21世纪高等学校本科数学规划教材

线性代数

Linear Algebra

東北大學出版社
Northeastern University Press

线性代数

Linear Algebra

21世纪高等学校本科数学规划教材

线 性 代 数

Linear Algebra

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 /惠淑荣，张京，李修清 主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8
（21 世纪高等学校本科数学规划教材）

ISBN 7-81102-287-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①惠… ②张… ③李… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 096709 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市第六印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

幅面尺寸：184mm×260mm

印 张：8.5

字 数：224 千字

出版时间：2006 年 8 月第 1 版

印刷时间：2006 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：孟 颖 刘宗玉 责任校对：张淑萍

封面设计：唐敏智 责任出版：秦 力

定 价：15.00 元

前　言

进入21世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步．目前，科学技术日新月异，随着计算机的广泛应用及数学软件的普及，世界已全面进入信息时代，这些无疑对基础课教材，特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求．正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这本适于本科生各专业使用的线性代数教材．

本书依据教育部制订的"线性代数课程教学基本要求"编写而成，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了线性代数课程教学时数减少的趋势．本书具有以下特色：

第一，突出线性代数的基本思想和基本方法．突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握线性代数的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会线性代数的本质和线性代数的价值．

第二，加强基本能力培养．本书的例题、习题较多，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

第三，贴近实际应用．本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出．例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习线性代数的兴趣和利用线性代数知识解决实际问题的能力．

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用星号"*"标出，供相关专业选择．

本书共有7章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形线性空间与线性变换等内容．各章后面均配有习题，书后附有习题参考答案．

本书是多所院校合作的结晶，参加院校有（以校名首字笔画为序）：东北大学、东华理工学院长江学院、长江大学工程技术学院、北京化工大学北方学院、沈阳农业大学、重庆工商大学派斯学院、信阳农业高等专科学校、桂林电子科技大学信息科技学院、桂林航天工业高等专科学校、莱阳农学院、湖北民族学院．

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教．

作　者

2006年2月

目　　录

第一章　行列式

解方程是代数中的基本问题．在中学代数中，主要求解一元一次方程、二元一次和三元一次方程组．在线性代数中，主要讨论一般的多元一次方程组，即线性方程组．本章引进行列式求解线性方程组，余下若干章，则引进矩阵和向量讨论线性方程组的解．

线性方程组在线性代数中是最基本的也是最重要的内容．

第一节　n 阶行列式概念

行列式概念起源于线性方程组的求解．在实际中，很多问题可以归结为求解一个线性方程组．

一、二阶与三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

用消元法，分别以 a_{22}和 a_{12}乘式(1.1)的两个方程的两端，相减得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

再用 a_{21}和 a_{11}乘式(1.1)的两个方程的两端，相减得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

易知，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，式(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

观察式(1.2)得知，分子和分母都是由 4 个数分两对相乘再相减而得．为此，可引进二阶行列式定义．

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

所确定的**二阶行列式．**二阶行列式表示一个数值，数 $a_{ij}(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$称为行列式(1.3)的元素，第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表示该元素位于第 j 列．

二阶行列式的运算，可用对角线法则表示：位于行列式的主对角线(从左上角到右下角的实连线)上两个元 a_{11}，a_{22}的乘积，减去位于副对角线(从右上角到左下角的虚连线)上两个元 a_{12}，a_{21}的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

利用二阶行列式定义，式(1.2)可写为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}. \tag{1.5}$$

其中行列式 D 是由方程组(1.1)的系数构成的，称之为式(1.1)的系数行列式，而 $D_i(i=1,2)$是 D 的第 i 列由式(1.1)的右端常数项替换而得．另外，由于二阶行列式定义的引入，使得式(1.1)的解的表达式(1.2)变为更加容易记忆的式(1.5)．

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+\ \ x_2=1. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21.$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

类似地，可由三元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

引进三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21},$$

且有结论：当式(1.6)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，它有唯一解

$$x_i=\frac{D_i}{D}\quad(i=1,\ 2,\ 3),$$

其中 D_i 是 D 的第 i 列由式(1.6)的右端常数项替换而得．

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　$D=1\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times2\times3-1\times1\times1-2\times2\times2=-11.$

例 1.3　解方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+\ x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-\ x_2+\ x_3=-1.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-10-1-12+5+6+4=-8\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6.$$

所以方程组的解为

$$x_1=-\frac{11}{8},\quad x_2=-\frac{9}{8},\quad x_3=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

从以上讨论，自然产生一个问题：对四元及以上的线性方程组而言，是否有类似的行列式定义及求解规则．答案是肯定的．

二、*n* 阶行列式定义

在给出 n 阶行列式定义之前，先观察一下二阶和三阶行列式定义

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\tag{1.8}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.\tag{1.9}$$

从中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的，并且行列式的值恰由所有这种可能的乘积组成．另外，每一项乘积前，都有一个符号．那么，正负号是由什么决定的呢？在三阶行列式(1.9)中，一般项可写为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个全排列．

由数字 1，2，…，n 组成的有序数组称为一个 **n 级全排列．**

例如，2431 是一个四级排列，45312 是一个五级排列．那么用 1，2，3 可以组成全排列的总数是多少呢？显然，第一次可有 3 种选法，第二次可有 2 种选法，第三次只有 1 种选法，所

以共有 $3\times2\times1=3!=6$ 种排法．这恰与三阶行列式的乘积项的个数相同，而由 1，2 可以组成全排列的总数 $=2\times1=2!=2$，也与二阶行列式乘积项数相同．

类似地，由 1，2，…，n 组成的全排列总数 $=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$．

显然 $12\cdots n$ 也是一个排列，这个排列具有自然顺序，称之为标准排列，其他排列或多或少地破坏了这个顺序．在一个排列中，如果一对数的前后次序与标准次序不同，就称其有一个逆序．一个排列中所有逆序的总数叫作这个排列的逆序数．例如，考虑排列 32514 中的 1，排在 1 前面且比 1 大的元素有 3 个，则说 1 的逆序数是 3，同理 2 的逆序数是 1，4 的逆序数为 1，3 与 5 的逆序数为 0，于是排列 32514 的逆序数为 $3+1+1=5$．逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列．

式(1.8)中各项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，其中 j_1j_2 为 1，2 的全排列，共有 2 项，一项为 12，另一项为 21，前者逆序数为 0，是偶排列；后者逆序数为 1，是奇排列．

式(1.9)中各项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 为 1，2，3 的全排列，共有 $3!=6$ 项．带正号的排列是：123，312，231；带负号的排列是：321，132，213．经计算得知，前三个排列的逆序数为 0，2，2，为偶排列；后三个排列的逆序数为 3，1，1，为奇排列．因此，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，t 为列标排列的逆序数．仿此，可以把二阶、三阶行列式定义推广到 n 阶行列式情形．

定义 1.1 设有 n^2 个元素所构成的含有 n 行 n 列的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示一个数值，记作 D．有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum$ 是对所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的形式求和；t 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数；n 为行列式的阶数．n 阶行列式共有 $n!$ 项．

有时将 n 阶行列式记为 $\det(a_{ij})$．当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$．

第二节 n 阶行列式的计算

本节介绍三类计算 n 阶行列式的方法．

一、定义法

例 1.4 求行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

第一行 $a_{1i}=0(i\neq 1)$，故 $j_1=1$；$j_2\neq 1$，而第二行中，$a_{2i}=0(i\neq 2)$，故 $j_2=2$. 类似有 $j_n=n$. 排列 $j_1j_2\cdots j_n=12\cdots n$ 的逆序数为 0，因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.5　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}.$$

解　由定义 $j_1=n$，$j_2=n-1$，…，$j_n=1$，而排列 $j_1j_2\cdots j_n=n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$，因此该行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1.6　计算上三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由定义 j_n 只能取 n，所以 $j_n=n$. j_{n-1} 可取 n 或 $n-1$，但 $j_n\neq j_{n-1}$，所以 $j_{n-1}=n-1$. 同理 $j_2=1$，$j_1=1$. 因此 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(逆序数为 0).

例 1.7　计算下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　由定义，$j_1=1$，j_2 可取 1 或 2，但 $j_2\neq j_1$，所以 $j_2=2$. 同理 $j_n=n$. 因此 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(逆序数$=0$).

显然用定义计算 n 阶行列式比较麻烦.

二、利用性质计算 n 阶行列式

定理 1.1　一个排列中任意两个元素对换，排列奇偶性改变.

可以用一个具体的例子来说明这个定理.例如，排列 2347165，将 4 与 7 对换(称之为相邻对换)得排列 2374165，原逆序数为 $0+0+0+0+4+1+2=7$，对换后逆序数为 $0+0+0+1+4+1+2=8$，奇排列变为偶排列. 如将 4 与 6 对换得 2367145. 实际上后者是经过一系列相邻对换

$$2347165 \to 2374165 \to 2371465 \to 2371645 \to 2376145 \to 2367145$$

而得到的，共经过了 $5=2\times a+1$ 次相邻对换(其中 a 为 4 与 6 之间元素的个数). 每一次相邻对换，奇偶性都要改变，奇数次相邻对换后，奇偶性必改变.

由定理 1.1，可以得到行列式的另一个定义.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $1\cdots p\cdots q\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 对换元素 a_{pj_p} 与 a_{qj_q} 成

$$(-1)^t a_{1j_1}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{nj_n},$$

这一项的值不变，而行标和列标排列均发生了变化. 原行标排列为 $1\cdots p\cdots q\cdots n$，逆序数为 0，原列标排列为 $j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n$，逆序数为 t；新行标排列为 $1\cdots q\cdots p\cdots n$，逆序数为 r（由定理 1.1，r 为奇数)，新列标排列为 $j_1\cdots j_q\cdots j_p\cdots j_n$，逆序数为 t_1. 由定理 1.1 有

$$(-1)^t=-(-1)^{t_1}=(-1)^r(-1)^{t_1}=(-1)^{r+t_1}=(-1)^{t+0}.$$

于是，对换两个元素后，行列标逆序数之和的奇偶性并不改变. 经过多次对换也是如此. 因此，经过有限次对换后，使

$$(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

此时列标为标准排列，s 为行排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数. 因此，行列式的定义也可写为

$$D=\sum(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

由此可得 n 阶行列式的性质.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

D^{T} 称为 D 的转置行列式.

证 记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

按定义有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum(-1)^t a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n},$$

由行列式另一定义有 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.2 互换行列式的任意两行(两列)，行列式变号.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

由定义

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} = \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设 t_1 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，所以 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$. 故

$$D_1 = \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} = -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} = -D.$$

性质 1.3　把行列式中某一行(列)的所有元素都乘以一个数 k，等于用数 k 乘以行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.4　行列式中的某一行(列)元素全是 0，则行列式的值为 0.

性质 1.5　如果行列式的某行(列)的各元素是两个元素之和，那么这个行列式等于两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.6 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.3～1.6 均可由定义得到. 在一般情况下，利用这些性质计算 n 阶行列式，比直接利用定义计算简便得多.

行列式的三种变换记为 $r_i \leftrightarrow r_j$(第 i 行与第 j 行对调)，kr_i(第 i 行乘以 k)，$r_i + kr_j$(第 j 行乘以 k 加到第 i 行)，或列变换 $c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，$c_i + kc_j$. 利用这些运算，可把行列式化为下三角行列式(上三角行列式)，从而得到行列式的值.

例 1.8 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[-3r_1+r_4]{\substack{5r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{5}r_3} -5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} 5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-8r_2+r_4]{12r_2+r_3} 5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{3r_3+r_4} -5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 40.$$

例 1.9 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{\frac{1}{6}r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 1.10　计算

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&2a&3a+2b&4a+3b+2c\\0&3a&6a+3b&10a+6b+3c\end{vmatrix}\xlongequal[-3r_2+r_4]{-2r_2+r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&3a&7a+3b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-3r_3+r_4}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

例 1.11　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&n\end{vmatrix}.\text{(未写出的元素都是 0)}$$

解

$$D_n\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1-\frac{c_j}{j}}\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j}&1&\cdots&1\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{vmatrix}=2\times3\times\cdots\times n\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)$$

$$=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

该行列式称为箭形行列式(只有第一行，第一列，主对角线上元素可能不为 0，其余元素都是 0)，有一些行列式可以化为箭形行列式.

例 1.12　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix} \quad (x_i\neq a_i,\ i=1,\ \cdots,\ n),$$

解

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1-x_1 & 0 & & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j} \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{x_k-a_k} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k-a_k}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

三、行列式按行(列)展开法

一般来讲，计算高阶行列式总要比计算低阶行列式难些．数学上常采用降阶方法来处理高阶问题．而行列式展开法正是运用这个原理．由三阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{32}a_{21}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{33}a_{21}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=-a_{12}(a_{33}a_{21}-a_{31}a_{23})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}).$$

观察上面两个式子知，前者是第一行元素分别乘以另一个数后作代数和而成，后者是第二列元素分别乘以另一个数后作代数和而成．那么，括号内的数值与它前面的元素有什么关系呢？如何得到正负号呢？

括号内的数值刚好是一个二阶行列式，与之前面的元素的关系是去掉前面元素所在行和列后形成的二阶行列式(不改变余下元素的位置关系)，而正负号是由括号前元素的行标、列