

28	2	31	10
34	18	22	11
7	23	12	24
8	13	24	14
5	20	15	25
27	24	32	4

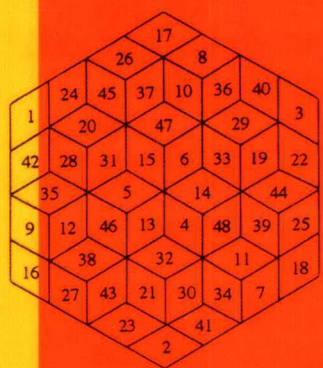
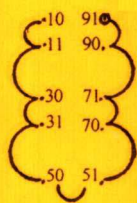
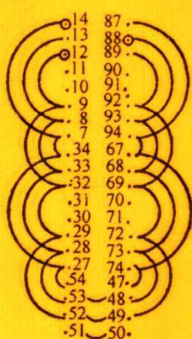
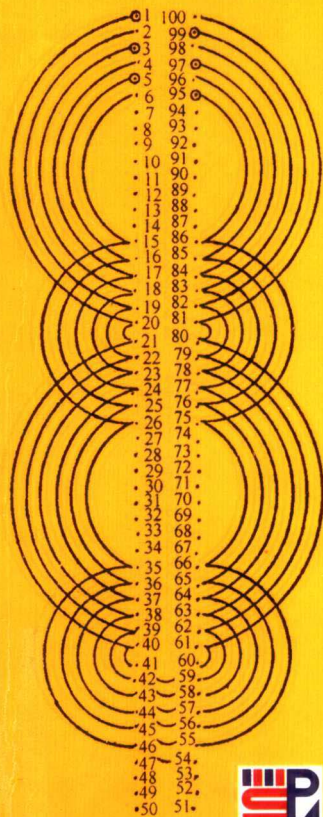
# 好玩的数学

## ——娱乐数学经典名题

读 本书      长 知识

玩 游戏      赢 大奖

吴鹤龄 编著



# 好玩的数学

## ——娱乐数学经典名题

吴鹤龄 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书分为两部分，第一部分是娱乐数学第一名题——幻方，对古今中外在幻方研究中的发现和成果有极为详细的介绍。第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜、数学金字塔、素数、完美数、自守数、累进可除数，以及“数学黑洞”现象、棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、梵塔、重排九宫等问题。题材广泛、内容有趣，能够启迪思想、开阔视野，培养读者分析和解决问题的能力。适于高中及高中以上文化程度的读者阅读。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

好玩的数学：娱乐数学经典名题/吴鹤龄编著. —北京：  
科学出版社，2003.11

ISBN 7-03-011627-5

I. 好… II. 吴… III. 数学-普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 053811 号

责任编辑：孔国平 / 责任校对：刘小梅

责任印制：赵德静 / 封面设计：张 放

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2003年11月第一版 开本：850×1168 1/32

2003年11月第一次印刷 印张：10 1/2

印数：1—5 000 字数：281 000

定 价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

## 前 言

本书名曰《好玩的数学——娱乐数学经典名题》。也许不少读者在看到这个书名后会提出质疑：作为科学的数学怎么是供玩儿的，而且“好玩”呢？“娱乐数学”又从何说起，过去从来也没有听说过啊！对这些问题，我们长话短说，作一个简要的回答。

“好玩的数学”这个书名源于陈省身教授为2002年在北京举行的第24届国际数学家大会的题词“数学好玩”。陈省身教授是著名的华裔数学家，他因在整体微分几何学方面的出色成就而荣获被誉为“国际数学界的诺贝尔奖”的大奖——沃尔夫奖（1984年），是世界一流的大数学家。他说“数学好玩”，自然是不会有错的。笔者体会，之所以说“数学好玩”，恐怕主要有两个原因：一是数学中有许许多多奇特而有趣的现象，二是数学中有许许多多未解之谜。正是这些奇特而有趣的现象和未解之谜吸引着广大的人群，使他们成为数学的爱好者和探索者，其中一些人有所发现，有所发明，有所创造，成了专家、学者，推动了科学的发展和人类社会的进步。著名的加拿大生理学家、蒙特利尔大学国际应激学研究所前所长汉斯·赛耶（Hans Hugo Bruno Selye, 1907~1982）在其名著《从梦想到发现：论怎样成为一个科学家》（From Dream to Discovery, on Being a Scientist. McGraw-Hill, 1964）中曾经深刻地指出：“在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。”数学家斯坦因（Sherman K. Stein）在《数字的力量——揭示日

常生活中数学的乐趣和威力》(吉林人民出版社, 2000)中也写道:“按照一条老的拉丁格言,‘需要为发明之母’,但是,‘好奇为发明之母’同样也是对的。”他举了一个例子:19世纪初法拉第探索电与磁,就不是因为需要,而是出于对宇宙本质的好奇心。当有人问法拉第,你研究这些有什么用时,他反问道:“一个新生婴儿有什么用?”有这样一种说法:一些重大的科学发现和发明创造是“玩”出来的。这听起来似乎令人难以置信,却是事实。因此,说“数学好玩”,不是对数学的贬低,也不是否认数学的高度抽象性和极大困难性,而只是突出其引人入胜的另一面,旨在激发人们的兴趣,热爱它,研究它,到神秘的数学王国中去遨游、去探索。

既然“数学好玩”,数学中好玩的那些内容被称之为“娱乐数学”也就顺理成章了。娱乐数学在英文中叫做 Recreational Mathematics, 或者叫 Entertainment in Mathematics。据哥伦比亚大学专门从事数学教育研究的威廉·夏夫博士(William Leonard Schaaf)考证,娱乐数学已有2000多年的历史,在阿基米德时代就已经有了,到11世纪已有娱乐数学的专著出版。他在20世纪50年代编了一本《娱乐数学文献指南》(Recreational Mathematics: A Guide to the Literatures, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1958),收录的娱乐数学重要文献有5000多种,后来他又编了一套《娱乐数学书目》(A Bibliography of Recreational Mathematics),由美国数学会出版,有3卷之多。著名的科普杂志《科学美国人》(Scientific American)在20世纪下半叶由著名的娱乐数学专家马丁·加德纳(Martin Gardner)办了一个“数学游戏”(Mathematical Games)专栏,大受读者欢迎,持续了近30年。到80年代中,一则因加德纳退休,二则因个人电脑的兴起,这个专栏被改为“计算机娱乐”(Computer Recreation)专栏,但不久就又改为“数学娱乐”(Mathematical Recreation)专栏。现在,《科学美国人》每期都有这个栏目,是这个杂志最受读者欢迎的“保留栏目”。

在我国，也已出了不少“趣味数学”、“数学游戏”这类专著和读物，娱乐数学的一些世界名著也被译成中文介绍给我国读者。但是由于种种原因，数学的这块园地在我国始终没有和“娱乐”这个词直接挂起钩来，因此，在我国读者中就没有“娱乐数学”这个概念。就笔者所见，只有 J. A. H. Hunter 的名著《Mathematical Diversions》的中译本被冠以《数学娱乐问题》的书名出版，大概见过此书的读者不多。笔者认为，现在该是娱乐数学“闪亮登场”的时候了。如同劳动和受教育是每个公民的权利一样，休息和娱乐也是公民的基本权利，而娱乐的形式是多种多样的。通过“玩数学”达到娱乐的目的，同时又提高了科学素养，增长了知识，真是两全其美，何乐而不为，有什么理由不大力提倡呢？

本书分两部分。第一部分介绍娱乐数学第一名题——幻方。幻方是几千年前中国人首先发现的，后来传到世界各地，引起广泛兴趣。幻方是简单得人人可以理解的数学现象，但是它又蕴含着许多至今无人能够回答的问题，包括利用强大的计算机目前仍然解决不了的问题，因而自然成了娱乐数学中最受人关注的一个课题。本书对古今中外在幻方研究中的成果和发现有详尽的介绍，仅幻方构造法就列举了十多种，既包括传统的连续摆数法、阶梯法、对角线法、镶边法等，又有近代数学家最近才开发出来的 LUX 法、相乘法等等，对于绝大多数读者来说都是耳目一新的。美国建国前后的大政治家、大发明家本杰明·富兰克林推出了许多神奇的幻方、幻圆，其中的八轮幻圆（他自己称之为“magic circle of circles”）中，又含有四组偏心的同心圆。百多年来的中外文献中，对这四组偏心的同心圆在八轮幻圆中到底起什么作用，都没有明确的说明。笔者经过反复查证，终于在 200 多年前出版的一部科学辞典中找到了答案，首次给读者提供了准确的解释。南宋的杨辉是世界上系统研究幻方的第一人。他给出的 4 阶至 8 阶幻方各有阴、阳两图。同为 4 阶幻方，为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，历来没有人探讨过这个

问题。笔者注意到这个问题，并进行了初步的探讨，认为幻方是有优劣、高低之分的，并提出了判别的依据，由此给出了对杨辉4阶幻方阴、阳两图的一种可能解释。笔者不敢断言自己的观点和方法一定是正确的，只希望这一讨论能成为引玉之砖，把对有关问题的研究引向深入。

本书第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜（也就是算式复原，诸如冷战时期出现的  $USA + USSR = PEACE$ ）、数学金字塔、素数、NIM 游戏，还有数论中的完美数、自守数、累进可除数、用尽 1~9 表示任意整数，以及所谓“数学黑洞”和棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、约瑟夫斯问题（也就是幸存者问题）、重排九宫、梵塔等等，内容十分广泛，问题十分有趣。笔者在充分发掘娱乐数学的历史遗产的同时，又十分重视当今的科技进步，用最新材料充实了经典名题的内涵。例如，素数是一个十分古老的课题，本书有两章是涉及素数的，其中不乏经典的问题，如梅森素数。本书在介绍梅森素数部分，笔触从 16 世纪的大数学家梅森一直伸展到本世纪之初的网民志愿者组织 GIMPS（全球因特网梅森素数大寻找），全景式地向读者展现了历代数学家和数学爱好者在挖掘最大素数方面的历程，全面介绍了从手工计算到计算机计算，从巨型机计算到网络计算至今所获得的全部 39 个梅森素数，比较充分地反映了在计算机技术尤其是网络技术飞速发展、网络应用日益普及的情况下，有关娱乐数学研究所呈现出的日新月异的景象。

本书是在笔者近 10 年来所写作的数学小品的基础上，经过重新整理、修订和增补而成的。这些数学小品有些在《知识就是力量》等刊物上公开发表过；有些虽然没有发表过，但在笔者任教的北京理工大学科协所组织的科普讲座上向大学生们演讲过。笔者不是数学工作者，笔者从事的专业是计算机，涉足娱乐数学这一领域一是出于个人爱好，二是出于专业教学的需要，因为笔者发现，用娱乐数学中的有趣问题作程序设计的例题与习题，可以大大激发学生的学习热情与积极性。但由于不是本行，书中难

免有错误、疏漏或“说外行话”之处，恳请专家和读者批评、指正。此外，本书引用了大量中外文的书刊和网上资料，多数注明了出处，但因为本书毕竟不是学术专著而是科普作品，因此笔者没有刻意追求逐一注明材料来源，这是需要说明的。

吴鹤龄

2003年初春于北京



# 目 录

## 前言

### 第一部分 百变幻方——娱乐数学第一名题

引子 洛水神龟献奇图	(3)
第一章 有关幻方的传闻趣事	(9)
1-1 宇宙飞船上的搭载物	(9)
1-2 南宋杨辉——研究幻方第一人	(10)
1-3 杨辉4阶幻方中的奥秘	(22)
1-4 出土文物中的阿拉伯幻方	(30)
1-5 欧洲的“幻方热”和名画“忧伤”中的幻方	(32)
1-6 富兰克林的神奇幻方	(37)
第二章 怎样构造幻方	(45)
2-1 连续摆数法(暹罗法)	(46)
2-2 阶梯法(楼梯法)	(48)
2-3 奇偶数分开的菱形法	(49)
2-4 对称法	(50)
2-5 对角线法	(51)
2-6 比例放大法	(53)
2-7 斯特雷奇法	(54)
2-8 LUX法	(56)
2-9 拉伊尔法(基方、根方合成法)	(58)
2-10 镶边法	(60)
2-11 相乘法	(62)
2-12 幻方模式	(64)

<b>第三章 幻方数量知多少</b> .....	(66)
3-1 3阶幻方的数量 .....	(66)
3-2 4阶幻方的数量 .....	(67)
3-3 5阶幻方的数量 .....	(68)
<b>第四章 “幻中之幻”</b> .....	(71)
4-1 对称幻方 .....	(71)
4-2 泛对角线幻方 .....	(71)
4-3 棋盘上的幻方 .....	(76)
4-4 亲子幻方 .....	(81)
4-5 奇偶数分居的对称镶边幻方 .....	(82)
4-6 T形幻方 .....	(83)
<b>第五章 非正规幻方</b> .....	(85)
5-1 普朗克幻方 .....	(85)
5-2 素数幻方 .....	(86)
5-3 合数幻方 .....	(89)
5-4 乘幻方及其他 .....	(90)
<b>第六章 幻方的变形</b> .....	(93)
6-1 杨辉的幻圆 .....	(93)
6-2 对杨辉变形幻方的发展 .....	(99)
6-3 中世纪印度的幻圆和魔莲花宝座 .....	(108)
6-4 富兰克林的八轮幻圆 .....	(111)
6-5 幻星 .....	(114)
6-6 幻矩形 .....	(118)
6-7 魔蜂窝 .....	(118)
<b>第七章 进一步的“幻中之幻”</b> .....	(121)
7-1 双幻方 .....	(121)
7-2 幻立方(魔方) .....	(123)
7-3 四维魔方 .....	(130)
7-4 一些奇特的魔幻方 .....	(132)
习题 .....	(135)

## 第二部分 娱乐数学其他经典名题

<b>第八章 质数之谜</b> .....	(140)
8-1 质数的无限性及其证明 .....	(140)
8-2 有没有质数的一般表达式? .....	(141)
8-3 表达质数的函数 .....	(143)
8-4 怎样判定大质数? .....	(144)
8-5 某范围内质数知多少? .....	(146)
8-6 梅森质数——最大质数的表示形式 .....	(147)
8-7 最大质数有多大 .....	(153)
<b>第九章 质数奇趣</b> .....	(154)
9-1 由顺(逆)序数字组成的质数 .....	(154)
9-2 回文质数 .....	(155)
9-3 可逆质数 .....	(157)
9-4 孪生质数 .....	(158)
9-5 形成级数的质数 .....	(159)
9-6 质数与 $\pi$ 及其他 .....	(160)
9-7 一些质数倒数的特殊性质 .....	(162)
习题.....	(171)
<b>第十章 神秘的完美数</b> .....	(173)
10-1 求完美数的公式 .....	(173)
10-2 完美数与梅森素数 .....	(174)
10-3 完美数的一些特征 .....	(175)
10-4 多倍完美数 .....	(177)
10-5 另一种完美 .....	(177)
<b>第十一章 数学黑洞探秘</b> .....	(179)
11-1 由自恋性数形成的黑洞 .....	(179)
11-2 由自复制数造成的黑洞 .....	(182)

11-3	由数的因子和形成的黑洞 .....	(183)
11-4	由“ $3x+1$ ”变换形成的黑洞 .....	(187)
<b>第十二章 枯燥数字中隐藏的奥秘</b> .....		(191)
12-1	数字 1~9 上的加法 .....	(191)
12-2	数字 1~9 分成有倍数关系的 2 组 .....	(193)
12-3	数字 1~9 上的乘法 .....	(195)
12-4	用 1~9 表示任意整数 .....	(198)
12-5	累进可除数 .....	(200)
12-6	累进不可除数 .....	(207)
<b>第十三章 数的自同构现象</b> .....		(209)
13-1	自同构数 .....	(209)
13-2	有关自守数的一些规律 .....	(210)
13-3	立方自守数 .....	(212)
13-4	其他进制中的自守数 .....	(213)
<b>第十四章 棋盘上的哈密顿回路</b> .....		(214)
14-1	问题的提出 .....	(214)
14-2	马步哈密顿回路的欧拉解法 .....	(215)
14-3	内外分层法求哈密顿回路 .....	(216)
14-4	罗杰特的巧妙方法 .....	(217)
14-5	几个有特色的马步哈密顿回路 .....	(219)
14-6	棋盘上的不解之谜 .....	(221)
习题 .....		(222)
<b>第十五章 八皇后问题</b> .....		(224)
15-1	八皇后问题的起源与解 .....	(224)
15-2	小棋盘上的皇后问题 .....	(228)
15-3	八皇后问题的解法 .....	(229)
15-4	八皇后问题的解可以叠加吗? .....	(232)
15-5	没有 3 个皇后成一直线的解 .....	(233)
15-6	控制整个棋盘需要几个皇后? .....	(233)
15-7	怎样使八皇后的控制范围最小? .....	(234)

习题	(235)
<b>第十六章 数字哑谜——有趣的算式复原问题</b>	(236)
习题	(252)
<b>第十七章 数学王国中的金字塔</b>	(255)
<b>第十八章 谁是幸存者</b>	(265)
习题	(269)
<b>第十九章 变化无穷的二人取物游戏</b>	(271)
19-1 最简单的二人取物游戏	(271)
19-2 限从若干堆的一堆中取子的玩法	(272)
19-3 从 $NIM_1$ 到 $NIM_k$	(276)
19-4 $NIM$ 的另一种变形	(277)
19-5 $NIM$ 的又一个变形	(278)
<b>第二十章 关于重排九宫</b>	(281)
20-1 原始的重排九宫问题	(281)
20-2 洛伊德的“14~15”玩具	(283)
20-3 洛伊德游戏的变形	(286)
20-4 “把希特勒关进狗窝”游戏	(287)
20-5 以棋步移动的九宫问题	(292)
习题	(293)
<b>第二十一章 梵塔问题透视</b>	(296)
21-1 梵塔问题的起源	(296)
21-2 梵塔问题与国际象棋的传说	(297)
21-3 梵塔问题与哈密顿通路问题	(298)
21-4 梵塔问题与格雷码	(300)
21-5 梵塔问题的计算机编程	(303)
<b>部分习题、问题答案</b>	(305)
<b>参考文献</b>	(319)
<b>数学网站</b>	(321)

# 第一部分 百变幻方——娱乐 数学第一名题

本书分两大部分，第一部分专门介绍幻方，第二部分介绍娱乐数学的其他经典名题。把幻方从娱乐数学的其他经典名题中分离出来，作为一个专题着重加以介绍，并非完全是由于作者的偏爱，而更主要的是因为幻方在娱乐数学中的地位以及它的意义实在非同一般，也因为幻方是中国人的首创，是值得中国人骄傲的。赖塞（H.J.Ryser）的组合数学名著《Combinatorial Mathematics》（MAA, 1962）开宗明义地写道：“组合数学，也称为组合分析或组合学，是一门起源于古代的数学学科。据传说，中国的大禹（约公元前 2200 年）在一只神龟的背上看到如下幻方：

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

而大约公元前 1100 年，排列即已在中国开始萌芽……”

幻方从中国传到世界其他地区以后，引起广泛的重视，一代又一代的学者不懈地对它进行研究，取得了许多成果，有关的文献资料多不胜数。数学家詹姆士·纽曼（James Roy Newman, 1907~1966）在 20 世纪 50 年代编辑了一部数学文库性质的《数学世界》（The World of Mathematics, Tempus Books, 1956），收集了数学各个分支、各个年代的名家名篇 133 篇，分四大卷出版。在“数学游戏与数学谜语”这部分的开头，纽曼在介绍中提到幻方时就写道：“单单是有关幻方的著作就足够办一个规模可

观的图书馆了。” (The writings on magic squares alone suffice to make a fair-sized library) 读者在看过本书以后当会相信纽曼的这个说法是一点也不过分的，笔者专用一部分介绍幻方也是有道理的。

## 引子 洛水神龟献奇图

公元前 2300 年，也就是距今 4300 年左右，在我们中华民族祖先居住的大地上，发生了暴雨连绵、洪水泛滥、成千上万的人遭到没顶之灾的大悲剧。当时人类抵御自然灾害的能力十分有限。在拯救自身生命的强烈愿望驱使下，人们奋起抗灾，在斗争和失败中学习，涌现出了许多可歌可泣的故事，其中大家最熟悉的是大禹为治水三过家门而不入的事迹。在大禹治水的过程中，还有许多美丽、动人的传说。例如，相传大禹在治黄河的时候，黄河龙马献给大禹一张河图，从而帮助大禹制定了一套正确的治黄方案。另一则传说是大禹在治洛水的时候，洛水神龟献给大禹一本洛书，书中有如图 0-1 所示的一幅奇怪的图。这幅图用今天的数学符号翻译出来，就是一个 3 阶幻方，也就是在  $3 \times 3$  的方阵中填入 1~9，其每行、每列和 2 条对角线上 3 个数字之和都相等，等于 15，并把它叫做幻方常数 (magic square constant)

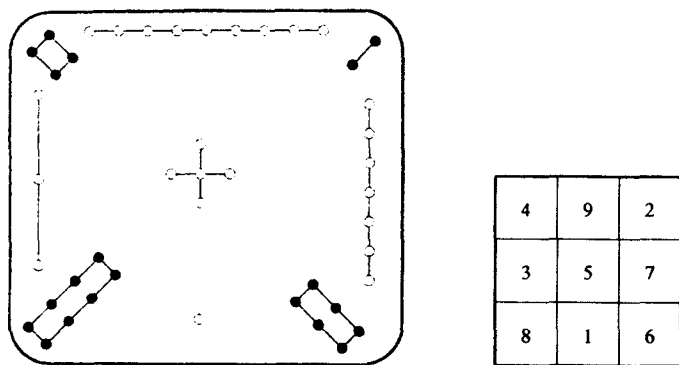


图 0-1 洛书上的 3 阶幻方

或幻和 (magic sum)。这就是中国人首先发现的世界上的第一个幻方。别小看了这个小小的幻方，这是中国人在数学上的一个伟大创造，它奠定了数学中一个重要分支——组合学的基础。当



然，由于当时还没有发明我们今天所使用的数字符号，所以我们的祖先就巧妙地用这个图来表达他们所知道的幻方。图中，奇数用若干个空心的圆圈表示，偶数用若干个实心的圆圈表示，这和中国古时的阴阳学说有关。

由于河图和洛书的传说在公元 80 年出版的古书《大戴礼记》中就有清清楚楚的记载，因此，中国人首先发现了幻方，是国际数学界公认的。幻方后来陆续传播到日本、朝鲜、印度、泰国、阿拉伯等地，引起广泛兴趣和重视。但根据史料记载，国外最早研究幻方的学者当推阿拉伯的塔比·伊本·夸儿拉 (Thabit ibn Qurrah, 826~901)，那已是公元 9 世纪了。至于欧洲人知道幻方就更晚了，据信是生于康斯坦丁诺普尔 (Constantinople) 的印度人穆晓普鲁斯 (Manuel Moschopolus) 首先在 15 世纪把幻方介绍到欧洲去的。

在中国古代，洛书 3 阶幻方被蒙上了一层厚厚的神秘色彩。周朝的易学家把它同“九宫说”等同起来 (九宫指乾、坎、艮、震、巽、离、坤、兑八卦之宫，外加中央之宫，合称九宫)，或者把它同他们所主张的“天地生成数说”联系起来 (天数指奇数 1、3、5、7、9，表阳、乾、天等；地数指 2、4、6、8，表阴、坤、地等)。而两汉时的巫师或方士则把它用作占卜吉凶的图讖。另一方面，由于洛书 3 阶幻方配置 9 个数字的均衡性和完美性，产生了极大的审美效果，使古人认为其中包含了某种至高无上的原则，也把它作为治国安民九类大法的模式，或把它视为举行国事大典的明堂的格局，因此使中国古人的这一数学杰作，具有了哲学意义的创造。

事实上，隐藏在洛书 3 阶幻方背后，还可能有许多奥秘有待人们去挖掘。我国著名的科普作家兼娱乐数学专家谈祥柏先生就曾在他的著作中介绍了有关对洛书 3 阶幻方的新发现。首先是把幻方想像为画在汽车轮胎上，于是，最左一列与最右一列相邻，最上一行与最下一行也相邻。这时，9 个  $2 \times 2$  方阵中的 4 数之和恰好从 16 到 24，既不重复也不遗漏，如图 0-2 所示。你说奇