新课程 新考纲

2007

GAOKAO BEIKAO ZHINAN

高考备考指南

数学（文科）

系统复习用书

广州市教育局教研室 编

华南理工大学出版社

前 言

新一轮高考改革的重点是考试内容的改革，这是我们在复习备考中应该首先关注的。因此，学生复习资料的编写和使用，就成为备考复习的重要环节之一。

本书的前身是《高考备考丛书》，初版于1994年，是根据当时广州市有关领导的指示，为提高广州地区学生系统复习备考的效率，由广州市教育局教研室组织广州市一百多名特级教师和骨干高级教师编写的。1997年更名为《高考备考指南》，由华南理工大学出版社出版。出版以来，为适应新的情况，吸收新的经验，每年更新内容，修订改版。多年打造，广受欢迎，成为广州市连续十多年使用的高考备考主流资料。

"应试"和"素质"并不是完全对立的矛盾。目前高三教学还存在诸多弊端，正需要我们通过教学研究和教学改革去克服和解决。广州市从上个世纪80年代开始组建了全市性的高考备考研究队伍，依循现代教学理念，着眼于学生，着眼于效率，探索和研究高考备考的教学规律。通过探索和努力，积累和形成了丰富的具有广州特色的高考备考经验体系，凭着这些凝聚了广州市20多年来一批又一批优秀高三教师心血结晶的经验，广州的高考已经连续多年在全省显现出高位稳定。《高考备考指南》，就是广州多年高考备考研究的成果之一，它全面体现了广州备考理念和备考经验。

《高考备考指南》是为广东学生参加广东高考而编写的，所以，一方面，在内容上紧靠广东高考的考试大纲，力求让师生明确考试大纲规定考点的要求，明确考点对应的课本内容，明确考点对应的试题题目，成为当年考试大纲的"解读"。另一方面，在体例上充分考虑了我省学生的学习基础、学习习惯和心理特点，力求精练，强调实用。所以，重视基础，舍弃繁难，反对题海，针对性强，简明扼要，让学生以最少的时间获得最好的复习效果，是本书编写思路的鲜明特点。

由于高考改革的逐年深入，本丛书出版以来，每年都根据高考命题趋势，对内容范围和难度要求进行修改、补充和调整。为适应我省"3+X"高考改革，2000年的第四版，新增了生物和地理，2001年又增加了《文理综合》，科目增加到十科。2007年将是新课程实施后的首次高考，根据2007年新高考方案的变化，《高考备考指南》(第十版)由全市十多所名校一百多名教学骨干，根据新课程高考要求重新编写，全书的结构、内容、题例和练习都全新改版，以求尽力体现目前能广泛收集到的我省2007年高考考试信息。

《高考备考指南》(第十版)包括语文、数学(分文科数学和理科数学)、英语、文科基础/理科基础、政治、历史、地理、物理、化学、生物10个学科，每个学科分为《系统复习用书》和《专题训练用书》。《系统复习用书》包括学科各必修模块和列进考试范围的选修模块的基础知识的系统梳理和题型示例，既保留了新教材的改革亮点，又根据新考纲初稿的要求，加强了知识的系统性，每单元(或章节)附有供学生思考与训练的题目(数学另有配套的《习题解答》)。《专题训练用书》提供与系统复习配套使用的单元(或专题)训练和综合训练，可以按照需要随堂测试或课外使用。

《高考备考指南》丛书编写委员会由广州市教育局教研室组建。第十版由麦曦、黄宪任主编，张经纬任副主编。华南理工大学出版社大力协助并促成本丛书出版，在此谨表谢意。

编 者

2006年6月于广州

说　明

《高考备考指南·数学（文科）》包括系统复习用书、专题训练用书和习题解答共三册书，三册书相互配套，构成了一个特别适合数学高考复习特点的内容体系。

其中，系统复习用书包含了高中数学课程标准中必修课程和选修系列1的全部内容。在充分考虑高中数学课程标准各种不同版本的实验教科书的基础上，根据2007年新课程标准高考数学考试大纲和历年来高考数学命题的特点，系统复习用书将高中数学课程标准中的必修内容和选修内容进行了有机的整合，使得知识之间的内在联系更加紧凑、连贯。为方便使用，系统复习用书按课时编写，而且将每课时的配套练习分为基础训练和综合提高两个部分。系统复习用书可供考生作为数学高考第一轮复习使用。

专题训练用书配合系统复习用书，为每章提供了一套测试卷，既可作为班级单元测试用，也可作为考生自行检测用。

习题解答一书给出了系统复习用书中全部习题的详尽解答，以方便考生解题时及时查对答案，比较解法的优劣。

《高考备考指南·数学（文科）》由广州市教育局教研室高中数学教研员谭国华、陈镇民担任主编。参加编写的人员分别是：许建中（第一章、第八章），杨仁宽（第二章），伍晓焰（第三章），罗华（第四章），陈镇民、谭国华（第五章），周伟锋（第六章），曾辛金（第七章），翁之英（第九章），肖凌戆（第十章），肖勇钢（第十一章），彭雨茂（第十二章），赵霞（第十三章），严运华（第十四章），谭曙光（第十五章）。所有参加编写的人员均为广州市重点中学的数学骨干教师，他们有着丰富的数学高考复习的实践经验，同时又都是高中数学课程标准实验的亲身参与者。

为了保证书稿的质量，《高考备考指南·数学（文科）》还邀请了一批无论在数学专业上、还是在课堂教学上都具有较高造诣的广州市高中数学青年教师参与审校工作。他们是：康元胜（第一章、第十五章），刘德远、郑勇（第二章），温效良、沈秋怡（第三章），宋洁云、何倩明（第四章），陈镇民、邓军民（第五章），刘殷、吴慧华（第六章），赖青松、董晓忠（第七章），罗晓斌（第八章、第十一章），李菊（第九章），闵长江（第十章），邹传庆、张蜀青、徐全德（第十二章、第十四章），庞新军（第十三章）。

感谢华南理工大学出版社的编辑和校对人员，正是由于他们的帮助，才使本书得以顺利出版。

尽管参与本书编写、编辑和校对的人员均抱着非常严肃认真的态度从事着本书的编写与出版工作，但由于水平有限，或偶有疏忽，本书必定还存在一些不足之处，恳请广大教师和学生提出批评、建议，以便再版时修订。

编　者

2006年6月

目　　录

（共 101 课时）

第一章　集合与常用逻辑用语

集合是数学中不可缺少的基本语言和基本工具. 常用逻辑用语介绍了数理逻辑中的一些基本内容. 数理逻辑是采用数学的方法研究思维形式及规律的学科. 本章内容几乎历届高考中都会考到，多以选择题的形式考查，主要是容易题型.

2007 年新课程标准数学科高考考试大纲对本章的考查要求为：

1. 集合的含义与表示

(1) 了解集合的含义、元素与集合的"属于"关系.

(2) 能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

2. 集合间的基本关系

(1) 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.

(3) 在具体情境中，了解全集与空集的含义.

3. 集合的基本运算

(1) 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集.

(2) 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

(3) 能使用韦恩图(Venn)表达集合的关系及运算.

4. 命题及其关系

(1) 了解命题及其逆命题、否命题与逆否命题.

(2) 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系.

5. 简单的逻辑联结词

了解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.

6. 全称量词与存在量词

(1) 理解全称量词与存在量词的意义.

(2) 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

本章内容在以下五种版本的普通高中数学课程标准实验教材中的相应位置是：

人教 A 版数学(必修 1)第 1 ~ 50 页，数学(选修 1 - 1)第 1 ~ 34 页；人教 B 版数学(必修 1)第 1 ~ 28 页，数学(选修 1 - 1)第 1 ~ 34 页；北师大版数学(必修 1)第 1 ~ 22 页；江苏教育版数学(必修 1)第 1 ~ 17 页；湖北教育版数学(必修 1)第 6 ~ 23 页.

1.1　集　合(1 课时)

一、内容提要

通过对不同版本数学实验教材的归纳总结，本节的主要内容有：

1. 集合的基本概念

指定的某些对象的全体称为一个集合. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素. a 是集合 A 的元素表示成 $a\in A$, a 不是集合 A 的元素表示成 $a\notin A$.

(1) 集合的性质: 对于一个给定的集合, 其元素具有确定性、互异性、无序性.

(2) 集合的表示: 集合的表示方法有列举法、描述法以及图示法.

(3) 常见的数集有: **N**(自然数集)、$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$(正整数集)、**Z**(整数集)、**Q**(有理数集)、**R**(实数集)、**C**(复数集).

2. 集合与集合的关系

(1) ①$A\subseteq B$ 定义为: 任一 $a\in A$, 都有 $a\in B$;②$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(2) $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(3) $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(4) $\complement_U A=\{x\mid x\notin A$ 且 $x\in U\}$(其中 U 为全集).

3. 集合的交、并、补的性质

(1) $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$, $A\cap U=A$, $A\cup U=U$, $A\cup(\complement_U A)=U$, $\complement_U(\complement_U A)=A$(其中$\varnothing$为空集).

(2) $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$.

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(4) 若 $A\subseteq B$, 则 $A\cap B=A$, $A\cup B=B$.

(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(6) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B), \complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

4. 集合的运用

把集合作为工具在其他数学问题中的应用, 即集合语言与集合思想的运用(如函数的定义域、值域, 方程及不等式的解集, 立体几何、解析几何中的问题等).

二、例题分析

本节的主要题型都是围绕集合的基本概念以及交、并、补等运算展开的, 包括正确使用集合的有关符号、集合的不同表示、集合的有关运算及性质等.

例 1 下列命题中正确的是(　　).

(A) $\sqrt{2}\subseteq\{x\mid 1<x<2\}$　　(B) $\{\sqrt{2}\}\in\{x\mid 1<x<2\}$

(C) $\{\sqrt{2}\}\subsetneqq\{x\mid 1<x<2\}$　　(D) $\{\sqrt{2}\}\not\subseteq\{x\mid 1<x<2\}$

解 因为元素与集合的关系只能用符号"$\in$"、"$\notin$"表示, 故(A)不正确. 集合与集合之间的关系不能用"$\in$"表示, 故(B)不正确. 符号"$\not\subseteq$"表示"不包含于", "$\subsetneqq$"表示"真包含于", 由于$\{\sqrt{2}\}$是$\{x\mid 1<x<2\}$的真子集, 因此本题应选(C).

说明 注意区别元素与集合的隶属关系和集合与集合之间的包含关系, 正确使用符号$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$等.

例 2 如图 1-1 中阴影部分可表示为(　　).

(A) $\complement_U(A\cap B)$　　(B) $\complement_U(A\cup B)$

(C) $\complement_U(A\cup B)\cup(A\cap B)$　　(D) $(A\cup B)\cap\complement_U(A\cap B)$

解　阴影部分是 $A\cup B$ 之中非 $A\cap B$，即 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 的补集的交集，故 $(A\cup B)\cap \complement_U(A\cap B)$ 为阴影部分的表示形式. 因此本题应选(D).

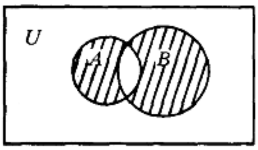


图 1-1

说明　利用 Venn 图研究集合间的关系比较直观明了，充分利用"数形结合"的数学思想思考问题和解决问题.

例 3　已知集合 $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$，若 $A\cap B=\{2, 5\}$，求实数 a 的值，并求 $A\cup B$.

解　因 $A\cap B=\{2, 5\}$，故 $5\in A$，即 $A=\{2, 4, 5\}$.

由已知可得 $a^3-2a^2-a+7=5$，故 $a^3-2a^2-a+2=0$，即 $(a^2-1)(a-2)=0$，解得 $a=2$ 或 $a=\pm 1$.

①当 $a=2$ 时，$B=\{-4, 5, 2, 25\}$，故 $A\cap B=\{2, 5\}$，与题设相符；

②当 $a=-1$ 时，$B=\{-4, 2, 5, 4\}$，故 $A\cap B=\{2, 4, 5\}$，与题设矛盾；

③当 $a=1$ 时，$B=\{-4, 4, 1, 12\}$，故 $A\cap B=\{4\}$，与题设矛盾.

综上所述，当 $a=2$ 时，满足题设. 此时，

$$A\cup B=\{2, 4, 5\}\cup\{-4, 5, 2, 25\}=\{-4, 2, 4, 5, 25\}.$$

说明　本题易出现由 $5\in A$ 求得 $a=\pm 1$ 或 $a=2$，而不对 $A\cap B=\{2, 5\}$ 这个条件进行验算的错误. 此题是集合在一定约束条件下求参数的问题，涉及集合的运算，充分体现了分类讨论的数学思想.

例 4　已知集合 $A=\{x|x^2-6x+8<0\}$，$B=\{x|(x-a)(x-3a)<0\}$.

(1) 若 $A\subsetneqq B$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(3) 若 $A\cap B=\{x|3<x<4\}$，求 a 的取值范围.

解　(1) $A=\{x|2<x<4\}$，

①当 $a>0$ 时，$B=\{x|a<x<3a\}$，因 $A\subsetneqq B$，故 $\begin{cases}a\leqslant 2\\3a\geqslant 4\end{cases}$，即 $\dfrac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$；

②当 $a<0$ 时，$B=\{x|3a<x<a\}$，因 $A\subsetneqq B$，故 $\begin{cases}3a\leqslant 2\\a\geqslant 4\end{cases}$，$a$ 无解；

③当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，$A\subsetneqq B$ 不成立.

综上所述，若 $A\subsetneqq B$，则 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{4}{3}, 2\right]$.

(2) ①当 $a>0$ 时，$B=\{x|a<x<3a\}$，因 $A\cap B=\varnothing$，故 $a\geqslant 4$ 或 $3a\leqslant 2$，即 $0<a\leqslant\dfrac{2}{3}$ 或 $a\geqslant 4$；

②当 $a<0$ 时，$B=\{x|3a<x<a\}$，因 $A\cap B=\varnothing$，故 $3a\geqslant 4$ 或 $a\leqslant 2$，即 $a<0$；

③当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，显然满足 $A\cap B=\varnothing$.

综上所述，若 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right]\cup[4, +\infty)$.

(3) $A=\{x|2<x<4\}$，若 $A\cap B=\{x|3<x<4\}$，则

①当 $a>0$ 时，$B=\{x|a<x<3a\}$，必有 $a=3$，此时 $B=\{x|3<x<9\}$；

②当 $a\leqslant 0$ 时，均不满足条件.

故所求 a 的取值为3.

说明　本题为集合在一定条件下求参数问题，涉及集合的运算，其转化途径常通过两个方面：一是分析、简化每个集合；二是利用集合之间的关系. 本题充分体现了分类讨论的数学思想，分类的关键是比较 a 与 $3a$ 的大小.

三、基础训练

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,5\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=($　　$)$.

(A) $\{2\}$　　(B) $\{2,3\}$　　(C) $\{3\}$　　(D) $\{1,3\}$

2. 已知 $A=\{x\,|\,|2x+1|>3\}$，$B=\{x\,|\,x^2+x-6\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

(A) $(-3,-2]\cup(1,+\infty)$　　(B) $(-3,-2]\cup[1,2)$

(C) $[-3,-2)\cup(1,2]$　　(D) $(-\infty,-3]\cup(1,2]$

3. 设 A，B，U 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq U$，则下列各式中错误的是(　　).

(A) $(\complement_U A)\cup B=U$　　(B) $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=U$

(C) $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$　　(D) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U B$

4. 如图1-2所示，U 为全集，M，P，S 是 U 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　).

(A) $(M\cap P)\cap S$　　(B) $(M\cap P)\cup S$

(C) $(M\cap P)\cap(\complement_U S)$　　(D) $(M\cap P)\cup(\complement_U S)$

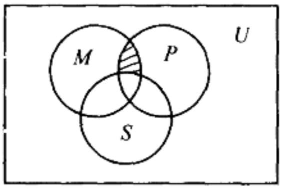


图1-2

5. 若全集 $U=\mathbf{R}$，$f(x)$，$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x\,|\,f(x)<0\}$，$Q=\{x\,|\,g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P，Q 表示为______.

6. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$______.

7. 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

8. (1) 若 $A=\{x\,|\,x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$，$A\cup B=B$，求 p，q 满足的条件；

(2) 已知 $A=\{x\,|\,x^2+(2+p)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$，求 p 的取值范围.

四、综合提高

9. 已知集合 $M=\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\,|\,y=x+b\}$，且 $M\cap N=\varnothing$，则 b 应满足的条件是(　　).

(A) $|b|\geqslant 3\sqrt{2}$　　(B) $0<b<\sqrt{2}$

(C) $-3\leqslant b\leqslant 3\sqrt{2}$　　(D) $b<-3$ 或 $b>3\sqrt{2}$

10. 已知 $A=\{x\,|\,y=\lg(4x^2-4)\}$，$B=\{y\,|\,y=2x^2-3\}$，则 $A\cap B=$______.

11. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,\pi]\right\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=kx+k+1\}$，若

$A\cap B$含有两个元素，则 $k\in$________.

12. 某校有 21 个学生参加了数学小组，17 个学生参加了物理小组，10 个学生参加了历史小组；他们之中同时参加数学、物理小组的有 12 人，同时参加数学、历史小组的有 6 人，同时参加物理、历史小组的有 5 人，同时参加 3 个小组的有 2 人. 现在这 3 个小组的学生都要去郊游，问需要预订多少个座位？

13. 已知关于 x 的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 M.

(1) 当 $a=4$ 时，求集合 M；　(2) 若 $3\in M$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

14. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$ 和 $B=\{(x,y)\mid x-y+1=0, 0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

1.2　充分条件与必要条件(1 课时)

一、内容提要

通过对不同版本数学实验教材的归纳总结，本节的主要内容有：

1. 命题的概念

(1) 命题：用语言、符号或式子表达的可以判断真假的陈述句.

(2) 真命题：判断为真的语句.

(3) 假命题：判断为假的语句.

2. 四种命题的形式

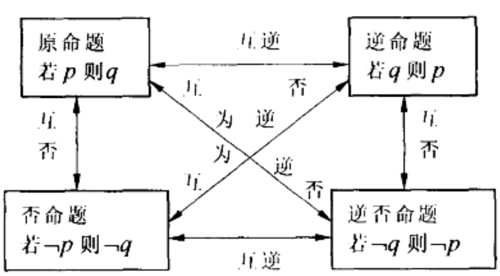
原命题：若 p，则 q.（p 为命题的条件，q 为命题的结论）

逆命题：若 q，则 p.（即交换原命题的条件和结论）

否命题：若$\neg p$，则$\neg q$.（即同时否定原命题的条件和结论）

逆否命题：若$\neg q$，则$\neg p$.（即交换原命题的条件、结论之后同时否定它们）

3. 四种命题的关系



(1) 互逆、互否命题之间无法判断其真假.

(2) 互为逆否命题同真同假.

4. 用推出符号“$\Rightarrow$”概括充分、必要、充要条件

(1) 若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分且不必要条件.

(2) 若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要且不充分条件.

(3) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.

(4) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $\neg p \Rightarrow \neg q$，则 p 是 q 的充要条件.（此时 q 也是 p 的充要条件）

5. 用集合的观点概括充分必要条件

若集合 $A=\{x \mid x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x \mid x$ 满足条件 $q\}$，则有：

(1) 若 $A \subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $A \subsetneq B$，则 p 是 q 的充分且不必要条件.

(2) 若 $B \subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件；若 $B \subsetneq A$，则 p 是 q 的必要且不充分条件.

(3) 若 $A=B$(即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$)，则 p 是 q 的充要条件.

6. 用反证法证明命题的一般步骤

(1) 假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立.

(2) 从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾.

(3) 由矛盾判定假设不成立，从而肯定命题结论成立.

反证法出现什么样的矛盾，事先无法预料，因此用反证法时应注意推理的结论是否与题设、定义、公理、定理、公式、法则等矛盾，甚至自相矛盾等.

二、例题分析

本节的主要题型都是围绕命题的真假判定，四种命题的表述，充分条件、必要条件、充要条件判定及证明.

例1　若 $m \leq 0$ 或 $n \leq 0$，则 $m+n \leq 0$. 写出其逆命题、否命题、逆否命题，同时分别指出它们的真假.

解　逆命题：若 $m+n \leq 0$，则 $m \leq 0$ 或 $n \leq 0$，逆命题为真.

否命题：若 $m>0$ 且 $n>0$，则 $m+n>0$，否命题为真(逆命题与否命题是等价命题).

逆否命题：若 $m+n>0$，则 $m>0$ 且 $n>0$，逆否命题为假(逆否命题与原命题是等价命题).

说明　四种命题反映出命题之间的内在联系，注意结合实际问题，理解其关系的产生过程并注意“且”与“或”的转换. 掌握四种命题间的关系是学习充要条件的基础.

例2　如果 $a, b, c \in \mathbf{R}$，那么“$b^2>4ac$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根”的(　　).

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

解　方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根，必有判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，即 $b^2>4ac$. 但 $b^2>4ac$ 时，a 可能取 0，而此时方程为一元一次方程，不可能有两个不等实根. 因此，“$b^2>4ac$”是“方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根”的必要非充分条件. 故选(B).

例3　命题“$2x^2-5x-3<0$”的一个必要不充分条件是(　　).

(A) $-\frac{1}{2}<x<3$　　(B) $-\frac{1}{2}<x<4$

(C) $-3<x<\frac{1}{2}$　　(D) $1<x<3$

解　因为 $2x^2-5x-3<0$ 的解集是 $-\frac{1}{2}<x<3$，所以当 $-\frac{1}{2}<x<3$ 时，$2x^2-5x-3<0$

恒成立. 所以，$-\frac{1}{2}<x<3$ 是 $2x^2-5x-3<0$ 的充要条件，而 $1<x<3$ 是 $2x^2-5x-3<0$ 的充分非必要条件，$-\frac{1}{2}<x<4$ 是 $2x^2-5x-3<0$ 的必要非充分条件，而 $-3<x<\frac{1}{2}$ 是 $2x^2-5x-3<0$ 的既不充分也不必要条件. 故应选(B).

说明　由于“充分条件与必要条件”是四种命题的关系的深化，它们之间存在着密切的联系，故在判断命题的条件的充要性时，注意利用集合观点，也可以考虑“正难则反”的原则，即在正面判断较难时，可以转化为应用该命题的逆否命题进行判断.

一个结论成立的充分条件可以不止一个，必要条件也可以不止一个.

例4　已知 p：$|x+1|>2$ 和 q：$\frac{1}{x^2+3x-4}>0$，试问 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件？

解　方法1　由 p：$|x+1|>2$ 得 $x<-3$ 或 $x>1$，故 $\neg p$：$-3\leqslant x\leqslant 1$.

由 q：$\frac{1}{x^2+3x-4}>0$ 得 $x<-4$ 或 $x>1$，故 $\neg q$：$-4\leqslant x\leqslant 1$.

因 $[-3, 1]\subsetneqq[-4, 1]$，故 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

方法2　要判断 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件，只需判定 q 是 p 的什么条件即可.

因 p：$x<-3$ 或 $x>1$，q：$x<-4$ 或 $x>1$，故

$$(-\infty, -4)\cup(1, +\infty)\subsetneqq(-\infty, -3)\cup(1, +\infty),$$

故 q 是 p 的充分不必要条件，$\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

说明　由 q：$\frac{1}{x^2+3x-4}>0$ 而直接得 $\neg q$：$\frac{1}{x^2+3x-4}\leqslant 0$，得 $-4<x<1$，不是所求的 $\neg q$ 的应有范围，这里 $\neg q$ 除了 $\frac{1}{x^2+3x-4}\leqslant 0$ 外，还有 $x^2+3x-4=0$ 的部分，而 $\frac{1}{x^2+3x-4}\leqslant 0$ 隐含了 $x^2+3x-4\neq 0$. 因此一般不直接求 $\neg p$，$\neg q$，而是先确定 p，q 之后，再确定 $\neg p$，$\neg q$.

三、基础训练

1. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为在同一平面内的非零向量. 甲：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，乙：$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则(　　).

(A) 甲是乙的充分但不必要条件　　(B) 甲是乙的必要但不充分条件

(C) 甲是乙的充要条件　　(D) 甲是乙的既不充分也不必要条件

2. 下列命题中为真命题的是(　　).

①“若 $\sqrt{x^2}=x$，则 $x>1$”的逆命题；②“若 $|a|\neq -a$，则 $a>8$”的否命题；③“若 $ab\leqslant 15$，则 $a\leqslant 5$ 且 $b\leqslant 3$”的逆否命题；④如果命题“若 $\neg p$，则 q”为假命题，那么“若 $\neg q$，则 p”为假命题；⑤“若 $ab=0$，则 $a\neq 0$ 或 $b=0$”的否命题.

(A) ①②④　　(B) ③④⑤　　(C) ①②⑤　　(D) ②③④

3. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一正根和一负根的充分不必要条件是(　　).

(A) $a<0$　　(B) $a>0$　　(C) $a<-1$　　(D) $a>1$

4. 对任意实数 a，b，c，给出下列命题，其中真命题有(　　)个.

①“$a=b$”是“$ac=bc$”的充要条件；②“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件；③“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件；④“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. $ab>0$ 是 $\frac{a}{b}>0$ 的________条件；$ab\geqslant 0$ 是 $\frac{a}{b}\geqslant 0$ 的________条件.

6. 设命题 p: $|4x-3|\leqslant 1$，命题 q: $x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

7. 设原命题是："已知 a, b, c, d 是实数，若 $a>b$ 且 $c>d$，则 $a+c>b+d$". 写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并分别说明它们的真假.

8. 已知 a, b 都是正整数，且 ab 能被 5 整除. 求证：a, b 中至少有一个能被 5 整除.

四、综合提高

9. 在下列命题中，真命题是(　　).

(A) 命题"若 $ac>bc$，则 $a>b$"

(B) 命题"若 $b=3$，则 $b^2=9$"的逆命题

(C) 命题"当 $x=2$ 时，$x^2-3x+2=0$"的否命题

(D) 命题"相似三角形的对应角相等"的逆否命题

10. 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的(　　).

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

11. 已知直线 a, b, c，平面 α, β，则直线 a, b 为异面直线的一个充分条件为(　　).

(A) $a\perp c$, $b\perp c$　　(B) $a\perp\alpha$, $b/\!/\beta$, $a/\!/\beta$

(C) $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $\alpha\perp\beta$　　(D) $\alpha\cap\beta=a$, $b\perp\alpha$, $b/\!/\beta$

12. 已知命题 p: 不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$，命题 q: $f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数，若 p,q 中有且只有一个为真命题，则 m 的取值范围为________.

13. 证明：已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，a, $b\in\mathbf{R}$. 若 $f(A)+f(B)\geqslant f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geqslant 0$.

14. 已知 $M=\{(x,y)|y^2=2x\}$，$N=\{(x,y)|(x-a)^2+y^2=9\}$，求 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件.

1.3　常用逻辑用语(1 课时)

一、内容提要

通过对不同版本数学实验教材的归纳总结，本节的主要内容有：

1. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有"且"、"或"、"非".

用联结词"且"把命题 p 和命题 q 联结起来，构成一个新命题，记作"$p\wedge q$"，读作"p 且 q"，可以理解为命题 p 和命题 q 都要满足.

用联结词"或"把命题 p 和命题 q 联结起来，构成一个新命题，记作"$p\vee q$"，读作"p 或

q"，可以理解为命题 p 和命题 q 至少取一个.

、对一个命题 p 全盘否定，得到一个新命题，记作"$\neg p$"，读作"非 p"或"p 的否定"，可以理解为不满足命题 p.

2. 简单命题和复合命题

不含逻辑联结词的命题称为简单命题.

由简单命题与逻辑联结词构成的命题称为复合命题，因此就有"$p\wedge q$"、"$p\vee q$"、"$\neg p$"形式的复合命题，其中 p，q 为简单命题.

3. 判断复合命题真假的真值表

p	q	$\neg p$	$p\vee q$	$p\wedge q$
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

说明　(1)"$\neg p$"形式复合命题与命题 p 的真假相反.

(2)"$p\vee q$"形式复合命题，当 p 与 q 同为假时为假，其他情况为真.

(3)"$p\wedge q$"形式复合命题，当 p 与 q 同为真时为真，其他情况为假.

复合命题的真假，主要利用真值表来判断，其步骤为：

(1) 确定复合命题的构成形式；

(2) 判断其中各简单命题的真假；

(3) 利用真值表判断复合命题的真假.

4. 常见词语的否定

原词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是	都是	至多有1个
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是	不都是	至少有两个
原词语	或	至多有 n 个	任意两个	所有的	任意的	至少有1个
否定词语	且	至少有 $n+1$ 个	某两个	某些	某个	1个也没有

5. 全称量词与存在量词

(1) 全称量词：数学命题中出现"全部"、"所有"、"一切"、"任何"、"任意"、"每一个"等词语，在逻辑中称为全称量词，符号为"$\forall$".

(2) 全称命题：含有全称量词的命题. 全称命题形式为"对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立". 用符号简记为"$\forall x\in M$，$p(x)$".

(3) 存在量词：数学命题中出现"存在着"、"有"、"有些"、"某个"、"至少有一个"等词语，在逻辑中称为存在量词，符号为"$\exists$".

(4) 特称命题：含有存在量词的命题. 特称命题形式为"存在一个 x 属于 M，使 $p(x)$ 成立". 用符号简记为"$\exists x\in M$，$p(x)$".

(5) 含有一个量词的否定：

全称命题 p：$\forall x\in M$，$p(x)$；其否定命题 $\neg p$：$\exists x\in M$，$\neg p(x)$.

特称命题 p：$\exists x\in M$，$p(x)$；其否定命题$\neg p$：$\forall x\in M$，$\neg p(x)$.

全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题.

二、例题分析

本节的主要题型都是围绕复合命题的结构形式及真假判断，全称命题与特称命题的真假及命题的否定形式.

例 1　分别写出由下列各组命题构成的“$p\vee q$”、“$p\wedge q$”、“$\neg p$”形式的复合命题：

(1) p：$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{2}$大于 1；　　(2) p：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$q$：$\{0\}\in\mathbf{N}$；

(3) p：$x^2+1>x-4$，q：$x^2+1<x-4$.

解　(1) $p\vee q$：$\sqrt{2}$是无理数或大于 1；$p\wedge q$：$\sqrt{2}$是无理数且大于 1；$\neg p$：$\sqrt{2}$不是无理数.

(2) $p\vee q$：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$ 或 $\{0\}\in\mathbf{N}$；$p\wedge q$：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$ 且 $\{0\}\in\mathbf{N}$；；$\neg p$：$\mathbf{N}\not\subseteq\mathbf{Z}$.

(3) $p\vee q$：$x^2+1\neq x-4$；$p\wedge q$：$x^2+1>x-4$ 且 $x^2+1<x-4$；$\neg p$：$x^2+1\leqslant x-4$.

说明　在由简单命题写出复合命题时，可直接使用逻辑联结词，也可以不使用逻辑联结词. 写复合命题时，关键要搞清“且”、“或”、“非”的意义.

例 2　指出下列命题的真假：

(1) 不等式 $|x+2|\leqslant 2$ 没有实数解；　　(2) 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^2-2x+3\geqslant 0$；

(3) 等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边；　　(4) $A\not\subseteq(A\cup B)$.

解　(1) 此命题为“$\neg p$”形式，其中 p：不等式 $|x+2|\leqslant 2$ 有实数解. 因为 $x=-2$ 是该不等式的一个解，所以 p 是真命题，即$\neg p$ 是假命题，故原命题为假命题.

(2) 此命题是“$p\vee q$”形式，其中 p：若 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^2-2x+3>0$，q：若 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^2-2x+3=0$. 因为 p 是真命题，q 是假命题，则“$p\vee q$”为真，因此原命题为真命题.

(3) 此命题是“$p\wedge q$”形式，其中 p：等腰三角形顶角的平分线平分底边，q：等腰三角形顶角的平分线垂直于底边. 因为 p，q 均为真命题，则“$p\wedge q$”为真，故原命题为真命题.

(4) 此命题是“$\neg p$”形式，其中 p：$A\subseteq(A\cup B)$. 因为 p 真，则“$\neg p$”为假，故该命题是假命题.

说明　为了正确判断复合命题的真假，首先要确定复合命题的构成形式，然后指出其中简单命题的真假，再根据真值表判断这个复合命题的真假.

例 3　设 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若“$p\vee q$”为真，“$p\wedge q$”为假，求 m 的取值范围.

解　若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，则$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\x_1+x_2=-m<0\end{cases}$，于是 $m>2$，即 p：$m>2$. 若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，则 $\Delta=16(m-2)^2-16<0$，于是 $1<m<3$，即 q：$1<m<3$.

若“$p\vee q$”为真，则 p，q 至少一个为真；若“$p\vee q$”为假，则 p，q 至少一个为假. 故 p，q 一真一假，即 p 真 q 假或 p 假 q 真.

所以$\begin{cases}m>2\\m\leqslant 1\text{ 或 }m\geqslant 3\end{cases}$或$\begin{cases}m\leqslant 2\\1<m<3\end{cases}$，即 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

故实数 m 的取值范围为 $(1,2]\cup[3,+\infty)$.

说明　由简单命题和逻辑联结词构成的复合命题的真假可以用真值表来判断，反之根据复合命题的真假也可以判断简单命题的真假．假若"$p\wedge q$"真，则 p 真且 q 也真；若"$p\wedge q$"真，则 p，q 至少有一个真；若"$p\wedge q$"假，则 p，q 至少有一个假．

例 4　写出下列命题的否定，并判断其真假：

(1) p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；　　(2) q：所有的正方形都是矩形；

(3) r：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$；　　(4) s：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$．

解　(1) $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$．p 中由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立，故 $\neg p$ 为假命题．

(2) $\neg q$：至少存在一个正方形不是矩形（假）．

(3) $\neg r$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$．因对一切 $x\in\mathbf{R}$，$\Delta=4-4\times 2<0$，故 $x^2+2x+2>0$ 恒成立；或由 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$，故 $\neg r$ 是真命题．

(4) $\neg s$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3+1\neq 0$．这里由于当 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$，故 $\neg s$ 是假命题．

说明　从命题形式上看，全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题，因此可以通过举反例来否定一个全称命题．

三、基础训练

1. 给出命题 p：$3\geqslant 3$，q：函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数，则在下列 3 个复合命题"$p\vee q$"、"$p\wedge q$"、"$\neg p$"中，真命题个数为（　　）．

　(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

2. 命题 p：若 a，$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充要条件，命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,\ -1]\cup[3,\ +\infty)$，则（　　）．

　(A) "$p\vee q$"为假　　(B) "$p\wedge q$"为真

　(C) p 真 q 假　　(D) p 假 q 真

3. 设 p，q 是两个命题，则复合命题"$p\vee q$"为真、"$p\wedge q$"为假的充要条件是（　　）．

　(A) p，q 中至少有一个真　　(B) p，q 中至少有一个假

　(C) p，q 中有且只有一个为真　　(D) p 为真，q 为假

4. 下列命题的否定是真命题的是（　　）．

　(A) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+3x+4>0$　　(B) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x-3\leqslant 0$

　(C) 有些三角形是锐角三角形　　(D) 任意一元二次方程都有实数解

5. 已知 p：$|x^2-x|\geqslant 6$，q：$x\in\mathbf{Z}$，"$p\wedge q$"与"$\neg q$"都是假命题，则 x 的解集是________．

6. 已知命题 p：不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集是 $\mathbf{R}$，命题 q：函数 $f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数，若"$p\vee q$"为真命题，"$p\wedge q$"为假命题，则实数 m 的取值范围是________．

7. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1>0$；　　(2) $\forall x\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数；