高中新课标

◎根据教育部最新教材编写◎

教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI QUANJIE

总主编／薛金星

高中数学

选修 4–5

配套人民教育出版社实验教科书

B版

陕西人民教育出版社

高中新课标

根据教育部最新教材编写

中学教材全解

高中数学选修 4-5

配套人民教育出版社实验教科书B版

总 主 编　薛金星

本册主编　曹兴波

　　　　　孙秀丽

副 主 编　张玉太

　　　　　赵培昌

　　　　　杨文忠

陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解.高中数学:选修/薛金星主编;曹兴波分册主编.--西安:陕西人民教育出版社,2005.3

ISBN 7--5419-9462-6

Ⅰ.中… Ⅱ.①薛…②曹… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第028956号

中学教材全解

高中数学选修4-5

配套人民教育出版社实验教科书B版

陕西人民教育出版社出版发行

(西安市长安南路181号)

各地书店经销　　北京市昌平兴华印刷厂印刷

890×1240毫米　32开本　10印张　320千字

2006年3月第1版　2006年3月第1次印刷

ISBN 7--5419--9462-6/G·8250

定价:15.80元

出版前言

《中学教材全解》系列丛书根据教育部最新教材编写。值此出版之际，我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光，帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其他同类书相比具有以下几个鲜明特色：

第一，新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据，以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材，步步推进，设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸，逐次深入。其三是题型（材料）新。书中选用的题型（材料）都是按中考、高考要求精心设计挑选的，让读者耳目一新。

第二，细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法，变通训练，总结规律。

第三，精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，精讲精析，使学生举一反三，触类旁通。其次是问题设置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四，透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材，立足于教材，又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行，注重知识"点"与"面"的联系，"教"与"学"的联系。再次是对问题讲解得透，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五，全。

首先是知识分布全面。真正体现了"一册在手，学习内容全有"的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生，丛书内容由浅入深，由易到难，学生乐学易练，学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到出版，精心设计，细致操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

薛金星于北师大

目 录

数材全解

第一章

不等式的基本性质和证明的基本方法

本章综合解说

1. 本章在学科知识中的地位与重要性

不等关系是客观世界中广泛存在的一个基本关系，各种类型的不等式在现代数学的各个分支及实际应用中起着十分重要的作用，不等量关系和等量关系是两种基本的数学关系，建立不等观念，处理不等关系与处理等量问题是同样重要的，它们在数学研究和数学应用中起着重要作用，不等式与数、式、方程、函数、三角等内容有密切的联系，讨论方程与方程组解的情况，研究函数的定义域、值域、单调性、最大值、最小值，讨论线性规划问题等，都经常用到不等式的知识，在解决各类实际问题时不等式也有着广泛的应用，可见，不等式的有关知识在中学数学里占有十分重要的地位，是进一步学习数学的基础.

2. 本章主要内容

本章教材是在初中介绍了不等式的概念，

学习了一元一次不等式、一元一次不等式组，高中数学必修5学习了一元二次不等式，二元一次不等式组的基础上，对不等式问题的进一步学习．本章内容分为五个部分，第一部分是复习与回顾不等式的基本性质和一元二次不等式的解法，首先通过实数和数轴的一一对应给出了比较实数大小的方法，通过不等号沟通了实数大小的几何意义和代数定义的联系，在这个基础上回顾了不等式的一些基本性质，一元一次和一元二次不等式的解法．第二部分首先证明了重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$．通过这一关系，得出了描述算术平均数和几何平均数关系的一个不等式(基本不等式)，给出了基本不等式的几何背景，介绍了一般形式的算术－几何平均值不等式(简称平均值不等式)．第三部分介绍了 $|ax+b|\leqslant c$，$|ax+b|\geqslant c$，$|x-a|+|x-b|\geqslant c$，$|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的解法，给出了解这些不等式的一般步骤和几种常用解法：分类讨论法、几何解法和图象解法．第四部分讲绝对值的三角不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，给出了等号成立的充分必要条件．第五部分讲不等式证明的基本方法．通过典型例题介绍了证明不等式的五种基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法和放缩法．

本章的重点是求解绝对值不等式，以及运用证明不等式的基本方法解题．通过本章的学习，学生将掌握一些简单不等式(如一元一次、

一元二次不等式、绝对值不等式)的解法，掌握证明不等式的基本方法，在求解和证明过程中充分体会不等式的几何背景和意义.

3. 本章知识与社会热点、生产生活、科技前沿等方面的联系和体现

不等式在现实生活中有着十分广泛的应用，它在化学试验、建筑设计、环保问题、科学试验等各个方面都有着十分广泛的应用. 在各个领域内均有应用.

4. 学法建议

1. 本章前两节内容基本属于知识回顾，所体现的新东西主要是数学思想和数学理念的转变，因此在复习中不做重点讲解.

2. 在利用代数法解带绝对值的不等式时要特别注意去绝对值的方法. 代数解法的好处是“程序化”程度高，能解的不等式种类全，坏处是往往计算和分类过于烦琐. 几何解法的好处是直观、简单，坏处是对很多不等式失效. 因此，一方面要提倡学生使用几何解法，另一方面要提醒学生注意题目条件，不能盲目使用几何解法.

3. 注意联系几何背景解释绝对值三角不等式.

4. 不等式证明的五种基本方法是同等重要的. 在同一题目中经常可以使用多种不同方法解或证明. 因此学生掌握这些证明方法时注意融会贯通，因题而异，选择最适当的方法解题.

1.1　不等式的基本性质和一元二次不等式的解法

新课标导学

一、学习目标

1. 知识与技能

通过本节学习,掌握不等式的基本性质,并用于比较大小,会解一元一次不等式和一元二次不等式并能从实际情境中抽象出一元二次不等式的模型来解决实际问题.

2. 过程与方法

教材先利用实数与数轴上的点之间的一一对应关系,得出了实数与实数的大小比较方法——作差法;再回顾了不等式的基本性质,通过例题,利用不等式的基本性质进行数的大小比较;又回顾了一元一次不等式的定义及解法;一元二次不等式的解法及一般的规律,最后是利用不等式的有关性质,建立一元二次不等式的模型来解决实际的问题.

3. 情感、态度与价值观

通过本节课的学习,可以培养我们掌握不等式的基本性质,不等式的解法(一元一次不等式,一元二次不等式)尤其是一元二次不等式的解法的一般规律和利用图形解决问题,分析问题的技巧,会把实际问题转化为一元二次不等式的建模的思想.加强数与形的结合和实际问题与不等式相结合的数学方法.进一步加强数学与"几何"的联系,培养学生学习数学的信心.

二、相关知识链接

1. 一元一次不等式的解法.

2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与 x 轴的交点及图象.

3. 一元二次不等式的解法.

4. 不等式的基本性质.

5. 实数的大小比较.

教材知识全解

一、知识点全解

知识点 1　实数大小的比较

设 a,b 为两个实数,它们在数轴上的点分别记为 A,B.如果 A 落在 B 的右边,则称 a 大于 b,记作 $a>b$;如果 A 落在 B 的左边,则称 a 小于 b,记作 $a<b$;如果 A 与 B 重合,则称 a 与 b 相等,记作 $a=b$,这样,对于任何两个实数 a、b 它们有且只有以下三

种情况之一成立，$a>b$，$a=b$，$a<b$，于是有：

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$，

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$，

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$，这是我们比较两个实数大小的基本方法，方法是作差. 如果 $a-b>0$，则 $a>b$. 如果 $a-b=0$ 则 $a=b$；如果 $a-b<0$ 则 $a<b$.

例 1 比较 x^2-x 与 $x-2$ 的大小.

解：作差 $(x^2-x)-(x-2)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$.

因为 $(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $(x-1)^2+1>0$，即 $(x^2-x)-(x-2)>0$，

于是 $x^2-x>x-2$.

例 2 当 p、q 都为正数且 $p+q=1$ 时，试比较代数式 $(px+qy)^2$ 与 px^2+qy^2 的大小.

解：作差：$(px+qy)^2-(px^2+qy^2)=p(p-1)x^2+q(q-1)y^2+2pqxy$.

因为 $p+q=1$，所以 $p-1=-q$，$q-1=-p$.

因此 $(px+qy)^2-(px^2+qy^2)=-pq(x^2+y^2-2xy)=-pq(x-y)^2$，

因为 p，q 为正数，所以 $-pq(x-y)^2\leqslant 0$，

因此 $(px+qy)^2\leqslant px^2+qy^2$，当且仅当 $x=y$ 时，不等式中的等号成立.

知识点 2 不等式的基本性质

通过以前的学习，我们知道不等式有以下的基本性质.

(1) 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2) 传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

(3) 加(减)：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$；$a>b \Rightarrow a-c>b-c$.

(4) 乘(除)：$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

(5) 乘方：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$，其中 n 为正整数，且 $n\geqslant 2$.

(6) 开方：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，其中 n 为正整数，且 $n\geqslant 2$.

(7) 相加：$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(8) 相乘：$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

温馨提示

(1) 以上这些性质是我们解不等式和证明不等式的基础和出发点，关于不等式的证明和推导，大多依赖于以上的不等式的性质。

(2) 在应用时要特别注意，除(1)外其余的性质并不等价，不能逆用，在逆用时要注意条件.

(3) 在 $a>b$，$c>d$ 时，$a-c>b-d$ 或 $a-c<b-d$ 均不一定成立. 在 $a>b>0$，$c>d>0$ 时，$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ 或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$ 也不一定成立.

例3　已知 $a>b$，则下列不等式① $a^2>b^2$，② $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，③ $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 中，不成立的个数为（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

解析：要判定不等式是否成立，应先作差，然后进行因式分解或通分以便于大小的比较. 对于①∵ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 且 $a-b>0$，但 $a+b$ 的正负无法确定；对于②∵ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ 且 $a-b>0$，但 ab 的正负无法确定；对于③∵ $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{(a-b)a}$ 且 $(a-b)>0$，但由于 $\frac{b}{a}$ 的正负无法确定所以这三个不等式都无法确定是否成立，因此选择D.

答案：D

例4　已知：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{\alpha+\beta}{2}$、$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的取值范围.

解：∵ $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，

∴ $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ ①，$-\frac{\pi}{2}<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ ②，$\alpha<\beta$ ③，

∴ ①+②得 $-\pi<\alpha+\beta<\pi$，

∴ $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

又由②可得 $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\beta<\frac{\pi}{2}$ ④，

所以由①+④得 $-\pi\leqslant\alpha-\beta<\pi$，

又 $\alpha<\beta$，∴ $\alpha-\beta<0$，

∴ $-\pi\leqslant\alpha-\beta<0$，∴ $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

两个不等式相减时，不能直接相减，而要转化为同向相加：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$，同时要注意，在本题中的 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$ 两边均不能取等号，而在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$ 中左边可以取等号，这些在解题时要特别注意，不能出错.

知识点3　一元一次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高项数是一次的不等式叫做一元一次不等式.

一元一次不等式的解集为：$ax+b>0$　① $a>0$ 时，$x>-\frac{b}{a}$；② $a<0$ 时，$x<-\frac{b}{a}$；

③ $a=0$ 时，解集为 $\begin{cases}\mathbf{R}(b>0),\\ \varnothing(b\leqslant0).\end{cases}$

温馨提示

对于形式不是 $ax+b>0(<0)$ 形式的不等式可以先化为这种形式的不等式再解不等式. 若 a 的值不确定对,要进行讨论.

例 5 解不等式 $ax-b>3-2x$.

解:原不等式可以变形为 $(a+2)x>3+b$.

当 $a<-2$ 时,$a+2<0$,原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3+b}{a+2}\right\}$.

当 $a=-2$ 时,原不等式变形为 $b+3<0$,若 $b<-3$ 时,解集为 $\mathbf{R}$,$b\geqslant-3$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$;当 $a>-2$ 时,有 $a+2>0$,这时原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{3+b}{a+2}\right\}$.

知识点 4 一元二次不等式

含有一个未知数,并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式,一般形式为 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$,[说明:如果 $a<0$ 时,可先利用不等式的基本性质化二次项系数为正,并注意把不等号的方向做相应的变换], 一元二次不等式,二次函数和一元二次方程它们之间相互联系. 其关系为:对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解法,设判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

(1)当 $\Delta>0$ 时,一元二次方程 $ax^2+bx+c>0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2,设 $x_1<x_2$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上和 x 轴交于两个点 x_1、x_2(如图 1-1-1)即函数 $y=ax^2+bx+c$ 以 x_1,x_2 为零点.

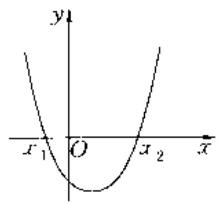


图 1-1-1

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时抛物线的图象在 x 轴上方,即 $ax^2+bx+c>0$;当 $x_1<x<x_2$ 时,抛物线的图象在 x 轴下方,即 $ax^2+bx+c<0$,所以,不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x>x_2$ 或 $x<x_1\}$;不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$.

(2)当 $\Delta=0$ 时,方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相同的实数根,$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$,这时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点,即函数 $y=ax^2+bx+c$ 有一个二重零点. 当 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ 时,抛物线图象在 x 轴上方,(如图 1-1-2),即 $ax^2+bx+c>0$.所以这时不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$,不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$.

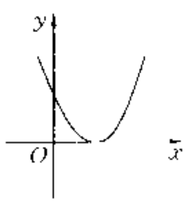


图 1-1-2

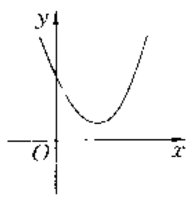
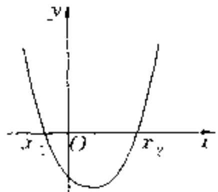
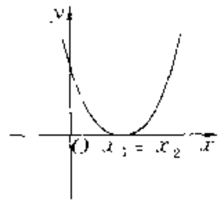
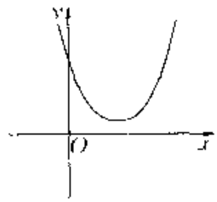


图 1-1-3

(3) 当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c>0$ 没有实数根，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点(如图 1-1-3)即函数 $y=ax^2+bx+c$ 没有实数根，这时抛物线的图象在 x 轴上方. 所以这时不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为全体实数，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集.

列表如下：

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个不等的实根 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$	有两个相等的实根 x_1,x_2 且 $x_1=x_2$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1,或\ x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\|\,x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

例 6 解下列不等式

(1) $1-x-4x^2>0$；(2) $x^2+4x+4>0$；(3) $-2x^2+4x-3>0$.

解：(1) 原不等式可以化为 $4x^2+x-1<0$，因为 $\Delta=1-4\times4\times(-1)=17>0$，所以方程 $4x^2+x-1=0$ 的两根为 $x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$，所以不等式 $1-x-4x^2>0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{-1-\sqrt{17}}{8}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right\}$.

(2) 因为 $\Delta=4^2-4\times1\times4=0$，所以原不等式可以化为 $(x+2)^2>0$，所以原不等式的解集为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\ 且\ x\neq-2\}$.

(3) 原不等式可以化为 $2x^2-4x+3<0$，因为 $\Delta=(-4)^2-4\times2\times3=-8<0$，所以方程 $2x^2-4x+3=0$ 没有实数根，所以不等式 $-2x^2+4x-3>0$ 的解集为 $\varnothing$.

例 7 求函数 $y=\sqrt{2x^2+x-3}+\log_2(3+2x-x^2)$ 的定义域.

解：由函数 y 的解析式有意义，得 $\begin{cases}2x^2+x-3\geqslant0,\\3+2x-x^2>0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(2x+3)(x-1)\geqslant0,\\(x-3)(x+1)<0.\end{cases}$

$\therefore$ 有 $\begin{cases}x\leqslant-\dfrac{3}{2}或\ x\geqslant1,\\-1<x<3,\end{cases}$ $\therefore$ 有 $1\leqslant x<3$.

所以所求函数的定义域为[1,3).

知识点 5 解含有参数的一元二次不等式

在解含有参数的不等式时,要对参数进行讨论,关键是求出一元二次方程的根并进行根的大小比较.

例 8 解下列关于 x 的方程(1)$x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$.(2)$x^2+(1-a)x-a<0$.

解:(1)方程 $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$ 的两根为 $x_1=m$, $x_2=m+1$, 又知 $m<m+1$ 总成立,所以原不等式的解集为$\{x|m<x<m+1\}$.

(2)方程 $x^2+(1-a)x-a=0$ 的两根为 $x_1=-1$,$x_2=a$,所以有①当 $a<-1$ 时,原不等式的解集为$(a,-1)$;②当 $a=-1$ 时,原不等式的解集为$\varnothing$;③当 $a>-1$ 时,原不等式的解集为$(-1,a)$.

例 9 若不等式$\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m-1)x+9m+4}>0$对任意实数 x 都恒成立,求 m 的取值范围.

解:$\because x^2-8x+20=(x-4)^2+4>0$,

$\therefore$ 要使不等式$\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m-1)x+9m+4}>0$ 对任意实数 x 恒成立,总要有 $mx^2+2(m-1)x+9m+4>0$ 对任意实数 x 恒成立即可.

(1)当 $m=0$ 时,$-2x+4>0$,$x>2$,此时原不等式仅对于 $x>2$ 成立,

$\therefore$ $m=0$ 时不符合题意.

(2)当 $m\neq0$ 时,使不等式对任意实数 x 恒成立,需有 $\begin{cases}m>0\\ \Delta<0\end{cases}$,

解得 $m>\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8}$.

$\therefore$ m 的取值范围是$m>\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8}$,即$\left\{m\left|m>\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8}\right.\right\}$.

二、教材题目研究

例 10 (课本 P2 例)已知 $ab\neq0$,$a>b$,试比较$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$的大小.

分析:在本题的已知条件中,已知 $ab\neq0$,$a>b$,但不知 a 与 b 的符号及 ab 的正负,可以在作差之后,对 ab 分两种情况 $ab>0$,$ab<0$ 进行讨论.

解:要比较$\dfrac{1}{a}$与$\dfrac{1}{b}$的大小,只需要考虑它们的差就可以了,因为$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$

并且 $a>b$,即有 $b<a$,所以 $b-a<0$,则$\dfrac{b-a}{ab}$的取值有两种情况:

(1)如果 $ab>0$,则$\dfrac{b-a}{ab}<0$,即$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}<0$,所以$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

(2)如果 $ab<0$,则$\dfrac{b-a}{ab}>0$,则$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0$,所以$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

点评

比较大小的一般作法是先作差，再判断差与0的大小关系，若 $a-b>0$，则 $a>b$；若 $a-b<0$，则 $a<b$；若 $a-b=0$，则 $a=b$；在含有不确定量时要进行讨论，讨论一定要全面.

变式引申：1. 已知 a、b 为正实数，试比较 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

解法 1：$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$.

∵ a、b 为正实数，∴ $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{ab}>0$，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

于是有 $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

∴ $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

解法 2：$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}$，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$.

∴ $\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-a-b=\frac{a^3+b^3-ab(a+b)}{ab}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}$.

∵ a，b 为正实数，∴ $\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$，于是 $\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

又 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，

∴ $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

2. 已知实数 a、b、c、d 满足条件 $\begin{cases}d>c, & ①\\ a+b=c+d, & ②\\ a+d<b+c,& ③\end{cases}$ 将 a、b、c、d 按照从小到大的顺序排列起来.

解：由③可知，$a+d<b+c\Rightarrow d-b<c-a=b-d$，即 $d-b<b-d$，∴ $d<b$.

由②和 $d<b$ 可知，$a<c$，由①和 $d<b$，$a<c$ 可知，$a<c<d<b$.

例 11 (课本 P4 例 1)解不等式 $\frac{x-4}{2}-3(x+1)<(x+2)-14$.

分析：本题可化为关于未知数 x 的一元一次不等式.

解：不等式两边同乘以 2，得 $(x-4)-6(x+1)<2(x+2)-28$，

即$-5x-10<2x-24$.

移项整理,得$-7x<-14$.

两边同时乘以$-\frac{1}{7}$,不等号的方向改变,得$x>2$.

所以原不等式的解集为$\{x|x>2\}$.

点评

本题的解法关键是利用不等式的基本性质对不等式进行化简变形.在两边同时乘以$-\frac{1}{7}$时,要注意不等号的方向要改变,它所依据的是不等式的基本性质:$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.解题中应特别注意,也可以利用不等式的两边同时除以-7,这时不等号的方向也要改变,这时依据不等式的基本性质中$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$的变形,$a>b,c<0\Rightarrow\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.可化为一元一次不等式的不等式还有其他的形式.解题要注意先化简,变形,再求解.

变式引申:解关于x的不等式$\frac{4x+5}{3}-2(x+2)\geqslant-5(x-1)$.

解:不等式两边同时乘以3,得$4x+5-6(x+2)\geqslant-15(x-1)$,

即$-2x-7\geqslant-15x+15$,移项整理,得$13x\geqslant22$.

不等式两边同时乘以$\frac{1}{13}$,得$x\geqslant\frac{22}{13}$.

$\therefore$原不等式的解集为$\left\{x\left|x\geqslant\frac{22}{13}\right.\right\}$.

例12　(课本P5例3)某保险公司为提高员工的计算机水平,委托一计算机培训公司培训员工.培训公司将按照课程深度的进展以及教学设备的逐步升级而提高授课费用.具体为:完成整个培训需时70天,将整个培训分为7个阶段,每阶段培训10天.第一阶段培训费用为8 000元,而后每阶段比前一阶段增加培训费1 000元,并且每个阶段一旦开始就要完成,不能只进行半个阶段的培训就停止.

由于保险公司考虑到员工不需要非常深入的计算机知识技能,以及考虑到培训资金有限,因而不准备完成整个培训.现保险公司为员工提供的培训资金为60 000元,则员工最多能够接受几个阶段的培训?

分析:本题是从实际情境中抽象出一元二次不等式模型,利用一元二次不等式来解决实际问题.

解:这7个阶段的培训费用是一个等差数列,第x个阶段的培训费用为$8\,000+(x-1)\times1\,000$,若设员工接受x个阶段的培训,则总培训费用为$\frac{8\,000+[8\,000+(x-1)\times1\,000]}{2}\cdot x$,因此,我们有不等式

$\frac{8\,000+[8\,000+(x-1)\times1\,000]}{2}\cdot x\leqslant60\,000$,即$x^2+15x-120\leqslant0$,