CHUDENG SHUXUE YANJIU

# 初等数学研究

（下册）

主编 王 智 石 峰 樊晓明

CHUDENG SHUXUE YANJIU

哈尔滨地图出版社

# 前　　言

几何在中学数学教学中占有重要的位置，通过几何课程的学习，可以培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力，从而提高学生的逻辑思维能力。通过对初等几何的学习，学生可以获取大量的来自生活、生产实践的知识，它们有助于培养学生重实践、重应用的良好素质。现代的高新技术有许多采用了传统和现代的几何理论，在人类进入电子信息社会的今天，几何学对人类社会发展的贡献越来越大，出席科学年会的科学家认为"21 世纪教育的一个重要原则是：学校传授给下一代的将不只是知识，更重要的是技能，几何学具有较强的直观效果，有助于提高学生认识事物的能力，应当成为自然科学教育大纲中的首选和重点内容"。初等几何是几何类课程的基石，在师范院校开设好初等几何研究课程，对基础教育具有极其深远的意义。

初等几何研究是高等师范院校数学系的一门重要的专业基础必修课程，它直接为培养合格的中学数学教师服务；随着教育改革的深入发展和科技、经济的发展，这门课程的内容和体系也在不断更新发展，但其基本点仍是围绕教与学而展开的教学、教材研究，其理论体系仍属于数学教育学的范畴，它是数学教育学科的一门基础教程。

初等几何课程建设及教学改革已发生较大变化，为了适应当前我国几何类课程改革的现状，更好地培养师范院校在校生及广大的中学数学教师的几何能力，并能愉快地胜任几何教学，作者结合师范院校在校生的学习实际，编写了这本初等几何研究教材。

在书中我们尽量保留了初等几何研究系列教材的传统体例和结构，并结合初等几何课程改革的一些观点，在内容上作了适当的调整与编纂，以期反映出当今初等几何在教学上的特色与精华。在本书中，我们在解题技巧和方法上重分析、轻过程，重点在于启发学生重视结果的探求过程和知识间的内在联系，培养学生分析问题、解决问题的能力。

限于编写的时间仓促，疏漏及不足之处在所难免，敬请同行与读者批评指教，以便更正提高。

编　　者

2006 年 1 月

# 目　　录

# 绪　言

几何学是研究现实世界物体的形状、大小和相互位置关系的学科。

“几何”一词，来自希腊文，“土地测量”的意思。几何在我国作为数学名词，是明万历年间，我国科学家徐光启(1562～1633)于1607年与意大利传教士利马窦(Ricci Matteo，1552年10月6日～1610年5月11日)合译欧几里德(Euclid，约公元前330～公元前275年)《几何原本》时，根据其拉丁文(Geometry)的音译首次采用的，以后发展成为数学分支的名称，也被亚洲一些国家所采用。

几何学作为一门十分古老的自然科学，是人们在生产和生活实践中不断总结和完善的，实践活动是建立几何抽象概念的基础。几何学的产生可追溯到距今8000～14000年的新石器时期，现在已经发展成为研究一般空间结构的学科。

初等几何是中学数学的基本内容，它在生产实践中有着重要的作用，也是进一步学习整个几何学以至现代数学的基础。

## 第一节　几何学的历史简介

几何学的发展大致经历了四个基本阶段：

**一、实验几何的形成与发展**

几何学最早产生于人们对自然界中各种物体的观察，产生于人们日常生活中实践活动的需要。人们在观察、实践、实验的基础上积累了丰富的几何经验，形成了一些粗略的概念，反映出一些经验事实之间的联系，形成了实验几何。我国古代、古埃及、古印度、巴比伦所研究的几何，大体上就是实验几何学的内容。

例如，我国古代很早就发现了勾股定理和简易测量知识，我国在汉唐以前遗留的数学著作《算经十书》，其中《周髀算经》中就有“商高定

理”(即勾股定理);《九章算术》中记载:用割圆术方法求得 $\pi=3.141\cdots$ 到了南北朝的祖冲之,计算出圆周率 $\pi$ 在 3.1415926 与 3.1415927 之间,用分数表示:约率 $\pi=\frac{22}{7}$;密率 $\pi=\frac{355}{113}$,春秋战国时的墨子所著《墨经》中记载有“圜(圆),一中同长也”,“平(平行),同高也”。

古埃及人使用公式 $A=(8d/9)^2$ 来计算圆的面积,其中 $d$ 是直径,就是说 $\pi$ 取值为 3.1605,还有计算立方体、箱体、柱体和其它圆形体积的法则,有些法则是对的,有些只是近似。

古印度人认为“圆面积等于一个底为该圆的半个圆周,高为该圆半径的矩形面积”,等等,都属于实验几何的范畴。

除了计算一个给定的等腰三角形的外接圆半径之类特殊的实际知识外,巴比伦人的几何知识只是收集了一些计算简单平面图的面积和简单立体体积的法则。

**二、理解几何的形成与发展**

随着古埃及、希腊之间贸易文化的交流,埃及的几何知识逐渐传人希腊,古希腊数学家泰勒斯(Thales,约公元前 625～前 547)用相似形理论测量了金字塔的高度,几何学家毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前 580～前 500)用逻辑证明方法证明了毕氏定量(即勾股定理),特别是柏拉图(Plato,公元前 430～前 349)把逻辑学思想引进几何学,探讨了逻辑证明等理论问题,确立缜密的定义和明晰的公理作为几何学的基础,而后,希腊著名数学家欧几里德(Euclid,公元前 330～前 275)在前人工作的基础上,按照严密的逻辑系统编写出杰出的几何学著作《几何原本》十三卷,奠定了理论几何(又称推理几何、演绎几何、公理几何、欧氏几何等)的基础,标志着数学领域中公理法的诞生,成为历史上久负盛名的巨著。

《几何原本》尽管存在公理不够完整、论证有时求助于直观等缺陷,但它集古代数学之大成,论证严密,影响深远,所运用的公理化方法对以后数学的发展指出了方向,以至成为整个人类文明发展史上的里程碑,是全人类文化遗产中的瑰宝。

从 1482 年到 19 世纪末，《几何原本》的印刷本竟用各种文字出版了 1000 版以上，《几何原本》共十三卷，其中第一～四、六卷讨论平面几何；第五、七～十卷讨论算法理论；第十～十三卷讨论立体几何。第一卷是全书的基础，引入了 23 个定义、5 个公设和 5 个公理、48 个定理。第二卷是一些代数恒等式的几何叙述，包括黄金分割定理，共 14 个命题。第三卷讨论圆的性质，如圆周角、圆心角、切线、割线、圆幂定理等，共 37 个命题。第四卷讨论圆的内接、外切多边形和正五边形、正六边形、正十五边形的作图，共 16 个命题。第五卷是比例论。第六卷是相似多边形理论，共 33 个命题。第七、八、九卷是算术，包括整数研究的几何方式，以及求最大公约数的欧几里德辗转相除法。第十卷介绍可公度和不可公度的概念以及不可公度的分类，包括整数开平方的几何运算。第十一、十二、十三卷是立体几何和"取尽法"。

《几何原本》把生动直观的图形与严密抽象的论证紧密结合在一起，对培养直觉思维能力和逻辑思维能力具有非凡的作用。

**三、解析几何的产生与发展**

公元前 3 世纪，《几何原本》的出现，为理论几何奠定了基础，随着生产实际的需要，自然科学得到了迅速发展。法国数学家笛卡尔(R. Descartes,1596～1650)在研究中发现，欧氏几何过分依赖于图形，而传统的代数又完全受公式、法则所约束，于是竭力主张将几何、代数结合起来取长补短，在这样的思想指导下，笛卡尔提出了平面坐标系的概念，实现了点与数对的对应，将圆锥曲线用含有两个未知数的方程来表示，并且形成了一系列全新的理论与方法，解析几何就这样产生了。

解析几何的出现，大大拓宽了几何学的研究内容，并且促进了几何学的进一步发展。18、19 世纪，由于工程、力学和大地测量等方面的需要，又进一步产生了画法几何、射影几何、仿射几何和微分几何等几何学的分支。

**四、现代几何的产生与发展**

在初等几何与解析几何的发展过程中，人们不断发现《几何原本》在逻辑上的不够严密之处，并不断地充实一些公理，特别是在尝试用其

它公理、公设证明第五公设“一条直线与另外两条直线相交，同侧的内角和小于两直角时，这两条直线就在这一侧相交”的失败，促使人们重新考察几何学的逻辑基础，并取得了两方面的突出研究成果。

一方面，从改变几何的公理系统出发，即用与欧氏几何第五公设相矛盾的命题来代替第五公设，从而导致几何学研究对象的根本突破。俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(1792～1856)用“在同一平面内，过直线外一点可作两条直线平行于已知直线”代替第五公设，由此导出了一系列新理论，如“三角形内角和小于两直角”、“不存在相似而不全等的三角形”，等等，后人称为罗氏几何学(又称双曲几何学)，德国数学家黎曼(1826～1866)从另一角度，用“在同一平面内，过直线外任意一点不存在直线平行于已知直线”代替第五公设，同样导致了一系列新理论，如“三角形内角和大于两直角”、“所成三角形与球面三角形有相同面积公式”等，又得到另一种不同的几何学，后人称为黎氏几何学(又称椭圆几何学)。习惯上，人们将罗氏几何学、黎氏几何学统称为非欧几何学，将欧氏几何学(又称抛物几何学)、罗氏几何学的公共部分统称为绝对几何学。

另一方面，人们在对欧氏几何公理系统的严格分析中，形成了公理法，并由德国数学家希尔伯特(D. Hilbert，1862～1943)在他所著《几何基础》中完善地建立起严格的公理体系，通常称为希尔伯特公理体系，其结构为：

- 基本概念
  - 基本对象
    - 点
    - 直线
    - 平面
  - 基本关系（根据这些基本概念来定义所有几何概念的关系）
    - 结合关系
      - 点在直线上
      - 点在平面上
    - 顺序关系：一点介于两点之间
    - 合同关系
      - 两线段合同
      - 两角合同
- 公理（根据这些公理逻辑地推证出所有的定理）
  - 结合公理($\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_8$)
  - 顺序公理($\mathrm{II}_1-\mathrm{II}_4$)
  - 合同公理($\mathrm{III}_1-\mathrm{III}_5$)
  - 平行公理($\mathrm{IV}$)
  - 连续公理($\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2$)

希尔伯特公理体系包括六个基本概念和五组二十条公理，希尔伯

特公理体系是完备的，即用纯逻辑推理的方法，可以推理出系统严密的欧氏几何学，作为公理体系应该满足三个要求：

1. 相容性(不矛盾)：指在公理系统内，不允许同时能证明两个互相矛盾的命题。

2. 独立性(不重复)：即要求公理系统中每一条公理都有存在的必要，而不能由公理系统的其它公理推导出来。

3. 完备性(不缺少、不冗余)：即要确保从公理系统能够导出所论数学分支的全部命题，而公理系统不能再增加一条新的独立的公理而仍然没有矛盾。

对于一个公理系统，无矛盾性是必不可少的，但对一个学科来说，公理的独立性和完备性并不是必须的，从数学教育的角度看，希尔伯特公理系统非常繁琐，而且它把几何从其它数学中孤立出来，增加了教育的难度。

## 第二节　初等几何研究的对象和目的

### 一、初等几何研究的对象

人们将物体抽象而得到几何体的概念，简称体，体由面所围成，面与面相交于线，线与线相交于点。

点、线、面的集合称为几何图形，几何学就是研究几何图形性质的科学，即研究几何图形的形状、大小、位置关系的科学。所谓图形的大小，就是指图形的度量关系；所谓图形的位置，就是指结合关系、顺序关系、合同关系、连续关系等。

初等几何的研究对象就是以最常见的规则图形——直线形、圆、相似形、柱、锥、台、球等为对象，研究它们的度量性质和基本的位置关系。初等几何又分平面几何与立体几何两部分，平面几何是研究由点、线二元素集合而成的平面几何图形的度量性质和基本的位置关系；立体几何则是研究由点、线、面三元素组合而成的空间几何图形的度量性质和基本的位置关系。

对于初等几何的研究有三方面的涵义：

1. 就其研究内容来说基本上不超出《几何原本》所涉及的范围。

2. 就研究方法来说主要是借助于逻辑的方法，侧重于定性地进行研究。

3. 在体系安排上带有运用公理法的倾向，尽可能保证论证的严密性。

根据教学的需要，考虑学生的可接受性，对教学内容进行适当的选取，以有利于教学，又同样可以达到培养学生逻辑思维能力的目的为原则，而这又正是中学几何课程的逻辑体系的特点。

**二、初等几何研究的目的和方法**

对于初等几何研究的目的和研究方法既要看到几何教育的历史地位，又要看到数学发展的新形势，更要面对当前中学数学教学改革的实际，这是我们研究问题的出发点。

课程在学校教育中处于核心地位，教育的目标、价值主要通过课程来体现和实施，因此课程改革是教育改革的核心内容。

于是，我国新一轮基础教育课程改革在世纪之交启动。基础教育课程改革的目标是改变课程过于注重知识传授的影响，强调形成积极主动的学习态度，改变课程结构过于强调学科本位、门类过多和缺乏整合的现状，使课程结构具有均衡性、综合性和选择性，改变课程内容繁、难、偏、旧和偏重书本知识的现状，加强课程内容与学生生活以及现代社会科技发展的联系，关注学生的学习兴趣和经验，精选终身学习必备的基础知识和技能，改变课程过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状，倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力，以及交流与合作的能力。

当前国家正在进行着一场新的教育改革，以促进素质教育，实现创新教育，并施行了一系列的课程标准和教材改革，强调基础教育要满足每个学生终身发展的需要，培养学生终身学习的愿望和能力，而初等几何所涉及的几何知识无论是对进一步学习还是直接参加生产，或是作

为公民的一般素养，都是完全必要的。同时它在培养和发展逻辑推理能力和空间想像能力，训练正确使用数学语言，掌握一定的绘制图形的技能技巧，初步学会使用现代数学基本研究方法——公理法、演绎法方面都具有重要的意义。初等几何传统的研究方法“综合法”，即是一种以图形直观分析和逻辑论证相结合的方法，对现行的综合几何的作用和地位，应给予足够的重视，在强调综合几何的作用和地位时，也不可忽视教材与教法上的改革，对传统几何内容删繁就简，改革理论几何的逻辑体系，充实几何变换的知识；重视推理方法和分析过程，而不是追求论证格式；重视一般方法的掌握，而不是追求特殊技巧；重视代数的、几何的、三角的等方法的综合运用，而不是一味追求综合法，等等。重视方法与技巧的掌握和应用，关注能力与兴趣的培养。几何证明有助于培养学生的逻辑推理能力，在几何证明的过程中，不仅是逻辑演绎的程序，它还包含着大量的观察、探索、发现的创造性过程。

本书立足于中学几何教学，从培养初中师资出发，把初中几何教材中的一些基本问题及解题方法和技巧分别进行分类归纳，在内容上适当作了延伸和充实，在理论、观点和方法上适当予以提高。同时结合教材和教法改革，在内容和体系上以培养能力为中心进行了适当改革和充实。

# 第一章　几何证明与三段论法

## 第一节　几 何 证 明

### 一、几何命题

将数学中的判断称之为命题。几何命题就是指几何中的命题，即在几何中，用语言、符号或式子表示的判断，如“三角形内角和为180°”、“对顶角相等”等。

几何命题一般有四种形式：

原命题：若 $A$，则 $B$

逆命题：若 $B$，则 $A$

否命题：若非 $A$，则非 $B$

逆否命题：若非 $B$，则非 $A$

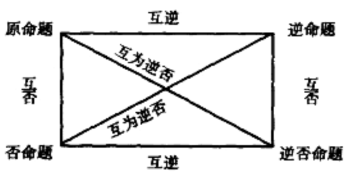
例如：原命题：若两个角为对顶角，则此两角相等

逆命题：若两个角相等，则此两角为对顶角

否命题：若两个角不是对顶角，则此两角不相等

逆否命题：若两个角不相等，则此两角不是对顶角

互为逆否的两个命题是等价的，命题间的关系如下图：




### 二、命题的条件

几何命题是由条件和结论两部分组成的，即“若 $A$，则 $B$”。

$A \Rightarrow B$，$A$ 是 $B$ 的充分条件（有它必行，无它未必不行）。

$B \Rightarrow A$，$A$ 是 $B$ 的必要条件（无它必不行，有它未必行）。

$A \Leftrightarrow B$，$A$ 是 $B$ 的充要条件（有它必行，无它必不行）。

如“对角线互垂”是菱形的必要而不充分条件，“对角线互相垂直平分”是菱形的充要条件，“可内接于圆”是四边形成为矩形的必要而不充分的条件。

**三、几何证明**

证明就是引用其它已知的正确判断来推导某一命题（即判断）的真实性的逻辑行为。

证明包括论题、论据、推理形式三部分。

论题即是真实性尚待证明的那个命题，论据是在证明中所引用的已知的、正确的判断，如公理、定理、性质等。

推理形式指论证过程，即证明的过程，是论据与论题之间的逻辑联系方式。

几何证明中一般采用演绎推理，有时也采用归纳推理。

## 第二节　推　　理

推理是从两个或几个判断中获得一个新判断的逻辑方法。

任何一个新的判断，总是从几个别的判断中推导出来的，这某几个判断就叫做前题（也称题设），而得到的新的判断叫做结论。

推理是一种逻辑思维活动，必须遵守形式逻辑的基本规律，即同一律、矛盾律、排中律和充足理由律，充足理由律是推理的逻辑基础。

推理一般可分为演绎推理和归纳推理两种。

演绎推理：以一般的原理原则为前提，推到某个特殊的场合作出结论，是由一般到特殊的推理方法。

归纳推理：以若干场合的特殊情形为前提，推出关于全部对象的一般结论，是从特殊到一般的推理方法。

归纳推理又分完全归纳法和不完全归纳法。完全归纳法是从列举

对象的一切特殊情形作出一般结论的归纳推理，它是严格的、科学的。不完全归纳法则是从一个或几个(但不是全部)特殊情形而作出一般结论的归纳推理。如果是通过简单枚举又没有碰到矛盾事实，而作出一般结论的推理称之为枚举归纳法，枚举归纳法不能用来作为严格的、科学的证明，猜想的结论一般要由演绎法来证明。

如果是根据某一门类的一部分对象的本质属性和因果关系的研究，而作出关于这一门类的全部对象的一般结论的推理，称之为科学归纳法。科学归纳法是数学中较常用的证明方法，如数学归纳法。

## 第三节　几何证明的三段论法

演绎推理具有三段论式的形式。

三段论法就是从两个判断得出第三个判断的一种推理方法。

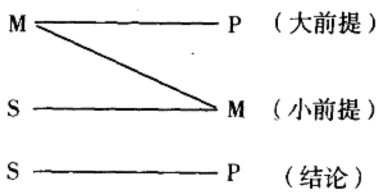
三段论法包含三个判断：第一个判断提供了一般的原则，叫做大前提。第二个判断指出了一个特殊情形，叫做小前提。联合这两个判断说明一般原则与特殊情形间的关系而作出的第三个判断，叫做结论。

例如：所有等边三角形是相似的。　　　　　(大前提)

　　$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是等边三角形。　　(小前提)

　　所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是相似的。　　(结论)

在三段论式中只有三个不同的名词，每个重复出现两次；在两个前提中各出现一次，而在结论中不出现的名词，叫做中词，用 $M$ 表示；除了中词以外，大前提的另一个名词，叫做大词，用 $P$ 表示；小前提的另一个名词叫做小词，用 $S$ 表示。所以三段论最常见的结构形式为



简单地说，三段论法就是“全体概括个体，属性包括属性”。

如：凡平行四边形（$M$）的对角线都互相平分（$P$）。

每个矩形（$S$）都是平行四边形（$M$）。

所以矩形（$S$）的对角线互相平分（$P$）。

这里 $P$ 是 $M$ 的属性，而 $M$ 又是 $S$ 的属性，所以 $P$ 也是 $S$ 的属性。

在数学中为了叙述简便，很少使用三段论法的完整形式，而往往使用它的省略形式。但推理采用省略形式时，并不是常常可以看出它的正确与否，只有把它恢复成完整的三段论式，才能帮助我们发现推理中的错误。

**例 1** （割线定理）自⊙$O$ 外一点 $P$ 引其两条割线与⊙$O$ 分别交于 $A$、$B$ 和 $C$、$D$，求证：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$。

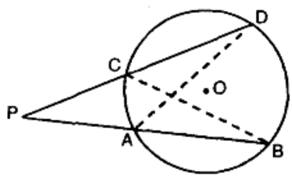



图 1－1

**证明：**

1. 过平面上不同的两点可以作一直线。

   $A$、$D$，$B$、$C$ 分别是不同的两点

   ∴ 可以连结 $AD$ 及 $BC$。

2. 在同圆中，同弧所对的圆周角相等。

   $\angle B$、$\angle D$ 同是⊙$O$ 中$\overparen{AC}$所对的圆周角

   ∴ $\angle B = \angle D$。

3. 有两组对应角相等的两个三角形相似。

   在 $\Delta PAD$ 与 $\Delta PCB$ 中，$\angle B = \angle D$，$\angle P$ 公用

   ∴ $\Delta PAD \backsim \Delta PCB$。

4. 两个相似三角形的对应边成比例

$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$

$\therefore \quad PA:PC = PD:PB$。

5. 比例式的外项之积等于内项之积

$PA:PC = PD:PB$,

$\therefore \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$。

这是用三段论的完整形式证明的割线定理,而在平常我们用的都是省略形式,完整形式可以帮助我们在复查中发现不经意的错误。

我们再来看一例:

**例 2　证明**　两条对角线互相平分的四边形是平行四边形。

已知四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC \cap BD = O$ 且互相平分。

求证:四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

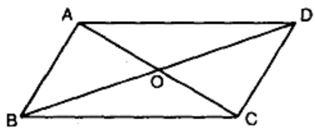



图 1-2

**证明:**

1. 对顶角相等。

$\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 是对顶角。

$\therefore \quad \angle AOB = \angle COD$

2. 两边和夹角对应相等的两个三角形全等。

$AO = CO$(已知),$\angle AOB = \angle COD$(已证),$BO = DO$(已知),

$\therefore \quad \triangle AOB \cong \triangle COD$。

3. 两个三角形全等,则对应边相等、对应角相等。

$\triangle AOB \cong \triangle COD$,$\angle ABO$ 与 $\angle CDO$ 为对应角,$AB$ 与 $CD$ 为对应边。

$\therefore \quad \angle ABO = \angle CDO$,$AB = CD$。

4. 内错角相等,二直线平行。

$\angle ABO$ 与 $\angle CDO$ 是 $AB$、$CD$ 被 $BD$ 截得的内错角且相等。

$\therefore \quad AB \parallel CD$。