SHUANGJI YAODIAN JINGXI CONGSHU 双基要点精析丛书

高一册

GAOZHONG SHUXUE
SHUANGJI YAODIAN JINGXI

高中数学双基要点精析

鲁鹤鸣 编著

Maths

上海科学技术文献出版社

SHUANGJI YAODIAN JINGXI CONGSHU 双基要点精析丛书

高一册

GAOZHONG SHUXUE
SHUANGJI YAODIAN JINGXI

高中数学双基要点精析

鲁鹤鸣 编著

上海科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学双基要点精析. 高一/鲁鹤鸣编著. 一上海：上海科学技术文献出版社，2006.8
(双基要点精析丛书)
ISBN 7-5439-2736-5

Ⅰ.高... Ⅱ.鲁... Ⅲ.数学课一高中一教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第066685号

责任编辑：忻静芬
特邀编辑：周 韬
封面设计：王 慧

高中数学双基要点精析
高 一 册
鲁鹤鸣 编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号 邮政编码200031)
全 国 新 华 书 店 经 销
江苏常熟人民印刷厂印刷

*

开本787×960 1/16 印张13 字数260 000
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1—6 000
ISBN 7—5439—2736—5/G·785
定价：19.00元
http://www.sstlp.com

丛书前言

教育总是要走在时代发展的前头。我国的高中教育随着改革、开放二十多年的发展，不论教育的内容以及它的广度、深度，还是前沿的触角可以说已接近国际的先进水平。并且我国的高中教育还保持着中国基础教育的固有特色——重视基础知识、基本技能的教学。

但各地教学水平的不平衡，升学竞争的激烈仍使整体的课堂教学水平呈滞后状态。我们组织有丰富经验的、在第一线从事教学实践的教师编写这套《精析》丛书，就是想对目前在广泛使用的各类高中数学、物理、化学教材，根据教育部颁布的大纲与考纲给同学们进行精辟地分析；精确地解答；精细地梳理，也给出一些精炼的例题与习题。让它作为你最好的课外辅导教师，既能省时、省力，又能较快地提高学习成绩。

精析丛书的特点：分高一、高二、高三册，高三册中，还含有整个高中阶段的重要专题及模块的精析。每章节有基础知识、基本技能两大块内容。每节有要点提示，不仅有知识的要点更具有特色的是有怎样去学习、掌握的要点提示。

丛书的编写采用的是细目化的编写。读者可以随着学校教学进度系统学习也可以根据自己的情况挑选条目学习。青年教师可以把它作为备课的案头指导读物。高中三册合在一起是很好的一套高考复习用书。

丛书的编写中也有目的地挑选了近几年全国及各地高考的一些试题，给读者有充分多地信息，为你的升学复习指明方向。

任何事物的发展，总是要建立在已有的基础上。学习也不例外。聪明的人善于及时地吸取别人成功的经验。我们就是想把这些好的学习方法及时地送到你的手上，让你在愉快地学习中快速成长。

前　言

数学作为一门独特的学科，以前讲它是其他自然科学的基础.现在看来它还是社会科学的基础.进入数字技术时代的今天它的身影已在社会的所有领域出现.其实数学是一种思想，它是人认识世界的方法之一.

我国的高中数学的触角已从单纯的函数领域伸向了基础数学的各个方面.今后还会更广.但学习数学的方法——紧紧抓住双基，即基础知识、基本技能是不会错的.数学的最基本的思想与方法在双基中尽有淋漓尽致的体现与发挥.用“蚂蚁沿多边形的边爬一周”的道理可以证明多边形的内角和为$(n-2)\times180^{\circ}$.……同学们一定要重视双基的学习.这样提升数学学习成绩是很快的.

高中数学双基要点精析编写是围绕着“四个精字”展开的：即对每章的内容有精细的梳理，不是那种面面俱到的整理，而是把最精要的内容呈现出来，起到纲举目张的效果，对每一例题进行精辟分析，就是分析题目要素、提出着手的途径与方法.尽可能地体现出精要的数学思想与方法；还给出精确的解答，使你能举一反三；真正起到例题的作用.在一节或几节后面给出了精选的习题，包括近几年全国及各地的一些高考题.

高一、高二册是适合各类教材的课外辅助书.高三册除紧跟教材的辅导内容外，还有整个高中阶段的各专题、各模块的精析.针对考纲的每一个考点提出了恰如其分的分析问题、解决问题的方法.如果将高中三册合起来，是一套既能夯实双基又能提高能力的高考复习用书.

精细梳理、精辟分析、精确解答、精炼地选题.实际情况恐怕有一点距离.但我是想给学生不很繁重的负担又能很好地提高数学学习——这样一套辅导教材.

接到这个任务，感到既兴奋又惶恐.三十多年来的教学实践确实给了我很丰富的教学经验，特别是近几年对新教材的研究与实践有很多话想说，想告诉同学们怎么去学，给同学们在学习数学中带去欢乐.但也感到压力，不知能否做好这件事.书出来了，望它能给同学、老师带去有益的帮助.

2006.早春.于杭州求是村

目　　录

第一章　集合与简易逻辑

一、基 础 知 识

1.1　集合概念及运算

要点

集合概念叙述：

集合——一个现代数学的基本概念，至今集合思想已渗透到现代数学的所有领域.

集合是一个描述性的概念，一般是指：研究对象的全体.

集合的运算——是指两个以上集合之间的逻辑关系用特定的一些数学符号来进行的一些逻辑推理及运算.

例 1　下列几组集合中哪些是表示相同的集合：

(1) 集合 $A=\{(3,-5)\}$，$B=\{(-5,3)\}$；

(2) 集合 $M=\{1,-3\}$，$N=\{-3,1\}$；

(3) 集合 $M=\varnothing$，$N=\{0\}$；

(4) 集合 $M=\{\pi\}$，$N=\{3.1415\}$；

(5) 集合 $P=\{x \mid x=2k-1,\ k\in \mathbf{Z}\}$，$Q=\{x \mid x=4k\pm 1,\ k\in \mathbf{Z}\}$；

(6) 集合 $P=\{$小数$\}$，$Q=\{$实数$\}$；

(7) 集合 $M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$N=\{y \mid y^2-3y+2=0\}$；

(8) 集合 $M=\{y \mid y=x^2,\ x\in \mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y) \mid y=x^2\}$；

(9) 集合 $M=\{m \mid m=3z+1,\ z\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{n \mid n=3z-2,\ z\in \mathbf{Z}\}$.

分析　把研究对象的全体看成一个集合.有时也指具有某种属性的一些对象的整体.

集合的表示法：

(1) 列举法　把集合中的元素一一列举出来，写在大括号{　}内；

(2) 描述法　有文字描述、有用数学语言描述，特别是用数学语言描述，一般在大括号内先写出集合中元素的一般形式(称为代表元素)，有时同时也表达了元素的一般属性，再在一竖线右边用数学语言详细描述这个集合中元素的属性.

解题的基本方法,看集合首先看元素.

解 (1) $A \neq B$. 这两个集合都是单元素集合——一个数对(或一个点),但$(3,\ -5)$,$(-5,\ 3)$不是同一个数对(不是同一个点).

(2) $M = N$. 含有相同的两个元素.集合中的元素排列是无序的.

(3) $M \neq N$. $\varnothing$是表示空集的一个符号,而$\{0\}$中含有一个元素 0.

(4) $M \neq N$. 虽然均含一个元素,但字母 π 是表示一个无理数,而 3.141 5 是一个有理数.

(5) $P = Q$. 两个集合均表示集合{奇数}.

(6) $P = Q$. 通过这个练习读者可以简单了解一下实数的大致分类:

{小数}={实数}=$\mathbf{R}$.

{无限循环小数}={分数}=$\mathbf{Q}$.

{无限不循环小数}={无理数}=$\complement_I \mathbf{Q}$(全集 $I=\mathbf{R}$).

(7) $M = N$. 看集合首先看元素,虽然两个集合选择了两个不同的字母来代表元素,但集合中对元素的描述都表示了同一个方程的根.

(8) $M \neq N$. M 中的元素是 y,后面的描述表示 $y = x^2,\ x \in \mathbf{R}$. 即这个函数的函数值取值的范围. N 中的元素为数对$(x,\ y)$,它表示的是函数 $y = x^2,\ x \in \mathbf{R}$ 在平面上构成这个函数图象的所有的点.

(9) $M = N$. 两个集合都表示整数中除以 3 余数为 1 的所有整数.

例 2 用图示表示下列集合:

(1) $\{(x,\ y) \mid x + y > 0,\ xy > 0\}$;

(2) $\{y \mid y = x^2\}$;

(3) $\left\{\theta \middle| \theta = \dfrac{k\pi}{6},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$;

(4) $\{a,\ b,\ c\}$;

(5) $\left\{(x,\ y) \middle| \begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 1 \end{cases}\right\}$;

(6) $\left\{(x,\ y) \middle| \dfrac{y-2}{x+1} = 1\right\}$;

(7) $\{x \mid x \neq 1$ 且 $x \neq -2\}$;

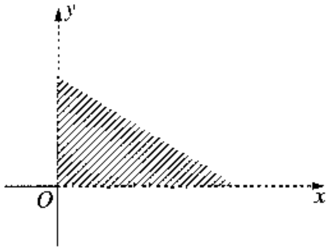
(8) $\{x \mid x \neq 1$ 或 $x \neq -2\}$;

(9) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $-1 \leqslant x < +\infty\}$.

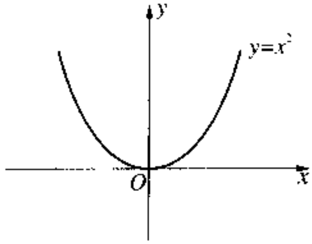
分析 集合的表示方法除列举法、描述法外还可以用韦恩图来表示,即在一封闭的曲线内填上该集合的元素;还可以在数轴上表示;以及在直角平面上表示等.

图示是学习数学相当有效的方法.

解　(1)

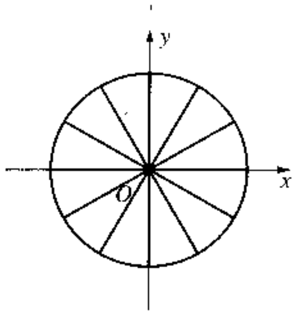


(2)



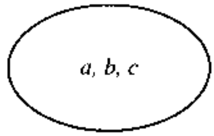
表示曲线所对应的 y 取值范围.

(3)

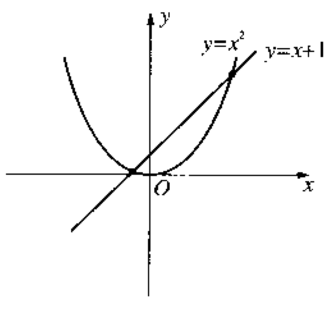


在单位圆上表示角 θ 终边的位置.

(4)

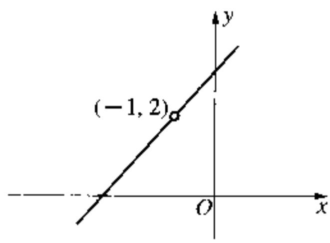


(5)



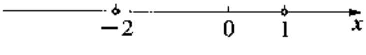
表示两曲线的交点.

(6)



表示除(−1，2)以外的一直线.

(7)



表示数轴上除 1，−2 两数以外的其余所有实数.

(8)

表示数轴上所有实数.

(9)

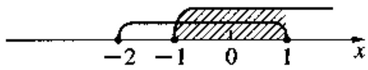


图 1-1

表示 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 这个区域的所有实数.

例 3 如图 1-2 所示,I 是全集,M、P、S 是 I 的三个子集,则阴影部分所表示的集合是(   ).

(A) $(M \cap P) \cap S$

(B) $(M \cap P) \cup S$

(C) $(M \cap P) \cap \complement_I S$

(D) $(M \cap P) \cup \complement_I S$

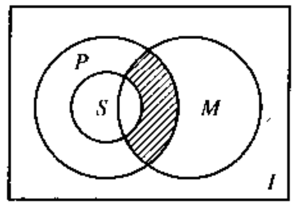
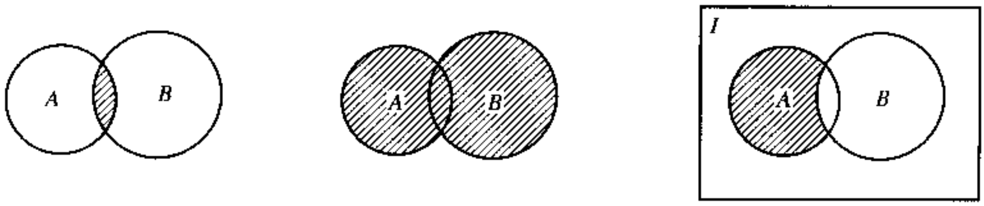


图 1-2

分析 怎么看韦恩图,要掌握几个基本图形,如图 1-3 所示.



$A \cap B$　　　　$A \cup B$　　　　$A \cap \complement_I B$

(1)　　　　(2)　　　　(3)

图 1-3

特别是——$A \cap \complement_I B$,可以念作:在 A 集合内并且在 B 集合外.

解 图中的阴影部分在$(M \cap P)$内并且在 S 外.所以选择$(M \cap P) \cap \complement_I S$,故选 C.

例 4 用适当的符号填空:

(1) $\{0\}$ ______ $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$;

(2) $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{1}{x} = x,\ x \in \mathbf{R}\right\}$ ______ $\{x \mid x^3 - x = 0\}$;

(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$ ______ $\{x \mid x = a + \sqrt{6}b,\ a \in \mathbf{Q},\ b \in \mathbf{Q}\}$.

分析 我们看集合首先要看元素.如下面两个集合:$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$,$B = \{x \mid x^2 + 1 = 0\}$,是否同一个集合呢?

A 中,$x \in \mathbf{R}$,而方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内无解,所以 $A = \varnothing$. 而 B 集合,元素没有这个说明,以后同学们会学到:方程 $x^2 + 1 = 0$ 在复数范围内是有解的,即 B 集合中有两个元素.

故目前我们表示集合时必须把元素取值范围确切地表示出来.

解　(1) $\{0\}$ __$\supsetneqq$__ $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$;

(2) $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{x}=x,\ x\in\mathbf{R}\right\}$ __$\subsetneqq$__ $\{x\mid x^3-x=0\}$;

(3) 设 $M=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $M^2=6$.

又　$\because$　$M>0$, $\therefore$　$M=\sqrt{6}$.

故　$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\in\{x\mid x=a+\sqrt{6}b,\ a\in\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Q}\}$.

例5　(1) 若 $A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\left\{1,\ a+1,\ a^2-2a+2,\ -\frac{1}{2}(a^2-3a-8),\ a^3+a^2+3a+7\right\}$, $A\cap B=\{2,\ 5\}$, 求实数 a 的值;

(2) 设 $M=\{x\mid 2x^2-5x-3=0\}$, $N=\{x\mid mx=1\}$. 若 $N\subsetneqq M$, 求实数 m 的取值所组成的集合.

分析　一般解含有参数(字母)的两集合之间的关系题时,主要依据集合的性质:

(1) 确定性　元素 $a\in A$ 或 $a\notin A$. 两者必其一;

(2) 互异性　同一集合中的元素应该互异,即有区别;

(3) 无序性　集合内的元素无顺序可言;

(4) 任意性　集合内的元素可以是任意确定的事物.

集合之间的关系: $A\subseteq B$, $A\subsetneqq B$, $B\not\subseteq A$, $A=B$, $A\neq B$; $\varnothing$是任何非空集合的真子集.

解　(1) $A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$ 中有 3 个元素,而 $A\cap B=\{2,\ 5\}$,所以 $a^3-2a^2-a+7=5$.

解方程,得　$a=2$ 或 -1 或 1.

当 $a=2$ 时, $B=\{1,\ 3,\ 2,\ 5,\ 25\}$.

当 $a=\pm 1$ 时,B 中出现相同元素,不符合集合性质,故 $a=\pm 1$ 舍去.

综上,得　$a=2$.

(2) $\because$　$M=\{x\mid 2x^2-5x-3=0\}=\left\{-\frac{1}{2},\ 3\right\}$. 又因为 $N\subsetneqq M$,所以 $N=\varnothing$ 或 $N=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$或 $N=\{3\}$.

当 $N=\varnothing$,即$\{x\mid mx=1\}=\varnothing$,得　$m=0$;

当 $N=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,即使 $m\left(-\frac{1}{2}\right)=1$,得　$m=-2$;

当 $N=\{3\}$,即使 $m\cdot 3=1$,得　$m=\frac{1}{3}$.

故实数 m 取值所组成的集合为$\left\{0,\ -2,\ \frac{1}{3}\right\}$.

习题 1

一、选择题 *

1. 若非空集合 A、B 有关系 $A \supsetneqq B$, I 为全集,则下列集合中,空集是(　　).

(A) $A \cap B$　　(B) $\complement_I A \cap B$　　(C) $\complement_I A \cap \complement_I B$　　(D) $A \cap \complement_I B$

2. 在以下五个写法中:① $\{0\} \in \{1, 2, 0\}$; ② $\varnothing \subsetneqq \{0\}$; ③ $\{1, 2, 0\} \subseteq \{0, 1, 2\}$; ④ $0 \in \varnothing$; ⑤ $0 \cap \varnothing = \varnothing$, 正确的写法有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

3. 集合 $M = \left\{(x, y) \,\middle|\, 3^{x-4y} = \dfrac{1}{27}\right\}$, $P = \{(x, y) \mid x - y = 3\}$, 则 $M \cap P$ 等于(　　).

(A) $\{2, 5\}$　　(B) $\{3, 2\}$　　(C) $\{(2, 5)\}$　　(D) $\{(5, 2)\}$

4. 下列四个集合中,是空集的为(　　).

(A) $\{x \mid x + 3 = 3\}$　　(B) $\{(x, y) \mid y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$

(C) $\{x \mid x^2 < x\}$　　(D) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

5. 若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 2x + a = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 为单元素集,则 a 的取值范围是(　　).

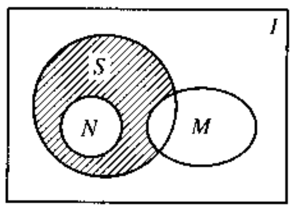
(A) $\{1\}$　　(B) $\{-1\}$　　(C) $\{0, 1\}$　　(D) $\{-1, 0, 1\}$

二、填空题

6. 若定义 $M - N = \{x \mid x \in M, 且\ x \notin N\}$, 则 $M - (M - N) =$ ________.

7. 已知集合 A 中有 2 个元素,集合 B 中有 5 个元素,那么集合 $A \cup B$ 中元素的个数 P 的值为________.

8. 如图所示,其中的阴影部分表示的集合为________________.



(第 8 题)

9. 设集合 $A = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y \mid y = x + 1, x \in \mathbf{R}\}$, 那么 $A \cap B =$ ________.

10. 设集合 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 那么 a 的取值范围是________.

三、解答题

11. 设集合 $A = \{(x, y) \mid y = 2x - 1, x \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{(x, y) \mid y = ax^2 - ax + a, x \in \mathbf{N}^*\}$, 问是否存在非零整数 a, 使 $A \cap B \neq \varnothing$? 若存在,请求出 a 的值及 $A \cap B$.

---

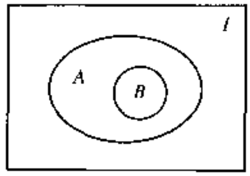
* 本书中的选择题,每个小题都给出了代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把你认为正确的代号写在题后的括号内,下同.

12. 在某一个班级的学生中，有 36 人数学成绩不低于 80 分，有 20 人的物理成绩不低于 80 分，且 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分，那么，有多少人在这两科成绩中至少有一科不低于 80 分？

参 考 答 案

一、选择题

1. B. $\complement_I A \cap B = \varnothing$



（第 1 题）

2. B. ②，③表达正确

3. D　**4.** D

5. D. ① 当 $a = 0$ 时，$x = 0$ 符合题意；② $a \neq 0$ 时，设 $\Delta = 4 - 4a^2 = 0$，得 $a = \pm 1$

二、填空题

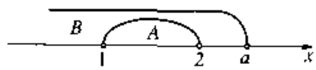
6. $M \cap N$. 设韦恩图

中的阴影部分为：$M - N = \{x \mid x \in M$，且 $x \notin N\}$. 那么 $M - (M - N) = \{x \mid x \in M$，且 $x \notin (M - N)\}$

7. $5 \leqslant P \leqslant 7$. 集合 A，集合 B 的元素关系只有三种可能：A 中元素全在 B 中；A 中元素有且只有一个在 B 中；A 中元素全不在 B 中

8. $(\complement_I M \cap \complement_I N) \cap S$. 在 S 内且也在 $(\complement_I M \cap \complement_I N)$ 内

9. $[1, +\infty)$　**10.** $[2, +\infty)$　在数轴上表示如图所示

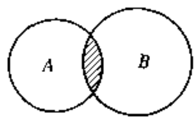


（第 10 题）

三、解答题

11. ∵　$A \cap B \neq \varnothing$，即方程组 $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = ax^2 - ax + a \end{cases}$ 有解. 消 y，得　$ax^2 - (a + 2)x + a + 1 = 0$. 该方程有实数解，故 $\Delta = (a + 2)^2 - 4a(a + 1) \geqslant 0$. 解不等式，得 $-\frac{2}{3}\sqrt{3} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{3}$. 其中 a 为非零整数，故 $a = \pm 1$. 若 $a = -1$，则 $x = 0$ 或 -1. 与 $x \in \mathbf{N}^*$ 矛盾，舍去. 若 $a = 1$，则 $x = 1$ 或 2，故 $A \cap B = \{(1, 1), (2, 3)\}$

12. 用 A、B 分别表示数学、物理成绩不低于 80 分的学生的集合，用 $\mathrm{Card}(S)$ 表示有限集合 S 中元素的个数，如图所示，



（第 12 题）

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cup B) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) \\ &= 36 + 20 - 15 = 41 \text{ 人} \end{aligned}$$

1.2　含绝对值的不等式解法

要点

绝对值概念叙述

代数意义的理解：$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时；} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$

几何意义的理解：$|x|$即代表 x 这个实数的点到数轴原点的距离，如图 1－4 所示.

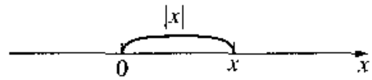


图 1－4

最基本的含绝对值的不等式的解的两种模式的集合理解：

$$|x|<a\ (a>0)\Leftrightarrow -a<x<a.$$

表示 $x>-a$ 且 $x<a$ 两集合的交集，

即
$$\begin{cases}x>-a,\\x<a.\end{cases}$$

$$|x|>a\ (a>0)\Leftrightarrow x>a \text{ 或 } x<-a$$

为两集合的并集.

例 1　不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是(　　).

(A) $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　(B) $\{x\mid x<0 \text{ 且 } x\neq -1\}$

(C) $\{x\mid -1<x<1\}$　　(D) $\{x\mid x<1 \text{ 且 } x\neq -1\}$

(2002 年全国卷·理)

分析　运用绝对值的基本概念解题，不能动摇. 此题显然应用绝对值的代数意义去掉绝对值符号.

解　$\begin{cases}x\geqslant 0,\\(1+x)(1-x)>0\end{cases}$ ①　或　$\begin{cases}x<0,\\(1+x)^2>0.\end{cases}$ ②

由① $\begin{cases}x\geqslant 0,\\1-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\x^2<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\|x|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\-1<x<1.\end{cases}$

$\therefore$　$0\leqslant x<1$;

由②，得　$x<0$ 且 $x\neq -1$.

由①、②的并集，得　$x<1$ 且 $x\neq -1$.

故应选 D.

例 2　若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为$(-1, 2)$，则实数 a 等于(　　).

(A) 8　　(B) 2　　(C) -4　　(D) -8

(2003 年北京市春招卷)

分析　也用绝对值的代数意义去掉绝对值号，至于参数 a 先不要急于处理，后面自然而然可得出的.

这里想强调的是含有参数的问题，一般学生看到这类问题往往一下子把注意力集中到参数上去了. 这样很不利于解题；其实首先要注意它是哪一类不等式，根据不同类别的

不等式用相应的方法去破题.

解　$|ax+2|<6 \Leftrightarrow -6<ax+2<6 \Leftrightarrow -8<ax<4$.

当 $a>0$ 时，$-\frac{8}{a}<x<\frac{4}{a}$.

解不等式组，得 $\begin{cases}-\frac{8}{a}=-1,\\ \frac{4}{a}=2.\end{cases}$ 解方程组，得　$a\in\varnothing$.

当 $a<0$ 时，$\frac{4}{a}<x<-\frac{8}{a}$.

解不等式组，得 $\begin{cases}\frac{4}{a}=-1,\\ -\frac{8}{a}=2.\end{cases}$ 解方程组，得　$a=-4$.

故应选 C.

例 3　(1) 若不等式 $|x+2|\leqslant 1-a$ 的解集为$\varnothing$，则 a 的取值范围为(　　).

(A) $a\geqslant 1$　　(B) $a>1$　　(C) $a\leqslant 1$　　(D) $a<0$

(2) 若关于 x 的不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集为$\varnothing$，则 a 的绝对值范围为(　　).

(A) $(3, +\infty)$　　(B) $[3, +\infty)$　　(C) $(-\infty, 3]$　　(D) $(-\infty, 3)$

分析　我们可以尝试利用$|x|$的几何意义来解题.

$|x|$的几何意义是：表示 x 值的点在数轴上表示该点到原点的距离.

那么，$|x-a|$ 的几何意义是：表示 x 值这个点与表示 a 的这个点之间的距离. 简言之，即两点间的距离.

解　(1) 解法一　代数意义的解法，因为 $|x+2|\geqslant 0$，是一个非负数，那么使 $|x+2|\leqslant 1-a$ 的解集为$\varnothing$，即使 $|x+2|\leqslant 1-a$ 恒不成立.

那么就是使 $1-a<0$，即得　$a>1$，故选 B.

解法二　设 $y=|x+2|$，即 x 这个点到 -2 这个点的距离，显然 $|x+2|\geqslant 0$.

那么，要使 $|x+2|\leqslant 1-a$ 的解集为$\varnothing$，则只能使 $1-a<0$，即得 $a>1$.

这里，请同学们注意使 $|x+2|\leqslant 1-a$ 恒不成立这个说法的含义.

也可由图 1-5 了解它的含义.

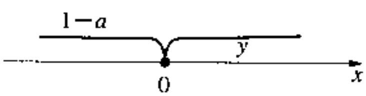


图 1-5

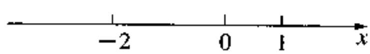


图 1-6

(2) 设 $y=|x+2|+|x-1|$.

由图 1-6 可知, $|x+2|+|x-1|\geqslant 3$.

即 当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|x+2|+|x-1|=3$.

当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时, $|x+2|+|x-1|>3$.

故 $y\geqslant 3$.

那么,使 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集为 $\varnothing$,即使不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 恒不成立,则 a 的取值范围为 $(-\infty, 3]$,故应选择 C.

习题 2

一、选择题

1. 不等式 $|x^2-x-6|>3-x$ 的解集是(　　).

(A) $(3, +\infty)$　　(B) $(-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$

(C) $(-\infty, -3)\cup(-1, +\infty)$　　(D) $(-\infty, -3)\cup(-1, 3)\cup(3, +\infty)$

2. 不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集是 $\varnothing$,则 a 的取值范围是(　　).

(A) $(3, +\infty)$　　(B) $[3, +\infty)$　　(C) $(-\infty, 3]$　　(D) $(-\infty, 3)$

3. 不等式 $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{1+x}$ 的解集是(　　).

(A) $(-1, 0)$　　(B) $(0, 1)$

(C) $(-1, 1)$　　(D) $(-1, 0)\cup(0, 1)$

4. 不等式 $||x+3|-|x-3||>3$ 的解集是(　　).

(A) $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$　　(B) $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

(C) $(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$　　(D) $(-3, 3)$

5. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-a|<2\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2x-1}{x+2}<1\right\}$,若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $(0, 1)$　　(B) $[0, 1)$　　(C) $[0, 1]$　　(D) $(-1, 0]$

二、填空题

6. 若不等式 $|ax+2|<b$ 的解集是 $(-1, 2)$,则实数 a 的值是________.

7. 不等式 $|x-a|>2b$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则 b 的取值范围为________.

8. 集合 $A=\{x\,|\,2|x-1|\leqslant 3\}$, $B=\{x\,|\,|3x-1|>3\}$,则 $A\cap B=$________.

9. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\,|\,|2x+3|\leqslant 5\}$,则 $\complement_U A=$________.

10. 函数 $f(x)=|x-1|-|x|$,则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=$________.