初中数学

解题途径

吴传发　蔡康平　等编

.6
3

华东师范大学出版社

初中数学解题途径

吴传发　蔡康平　等编

华东师范大学出版社

责任编辑　程丽明
封面设计　黄惠敏

初中数学解题途径

吴传发　蔡康平　等编

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路 3663 号　邮政编码 200062）
新华书店上海发行所经销
华东师范大学印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 11.75　字数 260 千字
1997 年 9 月第 1 版　1998 年 3 月第 2 次印刷
印数 11,001—33,000

ISBN7—5617—1701—6・/G・767
定价 10.00 元

前　言

有的学生解数学题很有兴趣，越解越有劲；有的学生解数学题觉得苦恼，见题却步. 前者是由于找到了解题的窍门，养成了善于思维的习惯；后者则还没有找到解题的方法，甚至还没有开窍.《初中数学解题途径》就是由浅入深地提出初中数学中各种层次的问题，探讨解决这些问题的途径，将有效地帮助你尽快地找到解题的方法，养成良好的思维习惯，从而享受到解题的乐趣.

本书的编写是以现行的教学大纲和教材为主要依据，兼顾中考的要求，体现由应试教育向素质教育转轨的精神. 书中共有十六章，最后还编写了“初中数学综合练习”及“习题答案与提示”，都是初中数学的基本内容. 在每一章里，我们介绍了这章所涉及的基本问题，指出重点、难点和关键所在，指出解决这些问题的思路和具体解决方法，使你既容易入门，又可作深入探究；既能加强基础，又能发展智力和能力. 我们企盼你在学习本书内容时，先自己动手解决书中所提出的问题（包括例题），然后再看解答，最后再比较自己的解法与书中的解法有什么不同？判别一下哪一种方法较好？我们希望你能开动脑筋，想出比书中更好的方法.

本书适合初中各年级学生使用，可作为课外阅读或选修教材，也可供教师和家长辅导参考.

本书第一、三、四、五、十三、十六章由王剑青执笔，第二、八、十、十五由蔡康平执笔，第六、七、九章由吴传发执笔，第十

一章由夏益辉执笔，第十二章及“初中数学综合练习”由宋耀生执笔，第十四章由徐惠芳执笔.

限于水平，书中难免会有缺点和错误，我们恳切希望读者提出宝贵意见.

编　者

1996年6月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章 整 式

数学中常用字母表示数. 例如,用“$a+b$”表示现实世界的一种数量关系—两数的和,这里 a、b 可以表示某个人语文、数学的成绩,也可以表示我国一年中工业、农业的产值等,小到个人,大至国家,无所不包,因此并不抽象.

用运算符号把数或字母连接起来的式子叫代数式. 只含有加、减、乘、除、乘方运算的代数式叫做有理式. 整式是没有除法运算或者虽有除法运算而除式中不含字母的有理式.

整式的分类如下:

$$\text{整式}\begin{cases}\text{单项式} & (\text{如:}\ 5\text{、}3ab^2)\\ \text{多项式} & (\text{如:}\ a+b\text{、}a^2-2ab+b^2).\end{cases}$$

用数值代替代数式里字母,计算后所得的结果,叫做代数式的值.

一 列 代 数 式

例 1 a 是有理数,用代数式表示:

(1) a 的相反数; (2) a 的绝对值.

解: (1) a 的相反数是 $-a$.

(2) a 的绝对值可以表示为 $|a|$,

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

说明: (1) 因为 a 是有理数,它可能是正数、零和负数,若 a 是正数,则它的相反数 $-a$ 是负数;若 a 是负数,则它的

相反数$-a$是正数;若a是零,则它的相反数$-a$仍是零,所以要注意:$-a$不一定是负数.

(2) 若a是正数,则$|a|$是a本身;若a是负数,则$|a|$是a的相反数$-a$,此时$-a$是正数;若a是零,则$|a|$仍是零.

例 2 用代数式表示:

(1) a、b两数和的立方;

(2) a的两倍减b的$\frac{3}{4}$的差;

(3) a减b的差与a加b的和的积;

(4) a、b两数的立方和.

解:(1) $(a+b)^3$. (2) $2a-\frac{3}{4}b$.

(3) $(a-b)(a+b)$. (4) a^3+b^3.

例 3 用代数式表示:

(1) 三个连续奇数的平方和;

(2) 五个连续偶数的积.

解:(1) 设n是整数,则$2n$一定是偶数,三个连续奇数可以表示成:$2n-1$、$2n+1$、$2n+3$,则

$$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2$$

为三个连续奇数的平方和.

(2) $2n$为偶数(n为整数),则

$$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)(2n+8)$$

表示五个连续偶数的积.

说明:本例的两小题也可有其它不同表示,如:

(1) $(2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2$;

(2) $(2n-4)(2n-2)2n(2n+2)(2n+4)$.

例 4 铁丝长a米,第一次用去它的一半少一米,第二次

用去它的剩下部分的$\frac{1}{3}$还多 2 米，问还剩下多少米？

解：第一次用掉$\left(\frac{a}{2}-1\right)$米铁丝，第二次用掉$\left[\frac{a-\left(\frac{a}{2}-1\right)}{3}+2\right]$米铁丝，则铁丝还剩下

$$a-\left\{\left(\frac{a}{2}-1\right)+\left[\frac{a-\left(\frac{a}{2}-1\right)}{3}+2\right]\right\} \text{米}.$$

例 5 如图 1-1 所示，(1)中正方形内有四个大小相等的三角形；(2)中长方形内有两个扇形，用代数式表示阴影部分的面积.

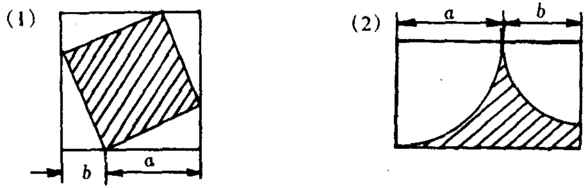

图 1-1

解：(1) 由图 1-1(1)可知，阴影部分的面积 S 是边长为$(a+b)$的正方形面积减去四个直角边都是 a 和 b 的直角三角形的面积而得到的，所以

$$S_{\text{阴影}}=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab=(a+b)^2-2ab.$$

(2) 由图 1-1(2)可知，阴影部分的面积是长方形的面积减去两个扇形面积的差，长方形的长是$(a+b)$、宽是 a，两个扇形分别是$\frac{1}{4}$个半径为 a 和 b 的圆，所以

$$S_{\text{阴影}}=(a+b)a-\left(\frac{\pi a^2}{4}+\frac{\pi b^2}{4}\right).$$

二　合并同类项

同类项是指多项式中所含的字母相同、相同字母的指数也相同的项，例如，a^3b^2 与 $2a^3b^2$ 是同类项，$\frac{1}{4}xy^2$ 与 $2xy^2$ 也是同类项.

例 6　m、n 是什么数时，单项式 $5a^mx^3y$ 与 $\frac{1}{2}a^2x^ny$ 是同类项？

解：根据同类项的意义可知，当 $m=2$ 且 $n=3$ 时，单项式 $5a^mx^3y$ 与 $\frac{1}{2}a^2x^ny$ 是同类项.

那么同类项能否合并呢？

显然是可以的，例如，$5a^2x^3y+\frac{1}{2}a^2x^3y=\frac{11}{2}a^2x^3y$，这里是把 a^2x^3y 作为某种同类单位进行数量相加、减.

一般说来，合并同类项的方法是：将系数相加、减，且保持字母和它们的指数不变.

如：$$ax+bx+cx=(a+b+c)x.$$

例 7　合并下列各式中的同类项：

(1) $3x^2+5x-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}x+0.5-\frac{1}{2}x$；

(2) $-\frac{2}{3}ab^3+3a^3b-\frac{1}{2}a^3b-ab^3-\frac{1}{2}a^3b-\frac{3}{2}a^3b$；

(3) $-(p+q)^2-(p+q)^2-(p+q)^2$；

(4) $-\frac{1}{5}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{3}{10}(x-1)^2$
$+\frac{1}{4}(x-1)^2$.

解：(1) 原式$=\left(3-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(5-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)x+0.5$

$=\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

(2) 原式$=\left(-\frac{2}{3}-1\right)ab^3+\left(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)a^3b$

$=-\frac{5}{3}ab^3+\frac{1}{2}a^3b$.

(3) 原式$=[(-1)+(-1)+(-1)](p+q)^2$

$=-3(p+q)^2$.

(4) 原式$=\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\right)(x-1)^2=\frac{1}{4}(x-1)^2$.

三　含绝对值符号的整式化简

例8　化简：

(1) $|1-\sqrt{3}|$；

(2) $|1-a|+|2a+1|(a<-2)$；

(3) $||x-1|+1|$；

(4) $|a-3|+|a+1|$.

解：(1) $\because$ $1-\sqrt{3}<0$，

$\therefore$ $|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$.

(2) $\because$ $a<-2$，

$\therefore$ $|1-a|=1-a$，$|2a+1|=-(2a+1)$，

原式$=1-a-(2a+1)=1-a-2a-1=-3a$.

(3) $\because$ $|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x>1),\\ x-1 & (x=1),\\ 1-x & (x<1),\end{cases}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\therefore\quad 原式=|x-1|+1=\begin{cases} x & (x>1), \\ 1 & (x=1), \\ 2-x & (x<1). \end{cases}$$

(4) 由 $a-3=0$，得 $a=3$；由 $a+1=0$，得 $a=-1$. 这样，如图 1-2 所示，实数轴可分为三个区间：

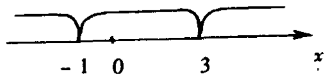

图 1-2

当 $a<-1$ 时，原式 $=3-a-(a+1)=-2a+2$；

当 $-1\leqslant a<3$ 时，原式 $=3-a+(a+1)=4$；

当 $a\geqslant 3$ 时，原式 $=a-3+(a+1)=2a-2$.

说明：因为 $|a-3|$ 中的 $(a-3)$ 与 $|a+1|$ 中的 $(a+1)$ 正负不明，所以先找出分别使它们为零的 $a=3$ 与 $a=-1$，-1 与 3 把数轴分为三个区间，再按从小到大的顺序，在每个区间内将原式化简. 以上的方法叫"零点分段讨论法".

例 9 设 $|x+1|+(y-2)^2=0$，求代数式 $4xy^2-5x^2y-\frac{1}{2}xy-\frac{9}{2}xy^2+\frac{3}{4}xy+1$ 的值.

解：$\because\quad |x+1|+(y-2)^2=0$，

$\therefore\quad |x+1|=0$，且 $(y-2)^2=0$，

$\therefore\quad x=-1$，且 $y=2$.

$$原代数式=-\frac{1}{2}xy^2-5x^2y+\frac{1}{4}xy+1,$$

$\therefore$ 当 $x=-1$，且 $y=2$ 时，

$$原式的值=-\frac{1}{2}\times(-1)\times 2^2-5\times(-1)^2\times 2+\frac{1}{4}\times(-1)\times 2+1$$

$$=2-10-\frac{1}{2}+1=-\frac{15}{2}.$$

四　整式的加减法

整式相加、减的结果仍是整式.整式相加、减就是同类项合并的运算,此外,如果有括号还要去括号.一般说来,整式加、减时,先将它们按某一字母的降幂(或升幂)顺序排列,再去括号,后进行同类项合并.

例 10 计算:

(1) $\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{4}{3}x^2y-\frac{3}{2}y^3-4xy^2-x^2y\right)-(2y^3+4xy^2-3x^3)$;

(2) $3a^n+5a^{n+1}-7a^n+2a^{n+1}$;

(3) $3(a+b)^2-\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+4(a+b)\right]-(a+b)$;

(4) $5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$.

解:(1) 原式

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{3}x^2y-4xy^2-\frac{3}{2}y^3\right)-(-3x^3+4xy^2+2y^3)\\&=\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{3}x^2y-4xy^2-\frac{3}{2}y^3+3x^3-4xy^2-2y^3\\&=\frac{9}{2}x^3-\frac{7}{3}x^2y-8xy^2-\frac{7}{2}y^3.\end{aligned}$$

(2) 原式$=(5+2)a^{n+1}+(3-7)a^n=7a^{n+1}-4a^n$.

(3) 原式

$$\begin{aligned}&=3(a+b)^2-\frac{1}{2}(a+b)^2-4(a+b)-(a+b)\\&=\frac{5}{2}(a+b)^2-5(a+b).\end{aligned}$$

(4) 原式

$$\begin{aligned}&=5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-4ab^2+2a^2b]\}\\&=5ab^2-\{2a^2b+ab^2-2a^2b\}\\&=5ab^2-ab^2\end{aligned}$$

$=4ab^2$.

说明：a^n 和 $a^{n+1}(a+b)^2$ 和 $(a+b)$ 都不是同类项，不能合并. 有多重括号时，可由内到外边去括号边合并同类项.

例 11 （1）化简 $2a-\{7b+[4a-7b-(2a-4b-c)]+3a\}$，并求当 $a=-\frac{3}{7}$，$b=0.4$，$c=-1$ 时此式的值.

（2）已知整式

$$\left\{ab-\left[3a^2b-\left(4ab^2+\frac{1}{2}ab^2\right)\right]-4a^2b\right\}+3a^2b,$$

求当 $a=\frac{1}{3}$，$b=-1$ 时此式的值.

解：（1）原式 $=2a-\{7b+[4a-7b-2a+4b+c]+3a\}$

$$=2a-\{7b+2a-3b+c+3a\}$$

$$=2a-5a-4b-c=-3a-4b-c.$$

当 $a=-\frac{2}{7}$，$b=0.4$，$c=-1$ 时，原式的值是

$$-3\times\left(-\frac{2}{7}\right)-4\times\frac{2}{5}-(-1)=\frac{6}{7}-\frac{8}{5}+1$$

$$=\frac{6}{7}-\frac{3}{5}=\frac{9}{35}.$$

（2）原式 $=\left\{ab-\left[3a^2b-\frac{9}{2}ab^2\right]-4a^2b\right\}+3a^2b$

$$=\left\{ab-3a^2b+\frac{9}{2}ab^2-4a^2b\right\}+3a^2b$$

$$=ab-4a^2b+\frac{9}{2}ab^2.$$

当 $a=\frac{1}{3}$，$b=-1$ 时，

$$\text{原式的值}=\frac{1}{3}\times(-1)-4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times(-1)$$

$$+\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}\times(-1)^2=\frac{29}{18}.$$

说明：在求多项式的值时，一般先化简后求值.

五 整式的乘除法

整式的乘除法涉及以下一些运算性质和公式.

幂的运算性质(其中 m、n 是自然数)：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^m = a^m \cdot a^m,$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m > n).$$

常用的乘法公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

单项式与单项式的乘法：根据乘法交换律与结合律法则，将系数相乘及同底数的幂相乘.

单项式与多项式的乘法：根据乘法的分配律，把问题转化为单项式乘以单项式.

多项式与多项式的乘法：根据乘法分配律和单项式乘法法则进行.

单项式除以单项式：将系数及同底数幂分别相除.

多项式除以单项式：根据单项式除以单项式的法则，把多项式各项分则除以单项式.

多项式除以多项式：一般地用竖式进行演算.

例 12 计算：

(1) $7ab^2\times(-4a^2b^3)$；

(2) $-5x^2(x-4y)$.

解：(1) 原式$=7\times(-4)a^{1+2}b^{2+3}=-28a^3b^5$.

(2) 原式$=-5x^2\cdot x+5x^2\cdot 4y=-5x^3+20x^2y$.

例 13 计算：

(1) $(-2a^2b)^3\times 3bc\div 12a^5b^4$；

(2) $-x(4-2x)(2x+3)$；

(3) $\left(20x^2y-5xy^2-\dfrac{1}{2}y^3\right)\div 5y$；

(4) $(2x^ny-y^{n-1})(2x^ny+y^{n-1})\quad (n>1)$.

解：(1) 原式$=-8(a^2)^3b^3\times 3bc\div 12a^5b^4$

$$=-(8\times 3\div 12)a^{6-5}b^{3+1-4}c$$

$$=-2ab^0c=-2ac.$$

(2) 原式$=2x(x-2)(2x+3)$

$$=2x(2x^2-x-6)$$

$$=4x^3-2x^2-12x.$$

(3) 原式$=20x^2y\div 5y-5xy^2\div 5y-\dfrac{1}{2}y^3\div 5y$

$$=4x^2-xy-\frac{y^2}{10}.$$

(4) 原式$=(2x^ny)^2-(y^{n-1})^2=4x^{2n}y^2-y^{2n-2}$.

说明：此题应用了乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$(平方差公式).

例 14 计算：$(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)\div(a^3+b^3)$.

解：原式$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\div(a^3+b^3)$

$$=[(a^2)^3-(b^2)^3]\div(a^3+b^3)$$

$$=(a^6-b^6)\div(a^3+b^3)$$

$$=[(a^3+b^3)(a^3-b^3)]\div(a^3+b^3)$$

$$=a^3-b^3.$$

多项式除以多项式通常用竖式运算：

$$
\begin{array}{r|lll}
 & a^3 & & -b^3 \\ \cline{2-4}
a^3+b^3 & a^6 & & -b^6 \\
 & a^6 & +a^3b^3 & \\ \cline{2-4}
 & & -a^3b^3 & -b^6 \\
 & & -a^3b^3 & -b^6 \\ \cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}
$$

$$原式=(a^6-b^6)\div(a^3+b^3)=a^3-b^3.$$

例 15 计算

$$(27-13x-10x^2-3x^3-2x^4)\div(3-2x-x^2),$$

并用“被除式＝除式×商式＋余式”的关系进行检验.

解：被除式、除式各提出负号并按降幂排列.

原式$=(2x^4+3x^3+10x^2+13x-27)\div(x^2+2x-3)$，

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 2x^2 & -x & +18 & & \\ \cline{2-6}
x^2+2x-3 & 2x^4 & +3x^3 & +10x^2 & +13x & -27 \\
 & 2x^4 & +4x^3 & -6x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & +16x^2 & +13x & \\
 & & -x^3 & -2x^2 & +3x & \\ \cline{3-6}
 & & & 18x^2 & +10x & -27 \\
 & & & 18x^2 & +36x & -54 \\ \cline{4-6}
 & & & & -26x & +27
\end{array}
$$

∴ 商式$=2x^2-x+18$，

余式$=-26x+27$.

检验：∵ $(x^2+2x-3)(2x^2-x+18)+(-26x+27)$

$=2x^4+3x^3+10x^2+13x-27$，

∴ 答案正确.

例 16 当 a、b 为何值时，$8x^3-2x^2+ax+b$ 能被 $4x^2-2$ 整除.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com