国标
苏教版

活页

高中数学

创新课时训练

学/习/指/导/用/书/升/级/版

必修5

江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

主　　编　陈光立

本册主编　徐永忠

编写人员　龙艳文　周　德　徐永忠

参与讨论　董林伟　丁　骏　樊亚东　冯惠愚　冯建国
葛　军　寇恒清　李善良　李洪涛　陆云泉
罗　强　刘　华　祁建新　仇炳生　孙旭东
石志群　徐稼红　徐淮源　袁亚良　于　明
魏贤刚　王红兵　王玉宏　卫　刚　张松年
张乃达　周建勋　周　凯　张建良

目录

第 1 章

解 三 角 形

第 1 课时 正弦定理(1)

课堂例题

例 1 在$\triangle ABC$中,已知$c=10$, $A=45^\circ$, $C=30^\circ$, 求a, b和B.

例 2 在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$, 求A, C及c.

例 3 在$\triangle ABC$中, $A=75^\circ$, $C=45^\circ$, $b=2$, 求此三角形的最小边长.

学海导航

正弦定理可以解决两类解斜三角形的问题:

(1) 已知两角和任意一边,求其他的两边和一角;

(2) 已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角及其他的边和角.

拾采圃

课堂练习

1. 已知$\triangle ABC$中, $a=10$, $B=60^\circ$, $C=45^\circ$, 则c等于 ( )

A. $10+\sqrt{3}$ B. $10(\sqrt{3}-1)$ C. $\sqrt{3}+1$ D. $10\sqrt{3}$

2. 在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{2}$, $b=2$, $\angle B=45^\circ$, 则$\angle A$等于 ( )

A. 60° B. 30° C. 60°或120° D. 30°或150°

3. 在$\triangle ABC$中,已知$c=\sqrt{3}$, $A=45^\circ$, $B=60^\circ$, 则$b=$________.

4. 在$\triangle ABC$中,已知$b=12$, $A=30^\circ$, $B=120^\circ$, 则$a=$________.

课后训练

5. 在$\triangle ABC$中,已知$A=75^\circ$, $B=45^\circ$, $c=3\sqrt{2}$,求b.

6. $\triangle ABC$中,若$a=2$, $b=2\sqrt{3}$, $\angle B=60^\circ$,求$\angle C$及c.

7. 已知在$\triangle ABC$中,$a=2$, $c=\sqrt{6}$, $A=45^\circ$,求解此三角形.

数学阅读

中国古代三角学的起源

三角学的产生源于测量,首先是天文学的发展而产生了球面三角. 中国古代天文学很发达,因为要决定恒星的位置,所以很早就有了球面测量的知识;而对于平面测量术,在《周髀算经》内已记载用矩来测量高深远近.

刘徽的割圆术以单位长为半径求圆内接正六边形、正十二边形等的每一边长,其结果与$2\sin A$的值相符(A是圆心角的一半),以后到了公元12世纪,赵友钦用圆内接正四边形起算也同此理. 我们可以从刘徽、赵友钦的计算中得出7.5°, 15°, 22.5°, 30°, 45°等的正弦函数值.

在古代历法中有计算二十四个节气的日晷影长,地面上直立一个八尺长的"表",太阳光对这"表"在地面上的射影长由于地球公转而每一个节气都不同,这些影长和"八尺之表"的比,构成一个余切函数表(不过当时还没有这个名称).

现在我们所用的三角函数名词:正弦,余弦,正切,余切,正割,余割,都是我国在16世纪已有的名称,那时再加正矢和余矢二个函数,叫做八线.

第 2 课时　正弦定理(2)

课堂例题

例 1　解分别满足下列条件的两个三角形：① $B = 30°$，$a = 14$，$b = 7$；② $B = 60°$，$a = 10$，$b = 9$. 那么，下面判断正确的是　（　　）

A. ①只有一解，②也只有一解　　B. ①有两解，②也有两解

C. ①有两解，②只有一解　　D. ①只有一解，②有两解

例 2　在$\triangle ABC$中，若 $\lg a - \lg c = \lg \sin B = -\lg \sqrt{2}$，且 B 为锐角，试判断此三角形的形状.

例 3　在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边为 a，b，c，若 $\sin A\cos^2\dfrac{C}{2} + \sin C\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{3}{2}\sin B$，求证：$a + c = 2b$.

课堂练习

1. 在$\triangle ABC$中，若 $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B} = \dfrac{c}{\cos C}$，则$\triangle ABC$是　（　　）

A. 等腰直角三角形　　B. 等边三角形

C. 顶角为 $120°$ 的等腰三角形　　D. 顶角为 $150°$ 的等腰三角形

2. 在$\triangle ABC$中，$a = 2\sqrt{2}$，$b = 2\sqrt{3}$，$A = 45°$，则此三角形的解的情况是　（　　）

A. 无解　　B. 一解　　C. 二解　　D. 不确定

3. 已知$\triangle ABC$中，$a = x$，$b = 2$，$B = 45°$，若这个三角形有两解，则 x 的取值范围是　（　　）

A. $x > 2$　　B. $x < 2$

C. $2 < x < 2\sqrt{2}$　　D. $2 < x < 2\sqrt{3}$

学海导航

1. 三角形的形状通常分为等腰三角形、等边三角形、直角三角形、等腰直角三角形、锐角三角形、钝角三角形等. 为此，要分析三角形中边、角的大小关系，除了应用“内角和 180°”、“大边对大角”之外，常用正弦定理进行边角转化，揭示出边与边，或角与角的关系，或求出角的大小，从而作出正确的判断.

2. 已知$\triangle ABC$的两边 a，b 及角 A 解三角形时，解的情况如下.

(1) A 为锐角时：

① $a < b\sin A$，无解；

② $a = b\sin A$，一解；

③ $b\sin A < a < b$，两解；

4. 若 $\sin A = \sin B$, 则$\triangle ABC$是________.

课后训练

5. 在$\triangle ABC$中,已知 $B = 30°$, $b = 50\sqrt{3}$, $c = 150$, 判断$\triangle ABC$的形状.

6. 在$\triangle ABC$中,若 $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{15}$, $A = 30°$, 求边长 c.

7. 在$\triangle ABC$中,角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c,若 $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $a : b : c$.

④ $a \geqslant b$, 一解.

(2) A 为直角或钝角时:

① $a \leqslant b$, 无解;

② $a > b$, 一解.

给乐圈

数学阅读

中国古代数学中的几何学

形的研究属于几何学的范畴.古代民族都具有形的简单概念,并往往以图画来表示,而图形之所以成为数学对象是由于工具的制作与测量的要求所促成的.中国古代大禹治水时期已有规、矩、准、绳等测量工具.

《墨经》中对一系列的几何概念有抽象概括,作出了科学的定义.《周髀算经》与刘徽的《海岛算经》给出了用矩观测天地的一般方法与具体公式.在《九章算术》及刘徽的《九章算术注》中,除勾股定理外,还提出了若干一般原理以解决多种问题.但自10世纪以后,中国在几何学方面的建树不多.

中国几何学以测量和计算面积、体积为中心任务,而古希腊的传统则是重视图形的性质与各种性质间的相互关系.欧几里得的《几何原本》建立了由定义、公理、定理、证明构成的演绎体系,成为近代数学公理化的楷模,影响遍及于整个数学的发展.特别是平行公理的研究,导致了19世纪非欧几何的产生.

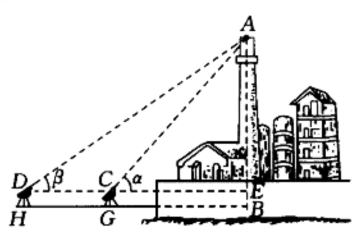
第 3 课时　正弦定理(3)

课堂例题

例 1　设△ABC 的外接圆半径为 R，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，△ABC 面积是 S，求证：$S=\frac{abc}{4R}$.

例 2　在△ABC 中，设 h_1，h_2，h_3 分别为 a，b，c 边上的高，且 $h_1:h_2:h_3=3:2:4$，求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 的值.

例 3　如图，AB 是底部 B 不可到达的一个建筑物，A 为建筑物的最高点. 试设计一种测量建筑物高度 AB 的方法.



(例 3)

课堂练习

1. 在△ABC 中，$a=2$，$A=30°$，$C=45°$，则△ABC 的面积 S 等于　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

2. 在△ABC 中，若 $\sqrt{3}a=2b\sin A$，则 B 等于　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

学海导航

了解及简单应用三角形外接圆半径公式和三角形面积公式：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为△ABC 的外接圆半径），

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$.

拾乐园

3. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}$，则$B$的值为________.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a:b:c=1:3:5$，则$\dfrac{2\sin A-\sin B}{\sin C}=$________.

课后训练

5. 在$\triangle ABC$中，若$A:B:C=1:2:3$，求$a:b:c$.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$BC=6\sqrt{3}$，三角形外接圆的半径为6，求$\sin(B+C)$.

7. 在$\triangle ABC$中，已知$a=6$，$b=5$，且$A=2B$，求$\sin B$.

数学阅读

商高定理

在战国时期西汉的数学著作《周髀算经》中记录着商高同周公的一段对话，商高提到"勾广三，股修四，径隅五."什么是"勾"、"股"呢？在中国古代，人们把弯曲成直角的手臂的上半部分称为"勾"，下半部分称为"股"，商高那段话的意思就是说：当直角三角形的两条直角边分别为3(短边)和4(长边)时，径隅(就是弦)则为5.以后人们就简单地把这个事实说成"勾三股四弦五".由于勾股定理的内容最早见于商高的话中，所以人们就把这个定理叫做"商高定理".

毕达哥拉斯是古希腊数学家，他是公元前5世纪的人，比商高晚出生五百多年，希腊另一位数学家欧几里得在编著《几何原本》时，认为这个定理是毕达哥拉斯最早发现的，所以他就把这个定理称为"毕达哥拉斯定理"，以后就流传开了.

第 4 课时　余弦定理(1)

课堂例题

例 1　在$\triangle ABC$中,已知$a = 7$, $b = 10$, $c = 6$,求最大角的余弦值.

例 2　在$\triangle ABC$中,已知$A = 45°$, $a = 2$, $c = \sqrt{6}$,求b.

例 3　(1) 在$\triangle ABC$中,若$a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab - c^2 = 0$,则$C=$________.

(2) 已知一个三角形的三边分别为a, b, $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$,则此三角形中角的最大值为　(　　)

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $150°$

课堂练习

1. 若三角形三边之比为 3 : 5 : 7,那么这个三角形的最大角是　(　　)

A. $60°$　　B. $90°$　　C. $120°$　　D. $150°$

2. 在$\triangle ABC$中,已知$AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $AC = 4$,则边AC上的高为　(　　)

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

3. 在$\triangle ABC$中,已知$a = 9$, $c = 2\sqrt{3}$, $B = 150°$,则边长$b=$________.

4. 在$\triangle ABC$中,已知$b = \sqrt{3}$, $c = 3$, $B = 30°$,则边长$a=$________.

学海导航

利用余弦定理可以解决两类解斜三角形的问题:

(1) 已知三边,求三个角;

(2) 已知两边和它们的夹角,求第三边和其他两个角.

拾乐园

课后训练

5. 在$\triangle ABC$中,已知$a^2+ab=c^2-b^2$,求角C.

6. 若$\triangle ABC$的三边a,b,c满足$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,求角C.

7. 已知平行四边形$ABCD$两条邻边AB,AD的长分别是$\sqrt{6}$ cm和$\sqrt{3}$ cm,它们的夹角是$45°$,求这个平行四边形的两条对角线的长.

数学阅读

《周髀算经》

《周髀算经》是从数学上讨论"盖天说"宇宙模型的天文学著作,大约成书于公元前一世纪.书中有矩(一种量直角、画矩形的工具)的用途、勾股定理及其在测量上的应用、相似直角三角形对应边成比例定理等数学内容.本书一开始就以商高答周公问题的形式提出"故折矩以为勾广三、股修四、径隅五",接着提出"以日下为勾,日高为股,勾、股各有乘方,并而开方除之,得邪至日(太阳到观测者的距离)",这就是勾股定理的一般形式.

在《周髀算经》中还提到"环矩以为圆,合矩以为方",前一句话的意思是固定直角三角形的斜边,那么它的直角顶点的轨迹是一个圆.《周髀算经》中还有开平方的问题、等差级数的问题,以及应用于古代的"四分历"计算的相当复杂的分数运算.

第5课时　余弦定理(2)

课堂例题

例 1　已知三角形的三边如下:①3, 5, 7;②10, 24, 26;③21, 25, 28. 其中锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的顺序依次是　(　　)

A. ①②③　　B. ③②①　　C. ③①②　　D. ②③①

例 2　$\triangle ABC$ 中,已知 $a\cos A + b\cos B = c\cos C$, 试判断$\triangle ABC$ 的形状.

例 3　已知 $(a^2+bc)x^2+2\sqrt{b^2+c^2}x+1=0$ 是关于 x 的二次方程,其中 a, b, c 分别是$\triangle ABC$ 角 A, B, C 对应的边.(1)若 A 为钝角,试判断方程根的情况;(2)若方程有两相等实根,求 A.

课堂练习

1. 三角形的两边分别为 5 和 3,它们夹角的余弦是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根,则三角形的另一边长为　(　　)

A. 52　　B. $2\sqrt{13}$　　C. 16　　D. 4

2. 在$\triangle ABC$ 中,已知 $a=2$, $b=4$, $C=\frac{\pi}{3}$, 则$\triangle ABC$ 是　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 任意三角形

3. 在$\triangle ABC$ 中, $a^2=b^2+c^2+bc$, 则 $A=$________.

4. 在$\triangle ABC$ 中, $a=1$, $b=1$, $C=120°$, 则 $c=$________________.

学海导航

1. 在 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 中,若 $C=90°$, 则 $c^2=a^2+b^2$, 所以勾股定理可看成是余弦定理的特例,而余弦定理是勾股定理的推广.

2. 由余弦定理还可以推得:

若 $a^2+b^2>c^2$, C 为锐角;

若 $a^2+b^2<c^2$, C 为钝角.

这是判断三角形形状的方法之一.

3. 利用余弦定理实现边角转化时,一般是将角化为边的关系.

挑乐园

课后训练

5. 在$\triangle ABC$中，已知$a=b=2$，$c=3$，求$\tan C$.

6. 在$\triangle ABC$中，若$a=5$，$b=3$，$C=120^\circ$，求$\sin A$.

7. 在$\triangle ABC$中，已知a，b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根，且$2\cos(A+B)=-1$，求另一边的长c.

数学阅读

朱世杰

帕斯卡三角形是一个有名的算术三角形，它虽然冠以法国数学家帕斯卡之名，其实早在帕斯卡出生之前500多年就被发现了.

在公元1303年，中国数学家朱世杰在他的一本叫做《四元玉鉴》一书的序中给出了这个有名的三角形.朱世杰甚至没有宣扬发现了这个三角形，他用古法来描述它是用来寻找二项式系数的.大约在朱世杰之前两个世纪，中国数学家已经知道这个可用来计算出二项式系数的三角形模式.

朱世杰是中国数学黄金时代(宋元时期)最后的且是最伟大的数学家.史家总是描述他是所有时期伟大的数学家之一.然而，朱世杰的生平少有人知，就连他生日和祭日的确切资料也没人知道.他住在现在北京附近的燕山，曾经以数学研究和数学教学为业游学四方.

第 6 课时　余弦定理(3)

课堂例题

例 1　在$\triangle ABC$中,已知$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}=c$,且$a\cos B=b\cos A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

例 2　在$\triangle ABC$中,$|\overrightarrow{AB}|=1$,$|\overrightarrow{BC}|=2$,$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=5+2\sqrt{3}$,则边$|\overrightarrow{AC}|$等于　(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $5-2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$　　D. $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

例 3　已知$\triangle ABC$的面积$S=a^2-(b-c)^2$,且$b+c=8$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

课堂练习

1. 在$\triangle ABC$中,已知$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 C$,则$A$等于　(　　)

   A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

2. 在$\triangle ABC$中,化简$b\cos C+c\cos B$得　(　　)

   A. b　　B. a　　C. c　　D. ac

3. 已知三角形三边之比为$5:7:8$,则最大角与最小角的和为________.

4. 在$\triangle ABC$中,$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$,则$\cos C=$________.

学海导航

解题中要利用$\triangle ABC$中$A+B+C=\pi$,以及由此推得的一些基本关系式,进行三角变换的运算.

如:(1) $\sin(A+B)=\sin C$,$\cos(A+B)=-\cos C$,$\tan(A+B)=-\tan C$;

(2) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$,$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$,$\tan\dfrac{A+B}{2}=\cot\dfrac{C}{2}$.

[illegible]

课后训练

5. 在$\triangle ABC$中,已知$B=60^\circ$, $b^2=ac$,判断$\triangle ABC$的形状.

6. 在$\triangle ABC$中,已知$|\overrightarrow{BC}|=5$, $|\overrightarrow{CA}|=6$, $|\overrightarrow{AB}|=7$,求$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

7. 把一根长 20 cm 的木条锯成两段,分别作为钝角$\triangle ABC$的两边AB和BC,且$\angle ABC=120^\circ$,问怎么锯断才能使第三条边AC最短,试证明之.

数学阅读

中国古代数学萌芽时期的三角知识

原始社会末期,私有制和货物交换产生以后,数与形的概念有了进一步的发展.西安半坡出土的陶器有用 1~8 个圆点组成的等边三角形和分正方形为 100 个小正方形的图案,半坡遗址的房屋基址都是圆形和方形.为了画圆作方,确定平直,人们还创造了规、矩、准、绳等作图与测量工具.据《史记·夏本纪》记载,夏禹治水时已使用了这些工具.

第 7 课时 正弦定理、余弦定理的应用(1)

课堂例题

例 1 在$\triangle ABC$中,求证:$\dfrac{a-c\cdot\cos B}{b-c\cdot\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$.

例 2 在$\triangle ABC$中,若$\sin A=2\sin B\cos C$,且$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$,试判断$\triangle ABC$的形状.

例 3 在$\triangle ABC$中,边a,b,c分别是角A,B,C的对边.若$a^2+c^2=b^2+ac$,且$a:c=(\sqrt{3}+1):2$,求C.

课堂练习

1. 在$\triangle ABC$中,如果$\sin A:\sin B:\sin C=5:12:13$,则$\cos A=$______.
2. 在$\triangle ABC$中,已知$\sin A=2\cos B\sin C$,则三角形形状为__________.
3. 在$\triangle ABC$中,$\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$,则三角形形状为________.
4. 在$\triangle ABC$中,角A,B均为锐角,且$\cos A>\sin B$,则$\triangle ABC$形状是________.

学海导航

判断三角形的形状要分析三角形中边、角的大小关系,正、余弦定理及勾股定理是解题的基础.如果在问题中出现了边角关系,关键是利用正、余弦定理进行边角转化,即都转化为边的形式,或都转化为角的形式.

拾乐园