

//////
XIANDAI SHUXUE JIAOXUELUN

现代

数学教学论

◇ 叶立军 方均斌 林永伟 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

G633.6

40

现代

数学教学论

◇ 叶立军 方均斌 林永伟 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代数学教学论/叶立军,方均斌,林永伟著. —杭州:浙江大学出版社,2006.2

ISBN 7-308-04615-X

I. 现... II. ①叶... ②方... ③林... III. 数学课—教学研究—中学 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 003366 号

策划组稿 阮海潮
责任编辑 阮海潮
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 浙江省临安市曙光印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 18.75
字 数 301 千字
版 印 次 2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-308-04615-X/G·1016
定 价 27.00 元

内 容 简 介

本书用新的观点阐述数学教学理论,构建了新的数学教育体系,并与正在进行的基础教育改革实验的国家数学课程标准相适应。本书从现代数学教育的特征入手,根据新课标的理念,阐述了数学的教学目的、内容,阐述了数学观、数学教育观,介绍了国内外的主要教学理论、学习理论、课程理论。在此基础上,对中国数学教育中的“双基”教学进行了分析和讨论,介绍了数学教育教学方法和教学模式,并探讨了中学数学思维方法,对数学思维品质、思维过程、思维的一般方法以及如何培养良好的数学思维品质,以培养数学创新思维进行了详尽的叙述。本书还讨论了当前数学教育中的热点问题。

本书体现了时代性、国际性、学术性,努力探求中学数学教育的特色,以体现数学教育理论的中国特色。

本书适合高等师范院校本科生、研究生作为数学学科教学法的教材或参考书,也可供中小学数学教师、教研员、数学爱好者阅读。

前 言

进入 21 世纪,我国中小学掀起了一场轰轰烈烈的基础教育课程改革浪潮。课程改革是国家改革人才培养模式、培养创新人才、推进素质教育的必由之路,更是保证在国际竞争中立于不败之地的关键。由于数学的应用广泛性,数学教育在基础教育改革中可谓首当其冲,创新精神成为数学教育改革的指针。随着数学课程改革的推进,数学教师的素质是这场改革能否取得成功的关键,已经成为人们的共识。

数学教学论是高等师范院校数学与应用数学专业的一门必修课,也是数学师范专业区别于非师范专业的特色课程,它在教师培养和教育中起着十分重要的作用。本课程的目标是:使学生深入了解国内外数学教育的发展历史和改革趋势,树立现代教育理论与教育思想;明确中学数学的教育目的、教学原则,了解国内外的主要教学理论、课程理论,掌握数学学习理论,树立正确的数学观、数学教育观;掌握数学教育教学方法和教学模式,理解中学数学思维方法、思维过程,以及如何培养良好的数学思维品质,以培养数学创新思维。

为了实现这些目标,本书在编写过程中努力做到:第一,采用现代数学教育理念、新的教学观点阐述数学教学理论,构建新的数学教育体系,并与正在进行的基础教育改革实验的国家数学课程标准相适应。第二,从现代数学教育的特征入手,根据新课程标准的理念,阐述数学的教学目的、内容,阐述数学观、数学教育观,介绍国内外的主要教学理论、学习理论、课程理论。第三,对中国数学教育中的“双基”教学进行分析和讨论,介绍数学教育教学方法和教学模式,并探讨中学数学思维方法、思维过程,详细阐述如何培养良好的数学思维品质,以培

养数学创新思维。第四,详细介绍数学新课程标准,并与数学教学大纲进行对比,同时还介绍当前数学教育中的热点问题。

本书体现了时代性、国际性、学术性,努力探求中学数学教育的特色,以体现现代数学教育理论的特点。

本书由杭州师范学院叶立军策划,第二章、第三章、第八章、第九章由叶立军编撰,第一章、第四章、第六章由林永伟编撰,第五章、第七章由温州师范学院方均斌编撰,全书由叶立军统稿。

本书获得了杭州师范学院学术专项出版基金的资助,在编撰过程中得到了杭州师范学院科研处领导的支持和帮助,在此深表谢意。也感谢浙江大学出版社阮海潮副编审为本书的出版所付出的辛勤劳动。

在编撰过程中,吸收了许多专家学者的著作和研究成果,在此表示衷心的感谢。

由于作者学识有限,时间仓促,书中难免有不当之处,恳请各位专家、广大师生批评指正。

叶立军

2006年1月

目 录

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 第 1 章 现代数学教育学概况 | 1 |
| 1.1 数学教育学的研究对象 | 1 |
| 1.2 数学教育学的基本特点 | 4 |
| 1.3 数学教育观 | 6 |
| 1.4 数学和数学的特征 | 14 |
| 1.5 数学教育学的学习方法 | 18 |
| 第 2 章 中学数学的教学目的和教学内容 | 21 |
| 2.1 确定中学数学教学目的的依据 | 21 |
| 2.2 中学数学教学目的 | 24 |
| 2.3 中学数学的教学内容 | 26 |
| 第 3 章 数学学习理论 | 51 |
| 3.1 数学学习概述 | 51 |
| 3.2 几种学习理论 | 55 |
| 3.3 数学学习的一般理论 | 62 |
| 3.4 数学概念的学习 | 70 |
| 3.5 数学命题的学习 | 76 |
| 3.6 数学技能的学习 | 78 |
| 3.7 数学问题解决的学习 | 79 |
| 第 4 章 中学数学教学原则 | 88 |
| 4.1 教学原则的一般含义 | 88 |
| 4.2 中学数学教学原则相关案例分析 | 91 |
| 4.3 中学数学教学原则结构 | 116 |

| | |
|---------------------------------|-----|
| 第5章 中学数学的“双基”教学 | 119 |
| 5.1 基础知识的教学 | 119 |
| 5.2 基本技能的教学 | 131 |
| 5.3 “双基”教学评析 | 137 |
| 第6章 数学教学方法和教学模式 | 140 |
| 6.1 教学方法概论 | 140 |
| 6.2 数学教学方法的案例分析 | 143 |
| 6.3 数学教学模式的案例分析 | 150 |
| 第7章 中学数学教学过程设计 | 179 |
| 7.1 中学数学教学设计的概念 | 179 |
| 7.2 中学数学教学设计的价值 | 180 |
| 7.3 中学数学教学设计的原则 | 182 |
| 7.4 现代教育理论对中学数学教学设计的影响 | 185 |
| 7.5 中学数学教学设计 | 187 |
| 第8章 中学数学思维方法 | 213 |
| 8.1 数学思维和思维过程 | 213 |
| 8.2 数学思维的一般方法 | 222 |
| 8.3 数学思维的品质及其培养 | 243 |
| 8.4 数学创造性思维及其培养 | 247 |
| 第9章 数学教育热点问题介绍 | 257 |
| 9.1 数学研究性学习 | 257 |
| 9.2 数学文化 | 264 |
| 9.3 数学建模教学法 | 275 |
| 9.4 高等数学与初等数学的结合,提高数学解题能力 | 279 |
| 9.5 探究性学习 | 285 |
| 参考文献 | 291 |

第1章

现代数学教育学概况

数学教育学是高等师范院校数学教育专业的一门专业必修课。在学习本课程之前,首先应该了解中学数学教育学的研究对象、内容及学习该学科的意义,明确它对中学数学教学的指导性作用。同时,对数学的涵义、数学学科的特征以及中外数学教育发展概况和数学教育现代化运动也应该有一个基本的了解。本章将对这些内容作一个概述,以便大家对本教程的一般观点、学习目的和基本要求有一个整体的把握。

1.1 数学教育学的研究对象

数学教育学是研究中学教育系统中的数学教育现象、揭示数学教育规律的一门学科。数学教育学研究的对象是中学数学教学。因此,它必须研究中学数学教学中的教学过程、学生的学习过程及教材,当然还要涉及其他直接相关的内容。我们可以把数学教育学研究的对象分解成下列几个方面去研究:

教学目的(为什么教?);

教学对象(教谁?);

教学内容(教什么?);

学法(如何学?);

教法(如何教?);

学习效果(学得如何?)。

从中学教育的总目的出发,结合数学科学特点及它在现代科学、技术、生产中的地位和作用,根据中学生个性发展和年龄心理特点的发展,首先必须确定中学数学教学的目的和任务。其次,依据目的和任务,便可确定教材内容,并且可依据教材内容和学生思维活动水平制定出适宜的教法。学生学习效果的优劣,直接影响下一步教师的教学和学生的学习,因此对学生学习质量的测试与评估亦不可忽视。

20世纪以来,随着科学技术的迅猛发展,社会对数学教育提出了新的、更高的要求,因而世界各国对数学教育,特别是中小学数学教育的改革都进行了程度不同的探讨,而且这种不仅在理论上,同时也付诸实践的数学教育改革还在不断地深化和发展着。

从理论上讲,数学教育的研究对象已形成了包括数学教学论、数学课程论、数学学习论、数学方法论、数学思维论、数学教育测量与评价等围绕数学教育这个中心的学科群。数学教育,已成为学科教育研究中最活跃的学科之一。相应地,数学教育类的课程正在不断地改革、不断地充实和完善。从我国的情况看,已经经历了一个由“数学教学法”到“数学教材教法”,再逐步过渡到“数学教育学”的发展过程。

新中国成立后,我国高师院校数学教育专业开设了“数学教学法”课程,其研究对象主要是中学数学的讲授方法,基本上是照搬苏联的做法,其表现特点是典型的“教学原理加数学例子”。到了20世纪60年代,随着经济的发展,社会对人才的培养技能规格有了新的要求,数学教育不再以传授知识和培养技能为主要目的,而是通过传授知识去开发学生的智力、培养能力,使学生得到全面的发展。由于数学教学目标的转变,数学教学法的研究对象和任务也相应地得到了扩展,除了研究中学数学的讲授方法外,还要对教材进行分析,研究学生数学能力的培养等问题。于是,进入80年代,“数学教学法”课程就发展为“数学教材教法”。而后,数学教育目标进一步扩展,提倡在数学教学活动中,突出发展学生的思维能力,而且在“大众数学”的意义下,全面提高学生的数学素质,即数学教育不再是以少数学生的升学作为主要目标,而是以提高全民的数学素质为宗旨,这又给数学教育的理论研究提出了新的课题。要使数学教育面向大众,同时又要

充分发挥数学教育的功能,就必须研究学生的数学学习心理,研究数学的课程理论。由此,到了80年代末期和90年代,“数学教育学”便应运而生。

关于“数学教育学”的研究对象,目前尚无统一的定论,比较趋于一致的观点是:数学教育学包括数学课程论、数学学习论和数学教学论三部分。这种观点是由德国学者鲍斯费尔德(H. Bauersfeld)在第三届国际数学教育大会上提出来的,后来美国的汤姆·凯伦(Tom Kieren)在一篇题为《数学教育研究——三角形》的文章中将其发展,把课程、教学、学习比作三角形的三个顶点,构成一个紧密相连、彼此渗透和交织的三角形态。

数学教育学的主要研究内容可概括如下:

1.1.1 数学课程论的内容

(1) 数学教学内容,即教什么内容,为什么要教这些内容等问题,涉及数学教学内容的选择和编排。显然,这就必须研究数学课程与社会的关系、与数学教育价值的关系以及与学生认知水平发展的关系等,研究如何处理好数学课程与社会、知识、学习者之间的协调性,使这几方面都得到和谐、统一的发展。

(2) 数学课程的发展。了解数学课程发展历史,揭示课程演变的某些客观规律,对目前的数学课程进行修正和对未来的数学课程编制作出正确的决策。

(3) 数学课程的评价。进行新课程教学实验,研究课程目标,建立评价体系,检验课程实施结果等,给课程改进和新课程的编制提供依据,同时还可促进教学方法的改革和发展。

1.1.2 数学学习论的内容

(1) 数学学习的心理规律,包括数学概念、命题、问题解决的学习心理过程;技能的获得与应用;数学认知结构与迁移;数学学习中的非智力因素等。

(2) 数学能力与数学思维。研究数学能力的结构与成分;数学能力与一般能力的关系;数学能力的培养途径;数学思维的分类、过程及方式;数学思维能力的培养等。

1.1.3 数学教学论的内容

数学教学论的内容主要有:

- (1) 数学教学的目的和任务;
- (2) 数学教学原则;
- (3) 数学教学过程、教学组织形式以及教学手段等;
- (4) 数学教学方法;
- (5) 教学效果的检测与评价。

从上述学习内容可以看出,数学教育学是一门与数学、哲学、教育学、心理学、逻辑学以及其他现代边缘学科如信息论、控制论、社会行为学等相关联的综合性学科,但这种综合性并不是将这些学科的一些内容随意地、简单地加以拼凑与组合,而是从数学与数学教育的特点出发,运用各个相关学科的原理、结论、思想、观点和方法来研究、解决数学教育本身的问题。因此,数学教育学又是一门独立的学科,它有着自己独立的研究对象和特殊的研究方法。本教程将以教学论为主线,加入部分数学学习理论以及数学思维、数学能力组成一个框架,围绕这一主线,在框架内的讨论则力求宽泛而深入。

1.2 数学教育学的基本特点

数学教育虽然只是整个教育领域中的一个分支,但由于数学教育涉及范围广,参与人员众多,社会影响大,它的一些改革举措往往备受关注,可以说,数学教育已经成为一种社会文化现象,所以对数学教育本身特点的分析 and 把握显得非常有必要。综合多数研究者的看法,一般认为数学教育具有综合性、实践性、科学性和教育性等基本特点。下面对其中几个比较重要的基本特点作简单的介绍。

1.2.1 综合性

从学科结构上看,数学教育学与众多学科相关,是多门学科的交叉学科,因而这些学科的部分理论、思想和方法可以引入到数学教育学中来,作为其基本的理论基础。

同时,数学是数学教育的具体内容,数学学习是一个特殊的认识

过程,这是由数学本身的特点决定的,因而,数学教育学要研究中学数学课程的结构、教学原则、教学方法、学生学习以至教学全过程,必须立足于数学专业知识和教育理论。因此,数学教育学是一门理论性、综合性的学科。

1.2.2 实践性

教学是一种实践,这就决定了数学教育学是一门实践性很强的理论学科。

首先,数学教育理论是以广泛的教学实践经验为背景,在实践的基础上产生和发展起来的。数学教学实践是数学教育学的根基,离开了教学实践,数学教育学就成了无源之水。因此,数学教育学要制定教学目标、评价体系等,都必须经过实践,在实践的过程中积累经验,再总结和概括出理论体系,所形成的理论又必须经受实践的检验。此外,数学教育学还需要以试验为基础。课程教材的改革、新教学方法的使用,都必须进行试验,经过验证、修订后,再加以推广。“新数运动”由于受潮流的推动,未经实验就推广,缺乏实验依据,结果必遭挫折。这一历史教训再次表明了数学教育研究必须立足于实践。

其次,数学教育学又要反过去指导实践,服务于实践。由于数学教育学是由若干数学教学经验的积累,再经过实践的检验,去伪存真而逐步形成和发展起来的,所以这些理论就可以在一定意义上去指导新的数学教学实践。

1.2.3 科学性

科学性是任何一门学科最基本的特点。数学教育理论的内容、方法是随着社会的发展,时代对教育提出新的要求以及科学技术、教育科学研究的发展而不断充实和改进的。

数学教育的一般规律是客观存在的,然而揭示这些规律的方式却不是唯一的。就教学论而言,根据教学原理对教学提出的教学原则就有几十种之多,由于人们认识的角度和深度不同,对同一个问题就有可能有多种不同的看法,但目标却是相同的,都是为了以明确的方式去揭示数学教学规律,使教学过程最优化,使数学教育的功能得以充分的发挥。事实上,这也就决定了数学教育必然随着人们认识

客观事物的逐步深入而不断发展。

数学教育理论和实践的发展性,还体现在它受到科技发展水平的制约这一方面。例如,人工智能理论的崛起,直接促进了现代认知心理学的理论研究,从而也就扩展了数学学习心理学的研究领域。计算机的出现并被广泛地应用于辅助教学,这就使对数学内容的选择、教学方法的改革和教学形式的更新诸方面都必须作相应的重新认识和深入研究。

1.2.4 教育性

人是教育的对象,这就从根本上决定了数学教育学的教育性。首先,由于人才观的不断更新带来数学教育学课程在人才培养观念上的变化,例如,原来的计算型人才向应用型人才转变,传统的知识型人才向能力型人才转变,伴随着社会的发展,单纯的研究型人才也需要向创新型人才转变。其次,现代教育形态变得愈加多样,教育的性态表现得更加开放,这使得数学教育学课程本身应该接纳来自各位专家和各个不同领域的学者的建议和观点,博采众长,同时也要积极开展广泛的合作与交流,不断地适应社会对数学教育提出的新要求。所以我们对课程安排、教材编写、教学设计、学习指导等各个教学环节都要作认真的研究,以达到教书育人的最佳效果。

1.3 数学教育观

对数学教育的研究,我们不得不关注的两个问题是,数学观和数学教育观,当然两者是密切联系的,首先,数学教育必须反映数学内在的规律性;其次,数学教育毕竟是为数学的发展和数学的应用服务的。完整的数学观对数学教育的引导作用是显而易见的,反过来,先进的数学教育观也为数学的发展和数学的应用指明了正确的(即符合社会进步和发展主流的)方向。

人们对数学的看法其实是各不相同的,可谓仁者见仁,智者见智,但从数学整个发展历史过程中,各个国家、不同地区在各个社会历史发展时期表现出来的对数学的看法,亦有几种较为典型的代表。我们把这些观点加以汇总称为数学观(the view of mathematics),一

般有数学的哲学观、数学的科学观、数学的艺术观和数学的文化观等。对它们的分析有助于对数学教育的全面认识。同样,数学教育观也是变化发展的,也存在着时代性和地域性的差别。因此,我们应该从数学观的角度,通过对重要数学教育历史事件的考察,对数学教育观作一个历史意义上的解释。

数学教育的发展史表明,数学教育改革的焦点一直是数学课程的改革。但这只是一个表面现象,在其背后存在着数学教育观的转变这条主线,历史上每一次重大的数学教育改革运动无不由数学教育观念的变革所引发。

为此,在这里我们就通过介绍数学教育历史上三次重大的数学教育改革运动,来展示人们数学教育观的转变和更新,并体会这些改革运动对数学、数学教育、科技发展乃至社会进步带来的深远的影响。

1.3.1 培利-克莱因运动

1901年,英国皇家理科大学教授、被誉为近代数学教育改革先驱的数学家培利(John Perry, 1850—1920)在英国科学促进会于格拉斯哥召开的甲组(数学与物理)与乙组(教育)联盟会议上,发表了题为《论数学教育》(Teaching of Mathematics)的演讲。在演讲中,他主张数学的实践并不是教会学生一些技巧,并不是将抽象的理论如何运用于自然现象和社会现象,恰恰相反,而是从自然现象、社会现象和实践中发现数学的法则,明确提出数学教育的目的是强调应用。1902年,培利发表著作《关于数学教育的讨论》(Discussion on the Teaching of Mathematics),进一步提出了一系列的改革方案,其中心思想是:

(1) 强调数学的实用价值问题。

① 数学要从欧几里德《几何原本》的束缚中解放出来;

② 注意数值计算、对数的使用、代数公式的应用、坐标纸的应用,重视实验实测等技术教育。

(2) 要实行适应学生个性发展的个性教育。

(3) 反对为了通过考试的数学教育。

培利的这些数学教育改革措施以及所包含的数学教育思想逐渐被人们所接受,存续2000多年的欧洲数学经典教科书《几何原本》第

一次遭遇到空前的挑战,数学教育中欧氏几何一统天下的格局由此被打破,此后出版了许多不同类型的教科书,影响广泛,学生学习数学的兴趣也因此得到极大的提高。完全可以说,这样的改革已经把20世纪的数学教育带入了一个崭新的阶段。

与此同时,慕尼黑工业大学教授,在椭圆函数论、微分方程论、几何学方面都有光辉业绩的德国数学家克莱因(1849—1925)则积极主张数学、物理、工学内容一体化(统一起来)。这位在大学任教期间就一直关心数学教育,并给志愿当教师的学生开特别教育讲座的数学家,于1904年在德国自然科学会议上,发表了《关于中学数学与中学物理的若干问题》,也提出了类似于培利的数学教育改革措施:

- (1) 顺应学生心理自然的发展,安排教材,选取教材;
- (2) 融合数学诸分科,并且使数学和其他各门科学紧密联系;
- (3) 不过于重视数学的形式陶冶,应该把重点放在应用方面,培养学生用数学的方法观察自然现象和社会现象的能力;
- (4) 为培养这种能力,必须以“函数观念”和“直观的几何”作为数学教材的核心。

这些措施的要点是强调数学的应用性、教育心理学研究成果的指导性,以及突出函数的核心性。这些全新的观念无疑给当时沉寂而落后的数学教育注入了新鲜的血液,推动了整个数学教育观的变更。同时,及时地把这些观念付诸实际行动。例如,1908年在德国出版了一套全新的教科书,这套教科书在内容上把平面几何、立体几何、代数、三角、解析几何、微积分等内容融会为一个整体,增加授课时数(每周4~6小时),教学效果非常好。而且克莱因本人还发表著作《从高观点看数学》,在理论上对其观点做出积极的宣扬,促进了数学课程的现代化进程,推动数学教育观的更新和数学教育的发展。

培利、克莱因在20世纪初,极力提倡数学教育要进行改革并提出了自己的主张,成为50年后世界范围内数学教育现代化的先声。随后,法国的波利尔(1871—1956)、美国的慕尔(1862—1931)也纷纷响应他们的号召,提出数学教育改革(现代化)的主张。由于这次数学教育的改革影响广泛,波及包括美国、日本在内的几乎所有的资本主义国家,在数学教育史上是一次重要的数学教育观的转变,因此人们

把它称做培利-克莱因运动。

尽管在此后的二三十年间,数学教育现代化并无多大进展,但他们的主张,却播下了20世纪60年代数学教育现代化的种子,给后来世界范围内的数学教育现代化带来了深远的影响。

1.3.2 “新数”运动

第二次世界大战结束后,一些工业发达国家转入了经济恢复时期。由于生产发展的需要、科学技术发展的需要以及数学科学自身发展的需要,使得中学数学教育再也不能保持着所谓传统的教学内容和方法了。特别是1957年10月4日,苏联发射了第一颗人造地球卫星,使得以“世界霸主”自居的美国朝野震惊,深感教育的落后、科学人才的缺乏。美国认为出现这种“导弹差距”的根本原因,在于数学教育的落后。于是他们便从数学教育的改革入手,提出新数学运动——数学教育现代化。

1958年春,美国成立了规模宏大的“学校数学研究小组”(School Mathematics Study Group, SMSG),进行数学教育改革的研究工作,并动员了全国的人力和舆论,致力于数学教育现代化工作。

对数学教育现代化运动的兴起有决定意义的是1959年9月美国“全国科学院”在伍兹霍尔召开的一次会议。会上全面研究了中学数理学科的改革问题,提出了课程改革的四个新思想:

(1) 学习任何学科,主要是使学生掌握该学科的基本概念、基本原理和基本方法,这就是所谓结构思想;

(2) 任何学科的基础知识都可以用某种方法教给任何年龄的学生,即所谓早期教育思想;

(3) 以往教学只培养逻辑思维能力,而今后则应重视发现的能力,或称之为直觉思维的能力;

(4) 学生学习的最好动机不是为了应付考试,而是对数学的真正兴趣,因而提出了教材的趣味性和教学方法上的一系列问题。

这次会议还提出了数学教育的实用性要求。

1959年11月在法国莱雅蒙召开了关于数学教育改革的国际会议,会议一致肯定了数学教育改革的重要性,并组织了一批学者编写理科学生用的《中学数学教育现代化大纲》。会上集中讨论了三个