

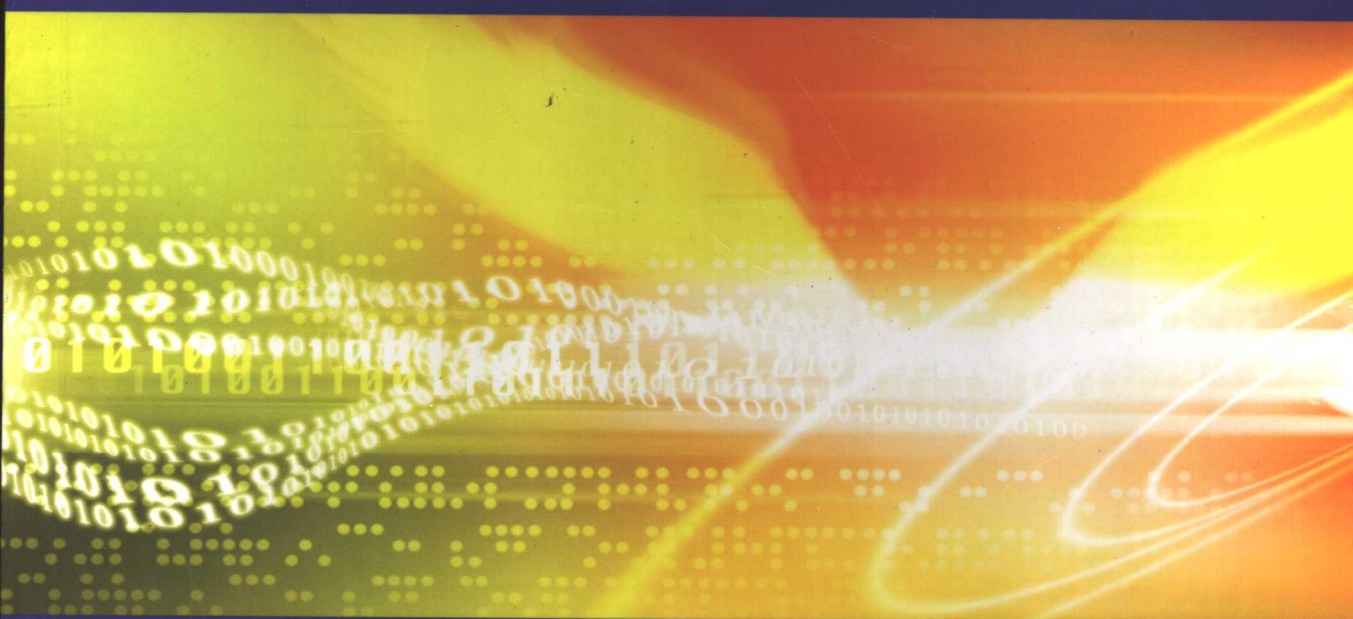
PRINCIPLE

精密仪器仪表 弹性元件的设计原理

PRECISION-INSTRUMENTS MANUFACTURE

刘人怀 著

Principle for
Designing Elastic Elements in
Precision-Instruments Manufacture



暨南大学出版社
Jinan University Press

精密仪器仪表弹性元件的 设计原理

刘人怀 著



暨南大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

精密仪器仪表弹性元件的设计原理/刘人怀著.

—广州:暨南大学出版社, 2006. 4

ISBN 7-81079-334-9

I. 精… II. 刘… III. ①仪器-弹性元件-设计-计算力学②仪器-弹性元件-设计-分析(力学)③仪表-弹性元件-设计-计算力学④仪表-弹性元件-设计-分析(力学) IV. TH703.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 108559 号

出版发行: 暨南大学出版社

地 址: 中国广州暨南大学

电 话: 总编室 (8620) 85221601 85226581

营销部 (8620) 85227972 85220602 (邮购)

传 真: (8620) 85221583 (办公室) 85223774 (营销部)

邮 码: 510630

网 址: <http://www.jnupress.com> <http://press.jnu.edu.cn>

排 版: 广州市星辰文化发展部

印 刷: 佛山市浩文彩色印刷有限公司

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 30.25

字 数: 557 千

版 次: 2006 年 4 月第 1 版

印 次: 2006 年 4 月第 1 次

定 价: 56.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题, 请与出版社总编室联系调换)

序 言

众所周知，仪器仪表是认识世界的工具，机器是改造世界的工具，改造世界是以认识世界为前提。仪器仪表技术属于信息技术领域，是信息的源头技术。

21 世纪是信息科技的世纪，处于这样的时代，仪器仪表由于它的多学科综合的特点以及特殊的作用和地位，因而成为国家高科技发展水平的标志。

弹性元件是精密仪器仪表和传感器的一类特别重要的元器件，在其构造中起着十分重要和独特的作用。简单地说，就是起关键作用和核心作用。它相当于人的眼睛、耳朵等感觉器官，能灵敏感受到环境的变化（力、位移、流量、速度、频率等），从而发出信号，由控制系统进行控制。

在精密仪器仪表中，那种依靠自身的弹性性质来发挥作用的零件就被称作弹性元件。

弹性元件的形状、构造和使用呈多样性。

弹性元件主要包括以下几类：弹簧、波登管、圆形光滑膜片、波纹膜片、波纹管、波纹壳和跳跃膜片。前三种的设计理论研究比较成熟，后四种研究相当困难。

实际上，弹性元件远远不是仪器仪表所特有。在人们日常生活中，在办公场所内，在各种工程结构中，大家都会遇到它，可以说无处不在、无所不有。例如，喝饮料时所用的塑料吸管，其前端部就常有一个典型的波纹管。

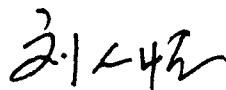
从 1962 年 9 月起，著者开始从事精密仪器仪表弹性元件的设计理论研究工作，从力学上讲，它属于板壳非线性力学范畴，研究十分困难。40 多年来，著者系统地研究了波纹圆板（即波纹膜片）、单层或双层扁壳（即跳跃膜片）、波纹管、波纹壳和圆形板（即圆形光滑膜片），在国内外学术刊物上发表了一些学术论文，并进行实际应用。本书是这些论文的汇编，其中一些论文是独立完成，一些论文是与老师和学生合作完成。为便于读

者阅读和使用,已将原来用英语写作的论文译成中文,个别论文还补充了更详尽的公式。同时,在个别地方订正了过去印刷等方面的错误和疏忽。

著者希望本书的出版将有助于我国精密仪器仪表和传感器弹性元件的设计制造和科技进步。实际上,这些研究工作对于其他工程,如航天、航空、航海、石油化工和建筑等的结构设计制造也有指导性的价值。

整理论文时,感慨万千。如本书第1.1节的工作成果,源于1964年我国飞机测高计的试制任务。研究历时4年之久,遍尝科研之苦和人生磨难,最后在史无前例的“文革”中的1968年,冒着巨大的政治风险“偷偷”完成,却直到10年之后,才得以问世发表。它浸渍了汗水和心血,承载着一段风雨飘摇却不弃献身科学之夙愿、清贫寡淡却不失人间真情的光阴故事。值得宽慰的是,它发表后仍然是我国这一领域的第一篇学术论文,并立即受到同行专家赞誉。

最后,借本书出版之际,真诚感谢曾经帮助和支持过我进行科研的所有朋友们。



2003年6月7日于暨南大学明湖苑

目 录

第一章 波纹圆板	1
1.1 波纹圆板的特征关系式	3
1.2 具有光滑中心的波纹圆板的特征关系式	11
1.3 中心载荷作用下具有光滑中心的波纹圆板的大挠度问题	25
1.4 复合载荷下波纹圆板的非线性分析	39
1.5 波纹圆板的非线性弯曲和振动	57
1.6 修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用	73
1.7 均布载荷作用下具有光滑中心波纹膜片的非线性分析	83
1.8 复合载荷作用下具有光滑中心波纹膜片的非线性分析	90
第二章 波纹环形板	99
2.1 波纹环形板的非线性弯曲	101
2.2 均布压力下波纹环形板的大挠度问题	110
2.3 在复合载荷作用下波纹环形板的非线性弯曲	121
第三章 具有平面边缘区域的波纹圆板	133
3.1 具有平面边缘区域的波纹圆板的大挠度问题	135
第四章 具有平面边缘区域的波纹环形板	155
4.1 均布载荷作用下波纹环形板的非线性弯曲	157
4.2 中心受载下具有平面边缘区域的固支波纹环形板的非线性 分析	169
4.3 复合载荷作用下具有刚性中心和光滑边缘的波纹环形板的 非线性弯曲	183
第五章 具有边缘大波纹的波纹环形板	201
5.1 具有边缘大波纹的波纹环形板的非线性弯曲	203
5.2 均布载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲	215
5.3 复合载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲	226

第六章 圆形板	235
6.1 弹性支承环形板的非线性弯曲	237
6.2 薄圆板的非线性振动	242
6.3 研究正交各向异性圆板非线性振动问题的新方法	250
第七章 波纹管	259
7.1 变厚度 U 型波纹管非线性变形分析	261
第八章 扁球壳	275
8.1 在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题	277
8.2 弹性圆底扁球壳在边缘均布力矩作用下的非线性稳定问题	299
8.3 正交异性扁薄球壳的非线性振动	317
第九章 中心开孔扁球壳	337
9.1 在内边缘均布力矩作用下中心开孔圆底扁球壳的非线性稳定 问题	339
9.2 在边缘载荷作用下中心开孔圆底扁薄球壳的轴对称稳定性	352
9.3 中心开孔扁球壳在均布载荷作用下的非线性屈曲	364
第十章 具有硬中心的开顶扁球壳	375
10.1 均布载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题	377
10.2 均布载荷作用下具有硬中心的开顶扁球壳的非线性屈曲	394
10.3 集中载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题	401
10.4 轴对称分布载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题	414
第十一章 波纹扁球壳	429
11.1 波纹扁球壳的非线性稳定性	431
11.2 波纹扁球壳的各向异性参数	445
第十二章 双层金属旋转扁壳	453
12.1 双层金属旋转扁壳的非线性热稳定性	455

第一章

波纹圆板

1. 1

波纹圆板的特征关系式*

一、前 言

波纹圆板在精密仪器的灵敏弹性元件中起着很重要的作用。然而,这种弹性元件的理论研究至今还很不充分。造成这种状况的主要原因是波纹圆板本身形状复杂,参数很多,特别是大挠度非线性微分方程组在数学上求解极困难。以往的理论计算大致可分为两类。一类是采用壳体的大挠度方程来求解,如文献^[1]用 Галёркин 方法求得了浅正弦截面波纹圆板的特征关系式。其优点是能探讨波纹圆板的跳跃现象。缺点是仅讨论了浅正弦波纹一种形状,而且所涉及的挠度范围很小(厚度的1~5倍范围内)。此后,文献^[2]用同样方法处理了较深波纹圆板的大挠度问题。另一类是将波纹圆板看成是结构上的各向异性圆平板,采用各向异性圆板大挠度方程来进行研究,如文献^[3]用 Галёркин 方法获得了适应各种波纹圆板的特征关系式。其优点是能同时讨论各种形状的波纹圆板,涉及的挠度范围较大(厚度的10倍左右)。缺点是解法本身限制了结果的精确度和适应范围。文献^[4]也用能量法处理了正弦截面波纹圆板,获得了类似的结果。

本文注意到第二类方法的优点和不足之处,期望从非线性微分方程的求解上来获得更好的结果,以适应工程设计的需要。我们使用各向异性圆板的大挠度方程,并采用修正迭代法^[5]来求解。需要指出,这一解法只是改动了摄动法的程序,其结果与摄动法是相同的。本文所得到的波纹圆板的特征关系式简便适用,提高了精确度和适用范围,可供精密仪器弹性元

* 力学学报,(1),47~52(1978)

件设计时参考。

二、边值问题的建立与求解

波纹圆板在径向和周向有很不相同的刚度, 这从结构上讲, 类似于各向异性圆平板。所以我们以一向异性圆板来代替波纹圆板, 这板在径向和周向的刚度对应于波纹圆板的刚度, 而厚度、半径及材料是相同的。在此替换下, 半径为 R , 厚度为 h , 承受均布载荷 q 的各向异性圆板 (即波纹圆板) 的中面挠度 w 和径向薄膜力 T_1 所满足的大挠度方程为^[3]:

$$\begin{aligned} r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{k_2 k_2'}{r} \frac{dw}{dr} &= \frac{k_2}{D} \left(T_1 r \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} q r^2 \right), \\ r \frac{d^2 (T_1 r)}{dr^2} + \frac{d(T_1 r)}{dr} - k_1 k_2 T_1 &= -\frac{1}{2} E h k_2 \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

我们讨论两种常用的边界条件:

1) 夹紧固定情况

$$\text{当 } r = 0 \text{ 时, } \frac{dw}{dr} = 0, \quad T_1 \text{ 有限} \quad (2)$$

$$\text{当 } r = R \text{ 时, } w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad u = 0$$

2) 滑动固定情况

$$\text{当 } r = 0 \text{ 时, } \frac{dw}{dr} = 0, \quad T_1 \text{ 有限} \quad (3)$$

$$\text{当 } r = R \text{ 时, } w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad T_1 = 0$$

这里 r 是板的径向坐标, E 是弹性模量, ν 是泊松比, k_1, k_2, k_2' 是与径向和周向刚度有关的参数^[3], 抗弯刚度 $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2/k_2 k_2')}$, 径向位移

$$u = \frac{r}{k_2 E h} \left[\frac{d(T_1 r)}{dr} - \nu T_1 \right].$$

为简化以后的计算, 我们引入下列无量纲量:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{R}, \quad y = \frac{w}{h}, \quad \varphi = \frac{dy}{d\rho}, \quad S = -\frac{k_2 R r}{D} T_1, \\ P &= \frac{k_2 R^4}{2 D h} q, \quad \beta_1^2 = k_2 k_2', \quad \beta_2^2 = k_1 k_2, \quad \beta_3 = \frac{E h^3 k_2^2}{2 D} \end{aligned} \quad (4)$$

将式(4)代入式(1)~(3), 便得波纹圆板大挠度的无量纲非线性的基本方程和边界条件:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \varphi = -\frac{1}{\rho} S \varphi + P \rho,$$

$$\frac{d^2 S}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dS}{d\rho} - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} S = \frac{\beta_3}{\rho} \varphi^2 \quad (5a, b)$$

1) 夹紧固定情况

$$\text{当 } \rho = 0 \text{ 时, } \varphi = 0, \quad S = 0$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } \gamma = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{dS}{d\rho} - \frac{\nu}{\rho} S = 0 \quad (6)$$

2) 滑动固定情况

$$\text{当 } \rho = 0 \text{ 时, } \varphi = 0, \quad S = 0$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } \gamma = 0, \quad \varphi = 0, \quad S = 0 \quad (7)$$

首先,我们求解夹紧固定下的边值问题(5),(6)。在一次近似中,略去方程(5a)右端含 S 的非线性项,并以一次近似解 φ_1 代替式(5b)右端的 φ ,再应用边界条件(6),便得下列线性边值问题

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_1}{d\rho} - \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \varphi_1 &= P\rho, \\ \frac{d^2 S_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dS_1}{d\rho} - \frac{\beta_2^2}{\rho^2} S_1 &= \frac{\beta_3}{\rho} \varphi_1^2 \end{aligned} \quad (8a, b)$$

$$\text{当 } \rho = 0 \text{ 时, } \varphi_1 = 0, \quad S_1 = 0 \quad (9a, b)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } \gamma_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \frac{dS_1}{d\rho} - \frac{\nu}{\rho} S_1 = 0 \quad (10a \sim c)$$

在应用式(9a),(10b)后,方程(8a)的通解为

$$\varphi_1 = \frac{P}{\beta_1^2 - 9} (\rho^{\beta_1} - \rho^3) \quad (11)$$

由式(11),(10a),还可得无量纲挠度

$$\gamma_1 = \frac{P}{\beta_1 + 3} \left[\frac{1}{\beta_1 - 3} \left(\frac{1}{\beta_1 + 1} \rho^{\beta_1 + 1} - \frac{1}{4} \rho^4 \right) + \frac{1}{4(\beta_1 + 1)} \right] \quad (12)$$

令 γ_0 为板中心的无量纲挠度,即

$$\text{当 } \rho = 0 \text{ 时, } \gamma = \gamma_0 \quad (13)$$

应用此关系,在式(12)中令 $\rho = 0$, 便得

$$P = 4(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 3)\gamma_0 \quad (14)$$

此即波纹圆板的小挠度特征关系式。将此式代入式(11),就有

$$\varphi_1 = m_1 (\rho^{\beta_1} - \rho^3) \gamma_0 \quad (15)$$

其中

$$m_1 = 4(\beta_1 + 1)/(\beta_1 - 3)$$

我们再求解方程(8b)。将式(15)代入方程(8b)的右端,并应用式(9b),(10c),得到方程(8b)的解为

$$S_1 = \left\{ m_2 \rho^{\beta_2} + \beta_3 m_1^2 \left[\frac{1}{(2\beta_1 + 1)^2 - \beta_2^2} \rho^{2\beta_1 + 1} \right] \right\}$$

$$- \frac{2}{(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2} \rho^{\beta_1+4} - \frac{1}{\beta_2^2 - 49} \rho^7 \Big] \gamma_0^2 \quad (16)$$

其中

$$m_2 = \frac{\beta_3 m_1^2}{\beta_2 - \nu} \left[\frac{7 - \nu}{\beta_2^2 - 49} + \frac{2(\beta_1 + 4 - \nu)}{(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2} - \frac{2\beta_1 + 1 - \nu}{(2\beta_1 + 1)^2 - \beta_2^2} \right]$$

现在求二次近似解。由于我们只作到第二次近似，故只求解关于 φ_2 的边值问题就可以了。将已得的式(15)，(16)形式地代入方程(5a)的右端，并应用式(6)，便得关于 φ_2 的线性边值问题：

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_2}{d\rho} - \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \varphi_2 = -\frac{1}{\rho} S_1 \varphi_1 + P\rho \quad (17)$$

$$\text{当 } \rho = 0 \text{ 时, } \varphi_2 = 0 \quad (18)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } y_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad (19a, b)$$

应用式(18)，(19b)，方程(17)的解为

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{P}{\beta_1^2 - 9} (\rho^{\beta_1} - \rho^3) + \left\{ (\beta_1 + 1)(m_3 + m_4) \rho^{\beta_1} \right. \\ & - m_1 m_2 \left[\frac{1}{(\beta_2 + 1)(2\beta_1 + \beta_2 + 1)} \rho^{\beta_1 + \beta_2 + 1} + \frac{1}{\beta_1^2 - (\beta_2 + 4)^2} \rho^{\beta_2 + 4} \right] \\ & + \frac{\beta_3 m_1^3}{2} \left[\frac{1}{(2\beta_1 + 1)^2 - \beta_2^2} \left(\frac{2}{(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)} \rho^{2\beta_1 + 5} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)} \rho^{3\beta_1 + 2} \right) \right. \\ & + \frac{2}{(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2} \left(\frac{2}{(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)} \rho^{2\beta_1 + 5} - \frac{1}{8(\beta_1 + 4)} \rho^{\beta_1 + 8} \right) \\ & \left. \left. + \frac{1}{\beta_1^2 - 49} \left(\frac{1}{8(\beta_1 + 4)} \rho^{\beta_1 + 8} + \frac{2}{\beta_1^2 - 121} \rho^{11} \right) \right] \right\} \gamma_0^3 \quad (20) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} m_3 = & \frac{(\beta_1 - 3)(\beta_1 + 2\beta_2 + 5)m_1 m_2}{(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)(2\beta_1 + \beta_2 + 1)[\beta_1^2 - (\beta_2 + 4)^2]}, \\ m_4 = & \frac{\beta_3 m_1^3}{4(\beta_1 + 1)} \left\{ \frac{3\beta_1^2 + 4\beta_1 - 39}{2(\beta_1 + 4)(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)[(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2]} \right. \\ & - \frac{5\beta_1^2 - 8\beta_1 - 21}{(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 5)(2\beta_1 + 1)(3\beta_1 + 5)[(2\beta_1 + 1)^2 - \beta_2^2]} \\ & \left. - \frac{\beta_1^2 + 16\beta_1 - 57}{4(\beta_1 + 4)(\beta_1^2 - 121)(\beta_2^2 - 49)} \right\} \end{aligned}$$

由式(20)，(19a)，可得无量纲挠度

$$y_2 = \frac{P}{4(\beta_1 + 1)(\beta_1^2 - 9)} [\beta_1 - 3 + 4\rho^{\beta_1+1} - (\beta_1 + 1)\rho^4]$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ m_5 + m_6 + (m_3 + m_4)(\rho^{\beta_1+1} - 1) \right. \\
& - m_1 m_2 \left[\frac{1}{(\beta_2 + 1)(\beta_1 + \beta_2 + 2)(2\beta_1 + \beta_2 + 1)} \rho^{\beta_1 + \beta_2 + 2} \right. \\
& + \frac{1}{(\beta_2 + 5)[\beta_1^2 - (\beta_2 + 4)^2]} \rho^{\beta_2 + 5} \left. \right] + \frac{\beta_3 m_1^3}{2} \left[\frac{1}{(2\beta_1 + 1)^2 + \beta_2^2} \right. \\
& \times \left(\frac{1}{(\beta_1 + 3)(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)} \rho^{2(\beta_1 + 3)} \right. \\
& - \frac{1}{6(\beta_1 + 1)^2(2\beta_1 + 1)} \rho^{3(\beta_1 + 1)} \left. \right) \\
& + \frac{2}{(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2} \left(\frac{1}{(\beta_1 + 3)(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)} \rho^{2(\beta_1 + 3)} \right. \\
& - \frac{1}{8(\beta_1 + 4)(\beta_1 + 9)} \rho^{\beta_1 + 9} \left. \right) \\
& \left. + \frac{1}{\beta_2^2 - 49} \left(\frac{1}{8(\beta_1 + 4)(\beta_1 + 9)} \rho^{\beta_1 + 9} + \frac{1}{6(\beta_1^2 - 121)} \rho^{12} \right) \right] \left. \right\} y_0^3 \quad (21)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
m_5 &= m_1 m_2 \left\{ \frac{1}{(\beta_2 + 1)(\beta_1 + \beta_2 + 2)(2\beta_1 + \beta_2 + 1)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\beta_2 + 5)[\beta_1^2 - (\beta_2 + 4)^2]} \right\}, \\
m_6 &= \frac{\beta_3 m_1^3}{2} \left\{ \frac{1}{(2\beta_1 + 1)^2 - \beta_2^2} \left[\frac{1}{6(\beta_1 + 1)^2(2\beta_1 + 1)} \right. \right. \\
& - \frac{1}{(\beta_1 + 3)(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)} \left. \right] + \frac{2}{(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2} \\
& \times \left[\frac{1}{8(\beta_1 + 4)(\beta_1 + 9)} - \frac{1}{(\beta_1 + 3)(\beta_1 + 5)(3\beta_1 + 5)} \right] \\
& \left. - \frac{1}{\beta_2^2 - 49} \left[\frac{1}{6(\beta_1^2 - 121)} + \frac{1}{8(\beta_1 + 4)(\beta_1 + 9)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

将式(21)应用于定义(13), 便得到波纹圆板在夹紧固定边界条件下的二次近似特征关系式

$$P = 4(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 3)[y_0 + (m_3 + m_4 - m_5 - m_6)y_0^3] \quad (22)$$

为便于实际应用, 我们将式(22)转化为有量纲形式

$$q = m_7[h^2 w_0 + (m_3 + m_4 - m_5 - m_6)w_0^3] \quad (23)$$

其中 w_0 为板中心挠度值,

$$m_7 = 4Eh k_2(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 3)/R^4 \beta_3$$

对于滑动固定边界条件情况, 我们容易从上述解推得。比较两种边界条

件(6),(7), 仅有最后一个条件不同。若将式(6)的最后一个条件改写为

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } \frac{1}{\nu} \frac{dS}{d\rho} - \frac{1}{\rho} S = 0 \quad (24)$$

并令 $\nu \rightarrow \infty$, 那么就得

$$S = 0 \quad (25)$$

此即式(7)的最后一个条件。而且, 在边值问题(5),(6)中, 仅有式(24)显含 ν , 故我们可在边值问题的最后结果(23)中令 $\nu \rightarrow \infty$, 就可得到波纹圆板在滑动固定边界条件下的二次近似特征关系式。实际计算表明, 参数 $m_1, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$ 的表达式和特征关系式(23)与夹紧固定边界条件情况相似, 仅 m_2 改为

$$m_2 = \beta_3 m_1^2 \left[\frac{2}{(\beta_1 + 4)^2 - \beta_2^2} + \frac{1}{\beta_2^2 - 49} - \frac{1}{(2\beta_1 + 1)^2 - \beta_2^2} \right] \quad (26)$$

三、实例计算

[例1] 绘制无光滑中心的正弦截面波纹圆板(图1)的特征曲线。

此波纹圆板的周边为滑动固定边界条件, 其他的数据为 $E = 1 \times 10^4$ kg/mm², $\nu = 0.3$, $R = 76$ mm, $H = 1.20$ mm, $h = 0.33$ mm, $l = 25 \frac{1}{3}$ mm。将这些值代入式(23), 便得此正弦截面波纹圆板的特征关系式

$$q = 0.0304 w_0 + 0.00235 w_0^3 \quad (27)$$

在此式中, w_0 的单位是 mm, q 的单位是 kg/cm²。

由公式(27)绘制的特征曲线见图2。由图看出, 本文计算曲线与实验值在已有的 $w_0 < 9h$ 的实验值范围内非常一致。而文献^[1]的计算曲线在 $w_0 > 5h$ 的范围却与实验值偏差很大。以 $w_0 = 8.79h$ 的情况为例, 本文结果与实验值误差为 0.90%, 而文献^[1]的结果与实验值误差竟达 39.0%。

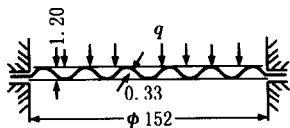


图1 无光滑中心的正弦截面波纹圆板

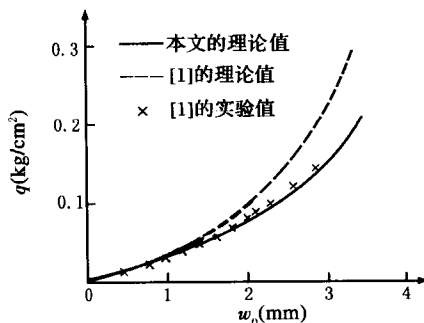


图2 计算值和实验值的比较

[例2] 绘制具有光滑中心的锯齿形截面波纹圆板(图3)的特征曲线。

此波纹圆板的周边为夹紧固定边界条件, 其他的数据为 $E = 1.35 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $R = 24 \text{ mm}$, $H = 0.414 \text{ mm}$, $h = 0.101 \text{ mm}$, $\theta_0 = 8^\circ 45'$, $l = 5.4 \text{ mm}$ 。将这些值代入式(23), 便得此锯齿形截面波纹圆板的特征关系式

$$q = 0.106w_0 + 0.147w_0^3 \quad (28)$$

在此式中, w_0 的单位是 mm, q 的单位是 kg/cm^2 。

由公式(28)绘制的特征曲线见图4。由图看出, 在已有的 $w_0 < 18h$ 的实验值范围内, 本文计算曲线与实验值非常一致, 而文献^[3]的计算曲线在 $w_0 > 10h$ 的范围与实验值误差较大。以 $w_0 = 17.8h$ 的情况为例, 本文结果与实验值误差为 4.6%, 而文献^[3]的结果与实验值的误差却达 17.2%。

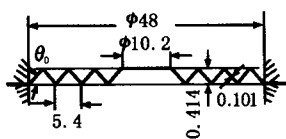


图3 有光滑中心的锯齿形截面波纹圆板

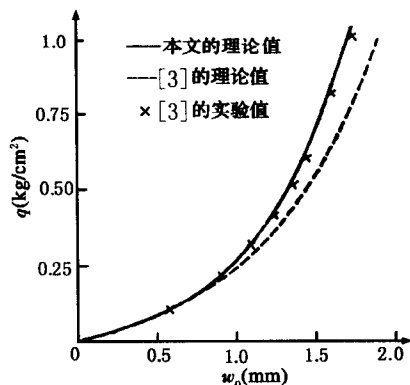


图4 计算值和实验值的比较

四、结 语

由上面两种不同波纹、不同边界条件的实例计算, 我们看到, 在 $w_0 < 18h$ 的范围内, 本文获得的特征关系式与实验值很好符合。有理由相信, 本文公式适用范围还可适当扩大。由于许多精密仪器中的波纹圆板是在 $w_0 > 10h$ 情况下工作, 故本文公式(23)可供工程设计部门参考使用。

特征关系式(23)对于深、浅的不同形状(如正弦、锯齿形、梯形等)波纹圆板均能适用。自然, 波纹越密集, 即 l/R 越小时, 波纹圆板就越接近于各向异性圆平板情况, 本文公式结果的精确度就越高。实例1属于波纹不密集($l/R = 1/3$)的情况, 亦即不大接近于各向异性圆板状态, 但本

文结果的精确度仍很高。由此说明,对于波纹较少情况,本文公式仍能满足工程设计的要求。

显而易见,对于无光滑中心情况,本文公式是较精确的。但在精密仪器中,为了便于和适当的仪器零件焊接在一起,波纹圆板中心需留下一光滑部分,这就给本文公式的精确度带来了影响。可是,一般说来,这光滑中心是较小的,因此带来的误差也是小的。

参考文献

- [1] Феодосьев, В. И. 精密仪器弹性元件的理论与计算. 北京: 科学出版社, 1963
- [2] Аксельрад, Э. Л. Изв. АН СССР, Мех. - Маш., 1964, (1): 46 ~ 53
- [3] Андреева, Л. Е. Расчёт гофрированных мембран, как анизотропных пластинок. Инженерный Сборник, 1955, 21: 138 ~ 141
- [4] 赤坂隆. 日本航空学会誌, 1995, 3(22 ~ 23): 279 ~ 288
- [5] 刘人怀. 科学通报, 1965, (3): 253 ~ 255