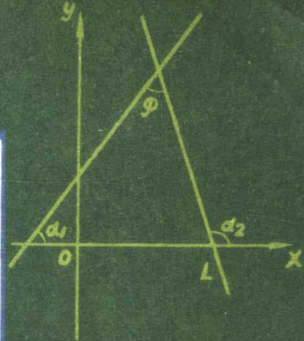
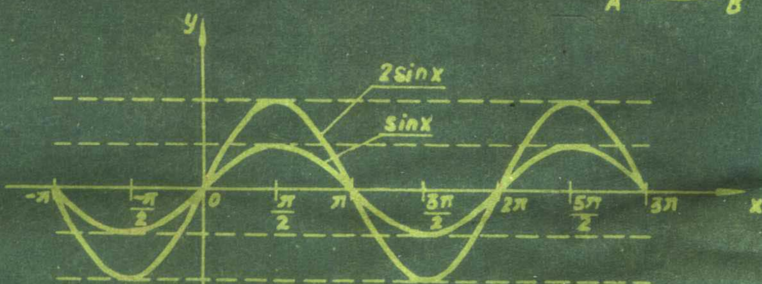
中学数学习题与例题选讲

第二册(下)

汪国强　罗家洪　袁国珍
黎镇堃　陈必彬　徐永汉　编

张兆驷　林建同　钟　光　校





广东科技出版社

中学数学习题与例题选讲

第二册（下）

汪国强 罗家洪 袁国珍
黎镇[illegible] 陈必彬 徐永汉 编

张光[illegible] 林建同 钟 光 校

广东科技出版社出版
广东省新华书店发行
广东新华印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 9.75印张 212,000字
1980年1月第1版 1981年10月第2次印刷
印数 80,401—185,400册
统一书号 13182·20 定价 0.69元

写在前面

本书将分册出版。第一册是有关代数部分的，以后各册包括几何（平面几何、立体几何、解析几何）、三角、综合题以及高等数学的一部分内容。我们希望：它有助于中学生读者复习、巩固课堂所得知识，还可以加深基本概念和运算方法。

学好数学的基本要求是概念清楚和运算熟练。因为，准确的概念有助于解题方案的安排和解题方法的寻探；正确而简捷的解题方法有助于概念的进一步深化。对于中学生来说，主动地要求自己培养这方面的素质，是有好处的。

本书在题解方面，力求注意正反两个方面，“正面”指的是在解题技巧上下功夫，有的给出一般解法，有的给出两种甚至三种或更多种解法，“反面”指的是对同学们易犯的错误或易于疏忽的地方提出告诫。我们以为，正反两面的知识，都是值得重视的。

编者

目　　录

第四篇　综　合　题

第五篇　解 析 几 何

答 案 与 提 示

第十六章　综　合　题

例1. 已知方程 $x^2+9x+10=0$ 的两个根为 $\mathrm{tg}\alpha$ 与 $\mathrm{tg}\beta$，求证 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=1$。

【证】 根据根与系数关系的韦达定理，有

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-9,$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=10;$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\frac{-9}{1-10}$$

$$=\frac{-9}{-9}=1。$$

〔注〕这是代数与三角综合题，必须全面考虑，如果本题从方程中解出 $x_1=\mathrm{tg}\alpha$，$x_2=\mathrm{tg}\beta$ 的值，再代入两角和公式，这就很麻烦．

例2. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $\mathrm{tg}\alpha$ 与 $\mathrm{tg}\beta$，求 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ 的值。（其中 p、q 为任意常数）

【解】 $\because$　$x^2+px+q=0$ 的两根为 $\mathrm{tg}\alpha$ 与 $\mathrm{tg}\beta$，

根据韦达定理，有

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-p,$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=q;$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\frac{-p}{1-q}.$$

$$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2}$$

$$=\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2+p^2}.$$

故 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$

$$=\cos^2(\alpha+\beta)[\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2+p^2}\left[\frac{(-p)^2}{(1-q)^2}+p\cdot\frac{-p}{1-q}+q\right]$$

$$=\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2+p^2}\cdot\frac{p^2-p^2(1-q)+q(1-q)^2}{(1-q)^2}$$

$$=\frac{q[p^2+(1-q)^2]}{(1-q)^2+p^2}=q.$$

例3. 实数 p，q 应满足怎样的条件下，才能使方程 $x^2+px+q=0$ 的两根成为一直角三角形两锐角的正弦。

【解】 如 $x^2+px+q=0$ 的两根为一直角三角形两锐角的正弦，设为 $\sin A$，$\sin B$。

而 $$\sin B=\sin(90°-A)=\cos A.$$

根据韦达定理有：

$$\begin{cases}\sin A+\cos A=-p, & (1)\\ \sin A\cdot\cos A=q; & (2)\end{cases}$$

$(1)^2-2(2)$ 得，

$$(-p)^2-2q=(\sin A+\cos A)^2-2\sin A\cdot\cos A=1.$$

即 $$p^2-2q=1.$$

又，由于 A 是锐角，因此

由（1）式可知

$$-p>0,\ 即\quad p<0;$$

由（2）式可知

$$q>0.$$

另外，一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是实数的条件是

$$p^2-4q\geqslant 0$$

因此，当实数p，q满足条件

$$\begin{cases} p^2-2q=1 \\ p<0 \\ q>0 \\ p^2-4q\geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} p^2-2q=1 \\ p<0 \\ 0<q\leqslant\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

时，才能使 $x^2+px+q=0$ 的两根为一直角三角形两锐角的正弦。

〔注〕题目要求是实数 p，q 应满足怎样的条件，不是具体地求出 p，q 的值。

例4．若方程$x^2+px+q=0$的两根为 $\mathrm{tg}\theta$和 $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$，又两根之比为 3：2，试求 p，q 的值。

【解法 1】 $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}\mathrm{tg}\theta}=\dfrac{1-\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}\theta}$，

又，依题意知 $\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}=\dfrac{3}{2}$，

即 $$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}}=\frac{3}{2}.$$

整理得 $2\operatorname{tg}^2\theta+5\operatorname{tg}\theta-3=0$，

$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{2}$，或 $\operatorname{tg}\theta=-3$。

对应有 $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{1}{3}$，或 $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=-2$；

$$\therefore\quad p=-\left[\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6},$$

$$q=\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

或 $$p=-(-3-2)=5,$$
$$q=(-3)(-2)=6.$$

【解法 2】 $\because\quad \theta+\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\pi}{4}$，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\left[\theta+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

而 $$\operatorname{tg}\left[\theta+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{1-\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$=\frac{-p}{1-q}=1,$$

即 $$q-p=1. \qquad (1)$$

又，已知两根之比为 3∶2，可设两根为 $3k$，$2k$，根据韦达定理得

$$\begin{cases} 3k+2k=-p, \\ 3k\cdot 2k=q. \end{cases}$$

因此 $\quad 6p^2=25q.$ （2）

解由(1)式、(2)式组成的方程组，得：

$$\begin{cases} p=5, \\ q=6; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} p=-\dfrac{5}{6}, \\ q=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

例5. θ为何值时，方程$4x^2-4x\mathrm{tg}\theta+2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\theta-3=0$有相等的实根？不相等的实根？虚根？

【解】 这方程的根的判别式为：

$$(4\mathrm{tg}\theta)^2-4\times 4(2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\theta-3)$$
$$=16[\mathrm{tg}^2\theta-2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\theta+(\sqrt{3})^2]$$
$$=16(\mathrm{tg}\theta-\sqrt{3})^2.$$

①若 $16(\mathrm{tg}\theta-\sqrt{3})^2=0$，$\mathrm{tg}\theta=\sqrt{3}$.

即 $\quad \theta=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$时，有相等的实根。

②若$16(\mathrm{tg}\theta-\sqrt{3})^2>0$，而 $\mathrm{tg}\theta$ 所有不等于$\sqrt{3}$的实数值都适合这个不等式，所以$\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{3}$的所有的实数值都能使方程有不相同的实根。

③若 $16(\mathrm{tg}\theta-\sqrt{3})^2<0$，但这个不等式的左边必为正或零，故这个不等式不能成立，即不论 θ 为任何实数值，方程都没有虚根。

答：当$\theta = k\pi + \frac{\pi}{3}$时，方程有相等的实根；当$\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{3}$时，方程有不相等的实根；不论$\theta$为任何值，方程都没有虚根。

例6．设$\sin\alpha$和$\sin\beta$是方程$x^2 - (\sqrt{2}\cos 20°)x + (\cos^2 20° - \frac{1}{2}) = 0$的两个根，其中$\alpha$和$\beta$都是锐角，求$\alpha$，$\beta$的度数。

【解法1】 由求根公式

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\cos 20° \pm \sqrt{2\cos^2 20° - 4\left(\cos^2 20° - \frac{1}{2}\right)}\right],$$

化简得

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 20° \pm \sin 20°)$$
$$= \sin 45° \cdot \cos 20° \pm \cos 45° \cdot \sin 20°$$
$$= \sin(45° \pm 20°).$$

由$\sin\alpha = \sin(45° + 20°) = \sin 65°$，$\sin\beta = \sin(45° - 20°) = \sin 25°$，而$\alpha$，$\beta$都是锐角，

$$\therefore \quad \alpha = 65°, \quad \beta = 25°.$$

（或$\sin\alpha$和$\sin\beta$的值互换，$\alpha = 25°$，$\beta = 65°$）

【解法2】 根据韦达定理得：

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{2} \cdot \cos 20°, & (1) \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos^2 20° - \frac{1}{2}. & (2) \end{cases}$$

$(1)^2 - 4 \times (2)$ 得

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2\cos^2 20°-4\left(\cos^2 20-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2(1-\cos^2 20°)=2\sin^2 20°.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{2}\sin 20°. \tag{3}$$

或

$$\sin\alpha-\sin\beta=-\sqrt{2}\sin 20°. \tag{4}$$

由(1)式、(3)式得：

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 20°+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 20°$$

$$=\sin 45°\cdot\cos 20°+\cos 45°\cdot\sin 20°$$

$$=\sin(45°+20°)=\sin 65°.$$

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 20°-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 20°=\sin(45°-20°)$$

$$=\sin 25°.$$

而α，β都是锐角，得$\alpha=65°$，$\beta=25°$。

从方程(1)、(4)得　$\alpha=25°$，　$\beta=65°$。

例7．已知方程 $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$ 的三个根是 $\triangle ABC$ 三个内角的正弦。

①求证它有一个根为 1；

②求 A、B、C 的度数及q值。

【解法 1】　以$x=1$代入原方程，得

$$1-(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-q)+q=0.$$

故 1 为方程的一个根。

将$(x-1)$除原方程左端得 $(x^2-\sqrt{2}x-q)$，因此，原方程可改写为：

$$(x-1)(x^2-\sqrt{2}x-q)=0,$$

不妨设 $\sin C=1$，则$C=90°$，

于是，$A+B=180°-90°=90°$。

$\sin A$，$\sin B$为$x^2-\sqrt{2}x-q=0$之两个根，根据韦达定理，得：

$$\begin{cases}\sin A+\sin B=\sqrt{2}, & (1)\\ \sin A\cdot\sin B=-q, & (2)\\ A+B=90°. & (3)\end{cases}$$

下面用三种方法解

1)利用三角函数和化积公式

由(1)式得 $$2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}=\sqrt{2},$$

即 $$2\sin 45°\cdot\cos\frac{A-B}{2}=\sqrt{2};$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A-B}{2}=1,\quad \frac{A-B}{2}=0,\quad A=B=45°.$$

代入(2)式得

$$q=-\frac{1}{2},$$

2) 将(3)式代入(1)式得

$$\sin A+\sin(90°-A)=\sqrt{2},$$

即 $$\sin A+\cos A=\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos A=1.$$

即 $$\cos 45°\cdot\sin A+\sin 45°\cdot\cos A=1.$$

$$\therefore\quad \cos(45°-A)=1,$$

$$\therefore\quad A=45°,\ B=45°.$$

代入(2)式得

$$q=-\frac{1}{2}.$$

3）由（1）式、（3）式得

$$\sin A+\cos A=\sqrt{2},$$

两边平方得 $\sin^2 A+2\sin A\cdot\cos A+\cos^2 A=2.$

$$\therefore\quad \sin 2A=1,\ A=45°,\ B=90°-45°=45°.$$

$$\therefore\quad \sin A=\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

代入（2）式得 $q=-\frac{1}{2}.$

【解法2】 设 $f(x)\equiv x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q,$

由 $f(1)=0$ $\therefore$ 1为原方程的一个根。

不妨设 $\sin C=1$ $\therefore C=90°$ $\triangle ABC$ 是直角△（图16—1）

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \sin B=\frac{b}{c}.$$

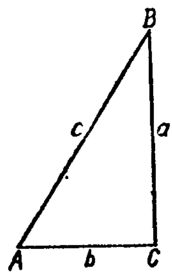


图16—1

根据方程根与系数的关系及勾股定理得

$$\begin{cases}\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+1=\sqrt{2}+1,\\[2mm] \dfrac{ab}{c^2}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\sqrt{2}-q,\\[2mm] a^2+b^2=c^2.\end{cases}$$

解得 $a=b$, $\therefore$ $A=B=45°$, $q=-\frac{1}{2}.$

例8. 直角梯形 $ABCD$（图16—2）中，二底为 $AD=a$, $BC=b$，高 $AB=h$，以 CD 为直径的圆与 AB 相切于 P，求证

PA，PB 是方程 $x^2-hx+ab=0$ 的根。

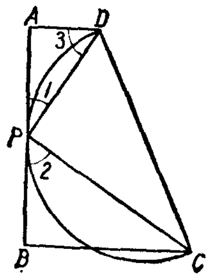


图16—2

【证】 连结 PC，PD，

$$\because \quad CD\text{是直径，}$$

$$\therefore \quad \angle CPD=90°。$$

$$\because \quad \angle 1+\angle 2=90°,\ \text{又，}\ \angle 1+\angle 3=90°,$$

$$\therefore \quad \angle 2=\angle 3。$$

于是直角$\triangle APD$∽直角$\triangle BCP$。

$$\therefore \quad \frac{PA}{BC}=\frac{AD}{PB}, \qquad \frac{PA}{b}=\frac{a}{pB}.$$

即
$$PA\cdot PB=a\cdot b。$$

又，显见 $PA+PB=h$。

根据韦达定理，PA，PB 是方程 $x^2-hx+ab=0$ 的根。

例9．若三角形的三个角成等差数列，则其中一定有一个角是$\frac{\pi}{3}$，若这样的三角形的三边又成等比数列，则三个角都是$\frac{\pi}{3}$，试证明之。

【证】 对于第一部分：

【证法 1】 因三个角成等差数列，可设三个角分别为 $\alpha-d$，α，$\alpha+d$（d 为公差）。

由 $(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=\pi$，得 $\alpha=\frac{\pi}{3}$。

【证法 2】 设三角形的三个角为 A，B，C，因三个角成等差数列，所以有 $B=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(\pi-B)$，故 $3B=\pi$，$B=\frac{\pi}{3}$。

对于第二部分：

【证法 1】 不妨设三个角为 A，B，C，对应边为 a,b,c，依题意知 $b^2=ac$。

$$\because \quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}，\text{而 } B=\frac{\pi}{3}；$$

即
$$\frac{1}{2}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}.$$

化简得 $a^2+c^2-2ac=0$。

即
$$(a-c)^2=0, \quad \therefore a=c.$$

又
$$\because B=\frac{\pi}{3}, \quad \therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形.}$$

$\therefore$ 三个角都是 $\frac{\pi}{3}$。

【证法 2】 设三角形的三个角为 $\frac{\pi}{3}-d$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}+d$，对应边为 a，b，c，

依题意知 $b^2=ac$，

$$\therefore \quad \left(2R\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\cdot 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right).$$

即 $$\sin^2\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right).$$

利用积化和差公式得

$$\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos2d\right),$$

$$\cos 2d=0.$$

∴ $d=0$，即三个角都是$\frac{\pi}{3}$。

【证法 3】 设三边为a，b，c，公比为r，

由余弦定理得 $$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

以$B=\frac{\pi}{3}$，$b=ar$，$c=ar^2$ 代入得

$$\frac{1}{2}=\frac{a^2+(ar^2)^2-(ar)^2}{2a(ar^2)}=\frac{1+r^4-r^2}{2r^2},$$

即 $$r^4-2r^2+1=0,\ (r^2-1)^2=0.$$

∴ $r^2=1$，$r=1$。($r=-1$舍去)

因此，公比$r=1$，故三边相等。

即三角形的三个角 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$。

【证法 4】 设三个角为$\alpha-d$，α，$\alpha+d$。

对应的三边为

$$a,\ ar,\ ar^2,$$

由正弦定理 $$\frac{a}{\sin(\alpha-d)}=\frac{ar}{\sin\alpha}=\frac{ar^2}{\sin(\alpha+d)},$$

可得 $$\frac{\sin(\alpha-d)}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+d)}.$$

$$\sin(\alpha+d)\cdot\sin(\alpha-d)=\sin^2\alpha.$$