自由度分析方法，这是一个十分有效而又简便的方法；书中介绍的影响系数原理及其新发展特别适用于大量的各种不同型式的6自由度并联机构和少自由度并联机构的运动分析；介绍了新的基于机构学概念的奇异新分类，系统地分析了典型的6自由度 Stewart 机构的位置奇异及姿态奇异。在机构综合方面，本书讨论了各种自由度下的空间多环并联机构的机型综合，并重点介绍了难度大的4自由度和5自由度的并联机构的综合方法。此外，本书还讨论了三阶螺旋系，分析了少自由度机构的无限可能的空间运动的有限空间分布问题，以及少自由度并联机器人机构的基于位移流形的机型综合原理等比较深入的问题。

本书可以作为硕士生教材，其中比较深入的部分博士生学习时也可选用，还可以作为广大有关科技人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等空间机构学/黄真，赵永生，赵铁石著. —北京：高等教育出版社，2006.5
ISBN 7-04-019265-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①黄…②赵…③赵… Ⅲ.空间机构-教材 Ⅳ.TH112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第035434号

策划编辑	刘剑波	**责任编辑**	陈大力	**封面设计**	李卫青
责任绘图	吴文信	**版式设计**	史新薇	**责任校对**	杨雪莲
责任印制	尤 静				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2006年6月第1版
印 张	24.75	**印 次**	2006年6月第1次印刷
字 数	420 000	**定 价**	46.30元

物料号 19265-00

前　言

机构学是一门十分古老的科学，与一切事物一样，至今仍然不断地向前发展，不断地焕发出新的气息。串联式机器人的发展曾经带动了空间机构学的发展，近20年来并联机器人的发展再次带动了空间机构学。特别是今天，为了我国的科技进步，为了大力发展自主创新，机构学正面临着一个空前的机遇。任何机械系统的创新离不开机构的创新，从某种意义上还可以说机构的创新是机械系统创新的灵魂。在这种形势下出版本书，希望能对我国的机械创新有所贡献，对这方面的研究生教学有所帮助。

本书第一作者曾出版过两本关于机器人机构学方面的著作。本书为了响应教育部研究生教材征集，又系统地总结了我们近10年在空间机构学和并联机器人机构学上的新的研究成果。这些材料是很有特色的。比如在机构分析上，我们提出的基于约束螺旋理论的自由度分析原理和对应的方法，不仅理论上解决了困惑机构学界的一个150年的历史问题，而且所提出的方法简单、巧妙，只需一张纸、一枝笔，绝大多数机构的自由度分析可以在几分钟内完满地解决。又如在机构综合上，也是基于约束螺旋理论，介绍了我们提出的少自由度并联机构的综合原理，这是一个完善的能综合出所有9种类型的对称少自由度并联机型的综合理论。掌握此原理就可以综合任何期望自由度的机构，包括非对称的少自由度并联机构。可以看到，这些理论对于机械的创新是十分有意义的。关于螺旋理论，有线性代数基础的人并不难掌握，因此本书的前三章对螺旋理论做了简要介绍。

本书是基于螺旋理论和影响系数原理展开研究的，本书第一作者感谢美国的Duffy教授和Tesar教授，在1982年作为访问学者访问Florida大学时，是他们传授给我这些基本理论并引领我到这个新的研究领域，并取得许多成绩。二十多年后的今天，这两个理论仍然具有巨大的理论潜力，即使是出现了像李群、李代数等现代数学理论应用到机构学的情况下，螺旋理论和影响系数原理仍能够解释和分析机构学理论上新出现的许多问题，取得好的效果。特别是它们比较通俗易懂，易于为广大科技工作者和工程师所掌握。一般说，新的较深的数学理论作为工具在研究问题时能更深入事物的内部，因而进行研究工作时多采用较高深的数

学，为此在本书的末尾也对这样的新的数学及其应用做了一些基础性的介绍。

作者在此要深深地感谢国家自然科学基金会。在这近20年来的科学研究中得到国家自然科学基金会长期的、不间断的支持。没有这些支持要取得这样的成果是不可想象的。

在本书所综合的学术成果中，许多的燕山大学的研究生都做出过十分有意义的贡献。在这里向他们表示感谢。从这里也看到了研究生制度对于推进科学研究的重要作用：既培养了人又出了成果。此外，还向本书中参考过或引用过的文献的全部作者表示谢意。

本书的撰写分工为：赵永生执笔本书的第四章、第六章到第八章和第十章；赵铁石执笔第十一章至第十三章；黄真统编全书并执笔第一章至第三章、第五章和第九章。

本书作为研究生教材，可以为硕士生课程选用，一些比较深入的章节目录中标以星号可以为博士生选用。为了读者学习和进一步开展科学研究的方便，文中对许多理论及观点都给出出处，这对于想进一步深入研究的读者，可以查阅有关的文献。

限于作者的水平和时间的限制，本书疏虞之处在所难免，恳请读者和各方面专家批评指正。

作　者
于秦皇岛海边燕山大学
2005年10月

目　　录

第一篇　螺旋理论

第二篇　机构的分析与综合

第一篇
螺旋理论

应用螺旋理论做空间机构的某些分析是比较方便的，它是诸种常用的数学方法中较好的一种。螺旋也称旋量。一个旋量可以表示空间的一组对偶矢量，从而可以用来同时表示矢量的方向和位置，同时表示运动学中的角速度和线速度，以及同时表示刚体力学中的力和力矩。这样一个含6个标量的旋量概念，就易于应用于空间机构的运动和动力分析。它也易于与其他方法如矢量法、矩阵法和运动影响系数法之间的相互转化。它具有几何概念清楚、物理意义明确、表达形式简单、代数运算方便、理论上的难度也不是很高等优点，因而得到广泛的应用。对目前机构学上的许多前沿性的研究问题，螺旋理论也做出了贡献。

螺旋理论形成于19世纪。首先，Poinsot在19世纪初通过对刚体上力系的简化，得到具有旋量概念的力矢与共线的力偶矢，这是一组对偶矢量。Plücker[1]确定了空间直线的方向位置的6个坐标，这就称为Plücker线坐标。1900年，Ball写出经典的著作《螺旋理论》[2]，书中用螺旋讨论了在复合约束下刚体的运动学和动力学。

在20世纪的前半叶，螺旋理论几乎无人问津。直到1950年，Dimentberg在分析空间机构时首次应用了螺旋理论[3,4]，引起了人们的关注。接着，Freudenstein、Yang等[5]应用对偶四元素、螺旋微分于空间机构的位移和动力分析。Phillips[6]应用螺旋理论分析三物体的相互运动。1978年Hunt的《运动几何学》是螺旋理论的现代发展[7]。Waldron[8]、Sugimoto和Duffy[9]等在螺旋理论及其应用上都做出了贡献。Duffy[10]在1984年首先将螺旋理论应用到并联机器人上，其后黄真[11]于1985年用螺旋理论分析并联机器人的瞬时螺旋运动。这些是在并联机器人上的早期研究。本篇基本的内容选自1983年Duffy在佛罗里达大学的课堂讲义[12]。今天看来Duffy的讲义仍旧是表述最好的、深入浅出的关于螺旋理论基础的教材。这里谨向已去世的Duffy教授表示诚挚的敬意。

第一章　螺旋理论基础

本章先从空间的点、线、面的矢量表示开始，建立它们的齐次坐标，讨论它们的相互关系。在此基础上引出两个重要概念，即线矢量和旋量，讨论它们的性质和代数运算。最后，结合机器人空间开链机构及空间单闭环机构建立它们的运动副的螺旋表示。

1-1　点线面的齐次表示

1-1-1　点的齐次坐标

在坐标系 $OXYZ$ 中，A 点的位置由矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 决定，如图 1-1 所示。若有 4 个数 x_0、y_0、z_0 和 d，使 $x_0/d=x$，$y_0/d=y$ 及 $z_0/d=z$，则 A 点的位置矢量可以表示为

$$\boldsymbol{r}=(x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k})/d \qquad (1-1)$$

（点的齐次坐标的这 4 个数 x_0、y_0、z_0 和 d，也常常表示为 x_1、x_2、x_3、x_4，当 $\boldsymbol{X}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{0}$ 时，无点存在）。注意，对于齐次坐标 0 不表示任何点。如果令

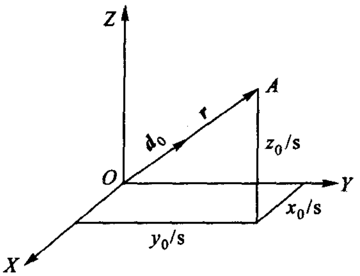

图 1-1　点的齐次坐标

$$(x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k})=\boldsymbol{d}_0$$

显然 $\boldsymbol{d}_0$ 是沿直线 $\boldsymbol{OA}$ 方向的矢量。代入式(1-1)得 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{d}_0/d$，这里写成

$$\boldsymbol{r}d=\boldsymbol{d}_0 \qquad (1-2)$$

此式表示了 A 点的位置。式中 d 及 $\boldsymbol{d}_0$ 是 A 点位置的齐次坐标。因为在式(1-2)中，以标量 λ 构成 λd 及 $\lambda\boldsymbol{d}_0$ 代替 d 及 $\boldsymbol{d}_0$，表示的是同一个点 A 的坐标。点的这种齐次坐标记为$(d;\boldsymbol{d}_0)$。由于点的坐标取决于 3 个独立的参数，故在三维空间点的数目有 ∞^3 个。由式(1-2)，A 点至原点的距离为

$$|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{d}_0|/d \qquad (1-3)$$

当 $|\boldsymbol{d}_0|=0$，$|\boldsymbol{r}|=0$，A 点与原点重合；当 $d=0$，$|\boldsymbol{r}|=+\infty$，A 点在无穷远。

1-1-2　直线的矢量方程

空间有两个点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$，见图 1-2。若按一定的顺序连接这两点，就决定了一条空间直线的位置和方向，这条有向的直线段可由矢量 $\boldsymbol{S}$ 表示。在直角坐标系中，$\boldsymbol{S}$ 与其 3 个分量的关系为

$$\boldsymbol{S}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

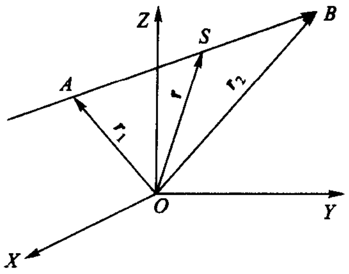

图 1-2　直线的矢量方程

如果令

$$x_2-x_1=L$$
$$y_2-y_1=M$$
$$z_2-z_1=N$$

代入式(1-4)，则此有向直线段为

$$\boldsymbol{S}=L\boldsymbol{i}+M\boldsymbol{j}+N\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

两点之间的距离或直线段的长度为

$$|\boldsymbol{S}|=\sqrt{L^2+M^2+N^2} \tag{1-6}$$

设

$$\begin{aligned} l&=L/|\boldsymbol{S}| \\ m&=M/|\boldsymbol{S}| \\ n&=N/|\boldsymbol{S}| \end{aligned} \tag{1-7}$$

L、M、N 是有向线段 $\boldsymbol{S}$ 的方向数，而 l、m、n 是 $\boldsymbol{S}$ 的方向余弦。显然 $l^2+m^2+n^2=1$。若给定直线方向，直线在空间的位置可通过直线上某点的矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 给定。这样，这条直线的矢量方程可以写为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{S}=0$$

再进一步改写就成为直线的标准形式

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_0 \tag{1-8}$$

其中 $\boldsymbol{S}_0$ 为直线的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与矢量 $\boldsymbol{S}$ 的叉积

$$\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{S} \tag{1-9}$$

它称为矢量 $\boldsymbol{S}$ 对原点的线矩(moment of line)。线矩也是矢量，其大小及方向与矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的大小以及它们相对坐标系在空间的方向位置有关。若 $\boldsymbol{S}$ 是单位矢量，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}=1$，则线矩 $\boldsymbol{S}_0$ 的模表示直线到原点的距离。$\boldsymbol{S}$ 是方向余弦没有单位，$\boldsymbol{S}_0$ 却具有长度单位。当矢量 $\boldsymbol{S}$ 过原点，其线矩为零，$\boldsymbol{S}_0=0$。当 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{S}_0$ 给定后，直线在空间的方向及位置都被确定，而且它们是一一对应的。显然，矢量 $\boldsymbol{S}$ 与其对原点之线矩是互

为正交的，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}_0=0$。

决定直线的矢量方程中的两个参数 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{S}_0$ 也是齐次坐标，因为以标量 λ 构成的 $\lambda\boldsymbol{S}$ 及 $\lambda\boldsymbol{S}_0$，代入式(1-8)，所表示的仍是同一条直线。只是直线段有不同的长度。这种满足正交条件的齐次坐标$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$表示了直线在空间的位置及方向，$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$称为直线的 Plücker 坐标，或 Plücker 线坐标。空间中的直线与其 Plücker 坐标$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$是一一对应的。两个矢量的如此结合也称对偶矢量，$\boldsymbol{S}$ 为对偶矢量的原部(real unit)；$\boldsymbol{S}_0$ 为对偶矢量的对偶部(dual unit)。式(1-8)中 $\boldsymbol{S}_0$ 表示的叉积，$\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{S}$，如写为行列式形式，为

$$\boldsymbol{S}_0=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ L & M & N\end{vmatrix}$$

行列式展开，有

$$\boldsymbol{S}_0=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

其中 P、Q、R 为

$$\begin{aligned}P&=y_1N-z_1M\\ Q&=z_1L-x_1N\\ R&=x_1M-y_1L\end{aligned} \tag{1-11}$$

同样，将式(1-8)左边的叉积也展开，并将式(1-11)代入，得到空间直线方程的代数式

$$\begin{aligned}yN-zM-P&=0\\ zL-xN-Q&=0\\ xM-yL-R&=0\end{aligned}$$

因为直线 $\boldsymbol{S}$ 与其线矩为正交，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}_0=0$，故由式(1-5)及式(1-10)有

$$LP+MQ+NR=0 \tag{1-12}$$

直线的 Plücker 坐标$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$中的两个矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}_0$ 都可以用直角坐标系的 3 个分量表示，这样 Plücker 坐标的标量形式即为$(L,M,N;P,Q,R)$，L、M、N 是有向线段 $\boldsymbol{S}$ 的方向数，P、Q、R 是该线段 $\boldsymbol{S}$ 对原点的线矩在 X、Y、Z 三轴的分量。因为这 6 个量 L、M、N、P、Q、R 之间存在关系式(1-12)，所以 6 个分量中只有 5 个是独立的。在三维空间中就有 ∞^5 条不同方向、位置和长度的有向线段。从式(1-8)也可以看到，该直线方程取决于两矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的 5 个独立的参数。

从上面可以看到，直线可以用式(1-8)的矢量方程表示，也可以用 Plückerr 坐标$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$或$(L,M,N;P,Q,R)$表示。此外，表示直线的对偶矢量还可以写成$(\boldsymbol{S}+\in\boldsymbol{S}_0)$[13]，其中 $\in$ 被称为对偶标识符(Clifford factor)，且有$\in^2=\in^3=\cdots=0$。这里最重要的是这两个矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}_0$ 决定了一条直线在空间的方向和位置。$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$唯一地对应空间的一条直线，而空间的一条直线也唯一地对应一组对偶矢量$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$，它们具有一一对应的性质。

例 1－1

$(l\ m\ n;\ 0\ 0\ 0)$为过原点的直线，方向余弦为$(l\ m\ n)$；

$(l\ 0\ 0;\ 0\ a\ b)$为一条不过原点平行于 X 轴的空间直线；

$(l\ m\ n;\ p\ q\ r)$，且 $lp+mq+nr=0$，这是一条不过原点方向为$(l\ m\ n)$的直线。

若有过原点的矢量 $\boldsymbol{P}$ 垂直相交于直线$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$，图 1－3，则矢量 $\boldsymbol{OP}$ 的模 $|\boldsymbol{P}|$ 是从原点 O 到直线的距离，由于矢量 $\boldsymbol{P}$ 的端点在直线 $\boldsymbol{S}$ 上，满足直线方程(1－8)，即 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_0$。将此等式两边左面叉乘 $\boldsymbol{S}$，有 $\boldsymbol{S}\times(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S})=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_0$，展开左边矢量的三重叉积，有

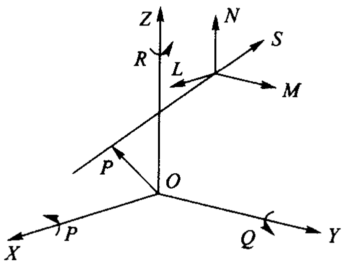

图 1－3　直线到原点的距离

$$\boldsymbol{S}\times(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P})\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S})\boldsymbol{P}$$

解出 $\boldsymbol{P}$，有

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_0}{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}} \tag{1-13}$$

因为直线 $\boldsymbol{S}$ 与线矩相互垂直，上式可写为

$$\boldsymbol{P}=\frac{|\boldsymbol{S}|\ |\boldsymbol{S}_0|}{|\boldsymbol{S}|\ |\boldsymbol{S}|}\boldsymbol{e}=\frac{|\boldsymbol{S}_0|}{|\boldsymbol{S}|}\boldsymbol{e}$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 是单位矢量，其方向由 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_0$ 决定，这样直线 $\boldsymbol{S}$ 到原点的距离 $|\boldsymbol{P}|$ 为

$$|\boldsymbol{P}|=\frac{|\boldsymbol{S}_0|}{|\boldsymbol{S}|} \tag{1-14}$$

由式(1－14)可以看到，当 $\boldsymbol{S}_0=0$，则 $|\boldsymbol{P}|=0$，直线到原点的距离为零，即直线过原点。此时直线的 Plücker 坐标可写为$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{0})$，或$(l\ m\ n;\ 0\ 0\ 0)$。反之，若 Plücker 坐标的前 3 个标量为零，即当 $\boldsymbol{S}=0$，而 $|\boldsymbol{S}_0|$ 为有限值时，$|\boldsymbol{P}|=\infty$，此时直线位于距原点无穷远的平面上，写成 Plücker 线坐标是$(\boldsymbol{0};\boldsymbol{S}_0)$。因为此时对于任何选择的原点，无穷远处的一个无穷小的矢量，它对原点的线矩皆为 $\boldsymbol{S}_0$。$\boldsymbol{S}_0$ 与原点位置选择无关，这说明$(\boldsymbol{0};\boldsymbol{S}_0)$成为自由矢量。这就是说，若直线的 Plücker 坐标的第一个矢量为零，表

示该直线位于无穷远处。通常自由矢量记为$(\mathbf{0};\boldsymbol{S})$。

1-1-3 平面的矢量方程

若矢量$\boldsymbol{n}(L,M,N)$表示了平面的法线，图1-4，平面又通过空间某已知点$\boldsymbol{r}_1(x_1,y_1,z_1)$，此时平面的矢量方程可以表示为$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0$。这个方程可以改写成平面的标准形式

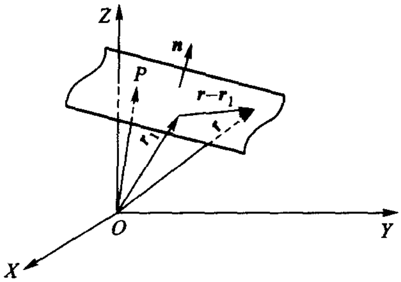

图1-4 平面的矢量方程

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=n_0 \tag{1-15}$$

其中标量

$$n_0=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=x_1L+y_1M+z_1N$$

是点的位置矢量与平面的单位法矢的点积。显然，n_0的大小与矢量$\boldsymbol{n}$的大小、方向以及平面对坐标系的相对位置$\boldsymbol{r}_1$有关。由式(1-15)看出，$(\boldsymbol{n};n_0)$是平面的齐次坐标，因为$(\lambda\boldsymbol{n};\lambda n_0)$表示的是同一个平面。

平面的齐次坐标$(\boldsymbol{n};n_0)$也可表示为x_1,x_2,x_3,x_4。这样平面的齐次方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$

由于$\boldsymbol{n}$和n_0决定3个独立变量，故在三维空间有∞^3个平面。若平面到原点的距离用$|P|$表示，P与n平行，故$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{n}=0$。
以n左面叉乘上式

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{n})=0$$

展开

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\boldsymbol{n}=0$$

所以

$$\boldsymbol{P}=\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P})\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}=\frac{n_0\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}$$

这样平面至原点的距离为

$$|p| = \frac{|n_0 n|}{n \cdot n} = \frac{|n_0|}{|n|} \tag{1-16}$$

故平面至原点的距离等于 n_0 的绝对值除以法矢的模。若 $n_0=0$，则平面过原点，齐次坐标为$(\boldsymbol{n};0)$；若 $\boldsymbol{n}=0$，平面在无穷远处，齐次坐标为$(\boldsymbol{0};n_0)$。若 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量，则 n_0 是原点到平面的距离。

空间一条直线与该直线外一点也能决定一个平面。若有点 $\boldsymbol{A}$，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$；空间另有一条直线，其方程为 $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_{01}$，见图 1－5，这里 $\boldsymbol{r}_1$ 为直线上的动点。显然矢量 $\boldsymbol{S}_1$ 和$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)$都在由该直线和 $\boldsymbol{A}$ 所决定的平面内，因此这个平面的法线矢量可由叉积$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{S}_1$ 决定。这样该平面可用如下方程表示

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{S}_1=0$$

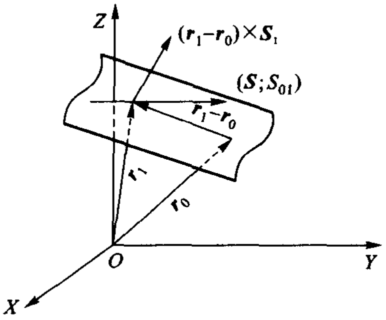

图 1－5　点和直线决定一平面

展开上式左边，因为 $\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{S}_1)=0$ 有

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{S}_1 = -\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{S}_1$$

将 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_{01}$代入上式后得到平面方程

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{S}_{01}-\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{S}_1)=\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{S}_{01} \tag{1-17}$$

此平面方程表示成齐次坐标为$(\boldsymbol{S}_{01}-\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{S}_1;\boldsymbol{S}_{01}\cdot\boldsymbol{r}_0)$。如果 $\boldsymbol{A}$ 点在这条已知的直线 $\boldsymbol{S}_1$ 上，则 $\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_{01}$，$\boldsymbol{S}_{01}\cdot\boldsymbol{r}_0=0$。这样平面的齐次坐标的两项都等于零，当然这样的条件不能确定一个平面。

比较点、线、面的齐次坐标，可以看到其形式是很相近的。点、线、面的齐次坐标分别为$(d;\boldsymbol{d}_0)$、$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$、$(\boldsymbol{n};n_0)$。点、线、面至原点距离则分别为

$$\frac{|\boldsymbol{d}_0|}{|d|};\frac{|\boldsymbol{S}_0|}{|\boldsymbol{S}|};\frac{|n_0|}{|\boldsymbol{n}|}$$

1－2 点线面的相互关系及两直线的互矩

1－2－1 直线与平面的交点

若空间有一直线及一平面，如图1－6所示，它们的方程分别为

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_{01} \tag{1-18}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}_2=S_{02} \tag{1-19}$$

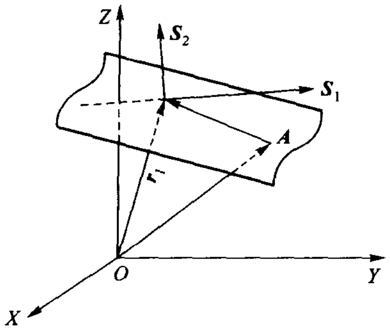

图1－6 直线与平面的交点

式中 $\boldsymbol{S}_1$ 是直线的方向矢量，$\boldsymbol{S}_{01}$ 是直线对原点的线矩；$\boldsymbol{S}_2$ 是平面的法线矢量，而 S_{02} 与平面至原点的距离有关。将式(1－18)两边左叉乘 $\boldsymbol{S}_2$ 得

$$\boldsymbol{S}_2\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{S}_1)=\boldsymbol{S}_2\times\boldsymbol{S}_{01}$$

展开上式左边得

$$(\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_2\times\boldsymbol{S}_{01}$$

将式(1－19)代入后得到

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2)=\boldsymbol{S}_2\times\boldsymbol{S}_{01}+S_{02}\boldsymbol{S}_1 \tag{1-20}$$

此式即为直线与平面交点的矢量表达，写成齐次坐标为($\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$;$\boldsymbol{S}_2\times\boldsymbol{S}_{01}+S_{02}\boldsymbol{S}_1$)。如果 $\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=0$，即这条直线与平面的法线垂直。亦即是说，当直线与平面平行，它们的交点在无穷远处；当这条直线与平面重合时，就会有无穷多的重合点。

1－2－2 两平面的交线

有两个平面，其齐次坐标分别为($\boldsymbol{S}_1$;S_{01})和($\boldsymbol{S}_2$;S_{02})，两平面相交得一直线。因为 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ 分别是两平面的法线矢，所以两平面的交线将与 $\boldsymbol{S}_1$ 及 $\boldsymbol{S}_2$ 垂直，亦即平行于 $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2$。为求这条交线的方程，可将下面

的三重叉积展开：

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}_2)\boldsymbol{S}_1-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{S}_2$$

把这两平面的方程 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}_1=S_{01}$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}_2=S_{02}$ 代入，得两平面的交线方程为

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=S_{02}\boldsymbol{S}_1-S_{01}\boldsymbol{S}_2 \tag{1-21}$$

这样，这条直线的 Plücker 坐标是$(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2;S_{02}\boldsymbol{S}_1-S_{01}\boldsymbol{S}_2)$。

若 $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{0}$。即两平面平行，它们的交线在无穷远处，其 Plücker 坐标为$(\boldsymbol{0};S_{02}\boldsymbol{S}_1-S_{01}\boldsymbol{S}_2)$。若两平面的法矢量 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 的方向数分别是(L_1,M_1,N_1)和(L_2,M_2,N_2)，则它们交线的 Plücker 坐标为$(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2;S_{02}\boldsymbol{S}_1-S_{01}\boldsymbol{S}_2)$，其 6 个分量分别为

$$L=M_1N_2-M_2N_1,\quad P=S_{02}L_1-S_{01}L_2$$
$$M=N_1L_2-N_2L_1,\quad Q=S_{02}M_1-S_{01}M_2$$
$$N=L_1M_2-L_2M_1,\quad R=S_{02}N_1-S_{01}N_2$$

1-2-3　两直线的互矩

设空间有相错的两条直线，它们不平行也不相交，见图 1-7，其矢量方程为

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_{01}$$
$$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{S}_{02}$$

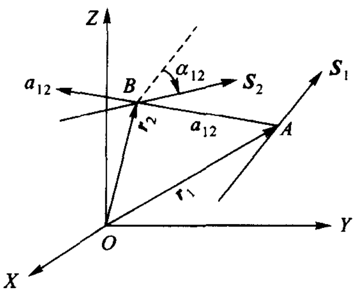

图 1-7　两直线的互矩

若它们的公垂线为 $a_{12}\boldsymbol{a}_{12}$，其中 $\boldsymbol{a}_{12}$是单位矢量，$\boldsymbol{a}_{12}\cdot\boldsymbol{a}_{12}=1$，而其系数 a_{12}是两线间的垂直距离。两线之间的扭向角记为 α_{12}。A、B 两点是两直线间公垂线的两个垂足。直线 $\boldsymbol{S}_2$ 对 $\boldsymbol{S}_1$ 线上垂足 A 点的线矩 $a_{12}\boldsymbol{a}_{12}\times\boldsymbol{S}_2$ 与直线 $\boldsymbol{S}_1$ 的点积 $a_{12}\boldsymbol{a}_{12}\times\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{S}_1$，称为直线 $\boldsymbol{S}_2$ 关于 $\boldsymbol{S}_1$ 的矩。同样，直线 $\boldsymbol{S}_1$ 对直线 $\boldsymbol{S}_2$ 上垂足 B 点的线矩为 $a_{12}\boldsymbol{a}_{21}\times\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$，即是直线 $\boldsymbol{S}_1$ 对直线 $\boldsymbol{S}_2$ 的矩。显然此两点积是相等的：

$$a_{12}\boldsymbol{a}_{12}\times\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{S}_1=a_{12}\boldsymbol{a}_{21}\times\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$$

这相等的两个表达式均定义为两直线的互矩（mutual moment），记为 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}$，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{m}}=a_{12}\boldsymbol{a}_{12}\times\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{S}_1 \tag{1-22}$$

展开此式并考虑到

$$a_{12}\boldsymbol{a}_{12}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \tag{1-23}$$