中国教育电视台上榜品牌

高二同步课堂（上）

三维设计

——从这里　你可以跳得更高

数学

（学生用书）

光明日报出版社

四 方联动 SIFANGLIANDONG

打击盗版 依法维权

图书在版编目（CIP）数据

三维设计·高二数学（上）/孙翔峰主编

—北京：光明日报出版社 2005.11

ISBN 7-80206-159-8

Ⅰ.高… Ⅱ.孙…

Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 126532 号

出版发行　光明日报出版社

地　　址　北京市崇文区珠市口东大街 5 号

联系电话　010-67078258

经　　销　全国新华书店

印　　刷　山东肥城新华印刷有限公司

版　　次　2005 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

开　　本　880mm × 1230mm　1/16

印　　张　123　　字 数　4920 千字

书　　号　ISBN 7-80206-159-8

全套定价　196.80 元

两地名师 LIANGDIMINGSHI

联袂打造 铸就华章

学科主编 徐 辉

（特级教师 黄冈中学学科带头人）

本册主编 李同安 张少华

副主编 吴玉山 陈汉瑞 李安国 逯桂兰 曹国莹 张群生 王相云 韩海格 严 瑞 解体国 聂景伟 孙昭秋

“滚滚长江东逝水，浪花淘尽英雄……”

长江怀抱内的黄冈，人杰地灵，英才辈出。黄冈教育堪称神话，黄冈试题号称秘笈，黄冈中学犹如镶嵌在鄂中大地的一颗明珠，为做到资源共享，我们走进了黄冈……

“黄河之水天上来，奔流到海不复回……”

黄河的雄浑，泰山的灵气，孔孟的哲理孕育了富有内涵、思辩、沉稳、创新的山东教育。教育大省、教育强省、课改前沿成就了山东教育在全国的领跑地位，齐鲁名师功不可没……

《三维设计》集南方之灵秀，北方之厚重，揉智巧与广博于一体，融内涵与经典于一身，历经春秋潜心著，开卷有益智慧出。

三维设计

SANWEISHEJI

三维设计 SANWEISHEJI

引领新潮 舍我其谁

编者儒雅，以研为乐；学者如渴，以思为悦。

K 快乐学习每一天

SANWEISHEJI

《三维设计》的编写突出一个“新”字，即新理念，新思路，新体例，新内容。“新”的最核心最为闪亮的是“贴近”，是与千百万学生贴近再贴近。最新课改精神明示我们，在教学过程中，要明确学生的主体地位，把握先进的教育理念，突出课程设计的三个维度——知识与能力，过程与方法，情感、态度与价值观，展现课堂教学的三维模式——学生、教师、文本之间的对话，呈现教学过程中点、线、面的三维连接。基于此，《三维设计》应运而生，它将为备考途中的莘莘学子“点一下，扶一把，送一程”，为正在披荆斩棘的师生们扬鞭呐喊，策马助威。

卷首语

金字塔的建造者，不会是奴隶，应该是一批欢快的自由人！第一作出这种预言的是瑞士钟表匠塔·布克。

塔·布克原是法国的一名天主教信徒，1536年因反对罗马教廷的刻板教规，被捕入狱。由于他是一位钟表大师，入狱后，被安排制作钟表。在那个失去自由的地方，他发现无论狱方采取什么高压手段，都不能使他制作出日误差低于1/10秒的钟表，而在入狱前的情形却不是这样，那时，他在自己的作坊里，都能使自己的钟表日误差低于1/100秒。为什么会出现这种情况呢？他发现真正影响钟表准确度的不是环境，而是制作钟表时的心情。对金字塔的建造者，他之所以能得出自由人的结论，就是基于他对钟表制作的那种认识。金字塔这么大的工程，被建造得那么精细，各个环节被衔接得那么天衣无缝，建造者必定是一批怀有虔诚之心的自由人。真难想象，一批有懈怠行为和对抗思想的人，能让金字塔的巨石之间连一个刀片都插不进去……

由此，我们得到启示：在过分指导和严格监管的地方，别指望有奇迹发生，因为人的能力，惟有在身心和谐的情况下，才能发挥到最佳水平。上足劲的发条，很容易有绷断的危险……

《三维设计》为你松一松生命之钟的发条

高中生活被同学们形象地比作“爬坡”，在这三年中，稚嫩的肩膀要承受过多的负荷，父母的反复暗示、师长的循循善诱、平日的书山题海成为学生们成长中不能承受的重、不能拒绝的重、不能逃避的重。多少人把高中生活描绘成“天空是灰色的，生活是单调的，思想是被动的，人是机械性的……”。紧张、繁重的学习生活使得学生们就像不断被抽打而拼命旋转的陀螺——不能喘息。

作为服务教育的我们，如何给中学生松绑、减负，激发同学们的学习兴趣，让学生成为学习上的“自由人”，最大限度地发挥他们的学习潜能，这是我们编者近几年一直在思考的问题，也是我们编写本丛书的初衷所在。纵观本丛书，在编写风格上我们更多地注入了对学生的人文关怀、对学习兴趣的培养、对潜能的激发，我们要把学习中的快乐带给学生，让快乐与美好犹如风中的花粉，带给学生们一缕愉悦，一份甜畅。

本丛书与其它同类教辅相比，具有以下突出特色：

一、超脱的编写理念

本丛书突破以往的传统编写模式，以突出学生在课堂学习中的主体地位，充分调动学生的自我参与意识、自我提高意识、自我评价意识，以培养和锻炼学生学习的自主性、独立性、能动性、创造性为编写目的，力争带给学生一种新奇、一种高效，帮助学生跨越课堂学习的限制，进入另外一个时间、空间，分享另外一种学习方式。

二、全新的编写体例

本丛书针对新的课程标准、新的考纲以及学生的实际学情，全面均衡，重新定位，设置了令人耳目一新的编写体例。它将使枯燥的课堂变得异常活跃，使上课听讲、课下学习变成完美的乐符，激发学生的学习活力，让知识立意向能力立意转化变得自然、轻松。

三、精妙的习题设置

跳出题海战术，力避陈题怪题，选题注重新颖性、典型性，科学的专项训练就像游戏闯关一样，更具趣味性，使学生的自学生活变得更充实、更轻松、更快乐。高考仿真化的测试使学生身临其境，就像在高考考场一样，自我评估，使学生信心倍增，真正体会信息多变的高考生活，挑战高考，挑战高分。

本书不仅仅是一种创新，而是一套行之有效，基于整合传统学习方法的精华之作，学、练、测三位一体完美的结合，更有效地发挥了科学备考的能动性。学完本书后，你会发现一种“奇”、一种“妙”、一种“美”和一览众山小的“博大”。你体会到的将是惬意和快乐！

没有年轻人心甘情愿困在自己的时间和空间里；
没有年轻人心甘情愿咀嚼早已过时的知识；
没有年轻人喜欢学习，生活千篇一律；
没有年轻人喜欢学习痛苦低效……

捧起本书，你会拥有一个默默无闻的朋友，永远坚定地站在你身边，支持你、鼓励你、鞭策你、启迪你，用它的优美、它的睿智、它的广博、它的深邃慢慢润泽你的心灵，让你的学习生活有张有弛，以最佳的心态学出精彩，发挥最佳水平。

《三维设计》丛书编委会

2006年夏

目录 Contents

目录 Contents

第六章 不 等 式

§6.1 不等式的性质

第一课时

新知花絮

生活中有这么一个事例：某种食品的价格随季节经常变动，有两户居民，一户居民每次都买1斤食品，买两次价格不同；另一户居民同期也买两次食品，但每次只买1元钱的食品，问这两户居民哪一家买的便宜？要回答这个问题，实际就是比较两户居民购买食品的平均价格哪家更低，也就是比较两个量，哪个量更小。

课前学习探究
自主学习，挑战自我！

认知所……（做好准备！）

1. 实数与数轴上的点是________的，在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大。

2. $a-b>0\Leftrightarrow$________，$a-b<0\Leftrightarrow$________，$a-b=0\Leftrightarrow$________。

3. 用"作差比较法"比较两个代数式的值的大小步骤是：____________________。

强化站……（打好基础！）

1. 设 $a=3x^2-x+1$，$b=2x^2+x$，则 ( )

A. $a>b$　　B. $a<b$

C. $a\geqslant b$　　D. $a\leqslant b$

2. 已知 a、b 分别对应数轴上的 A、B 两点，且 A 在原点右侧，B 在原点左侧，则下列不等式成立的是 ( )

A. $a-b\leqslant 0$　　B. $\frac{a}{b}>-\frac{a}{b}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2+b^2\geqslant -2ab$

3. 若 $m>1$，$n<1$，则下列两式的大小关系是 $mn+1$________$m+n$.

课堂师生互动
师生互动，举一反三！

讲题库……（做好引导！）

例1 已知 $x>3$，比较 x^3+11x 与 $6x^2+6$ 的大小.

【解】 $x^3+11x-(6x^2+6)=x^3-3x^2-3x^2+11x-6$

$=x^2(x-3)+(-3x+2)(x-3)$

$=(x-3)(x^2-3x+2)=(x-3)(x-2)(x-1)$.

由 $x>3$，得 $(x-3)(x-2)(x-1)>0$，从而 $x^3+11x>6x^2+6$.

【点评】 比较 a 与 b 的大小，归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意是指差的符号，至于差的值究竟是多少，在这里无关紧要)．比较 a 与 b 大小的步骤是：①作差；②变形(分解因式或配方)；③判断差的符号.

例2 设实数 x,y,z 满足 $y+z=6-4x+3x^2$，$z-y=4-4x+x^2$，试确定 x,y,z 间的大小关系.

【解】 $\because z-y=4-4x+x^2=(x-2)^2\geqslant 0$，$\therefore z\geqslant y$.

又 $\because y-x=\frac{1}{2}[(y+z)-(z-y)]-x$

$=\frac{1}{2}[(6-4x+3x^2)-(4-4x+x^2)]-x$

$=1+x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$.

$\therefore y>x$.

综上可知 $z\geqslant y>x$.

【点评】 比较两个代数式的大小，作差后在变形的过程中有分解因式(如例1)，有时写成几个非负数或非正数的和的形式(如本例)，有时这两者结合起来用.

例3 比较 $2m^2+3m-1$ 与 m^2+4m-1 的大小.

【解】 $(2m^2+3m-1)-(m^2+4m-1)=m^2-m=m(m-1)$.

(1)当 $m=0$ 或 $m=1$ 时，$2m^2+3m-1=m^2+4m-1$；

(2)当 $0<m<1$ 时，$2m^2+3m-1<m^2+4m-1$；

(3)当 $m<0$ 或 $m>1$ 时，$2m^2+3m-1>m^2+4m-1$.

数学名言(一) ■Few, but ripe. ——Gauss □宁可少些，但要好些．——高斯

■Give me a place to stand on and I will move the earth. ——Archimedes

□给我一个立足点，我就可以移动这个地球！——阿基米德

■God eternally geometrizes. ——Plato □上帝永远在进行几何化．——柏拉图

【点评】 本题在作差变形后发现大小关系完全取决于 m 的范围,因而分类讨论便是必然的解法了,此时要使分类合理恰当,关键在于找到"零点".

▶▶▶拓展固 (解好落实)

1. (例1变式)比较 $(x^2+7)(x^2+9)$ 与 x^4+64 的大小,其中 $x>\frac{1}{4}$.

2. (例2变式)已知 $a\in\mathbf{R}$ 且 $x+y=1+a+a^2$, $x+z=2+3a^2$, $y+z=1+a+2a^2$,试比较 x、y、z 的大小.

3. (例3变式)已知 $x>y$ 且 $y\neq 0$,比较 $\frac{x}{y}$ 与 1 的大小.

课后演练拓展

(高效测评,拓展提能)

▶▶▶演练场 (练好本领)

1. 已知 $x>2$,则 ( )

A. $x^3+2>2x^2+x$　　B. $x^3+2<2x^2+x$

C. $x^3+2\leqslant 2x^2+x$　　D. 以上都不对

2. 若 $a<b<0$,则下列不等式关系中,不能成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

3. 已知 $a>b>c$,则 $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ 的值是 ( )

A. 正数　　B. 负数

C. 非正数　　D. 非负数

4. 给出以下判断:

①不等式 $x^2+1>1-x^2$ 是绝对不等式;②不等式 $x^2-2x+1>0$ 是条件不等式;③不等式 $|x|+1<\frac{1}{2}|x|$ 是矛盾不等式;④不等式 $\frac{1}{3}x-\frac{1}{x}>1$ 与 $\frac{2}{x}-x<2$ 是同向不等式.

其中正确的为 ( )

A. ①②　　B. ②③

C. ③④　　D. ①④

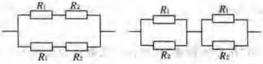
5. 若 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$, $M=x^2+y^2-4x+2y$, $N=-5$,则 M 与 N 的大小关系是 ( )

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M=N$　　D. 不能确定

6. 若 $f(x)=3x^2-x+1$, $g(x)=2x^2+x-1$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 $f(x)$ ________ $g(x)$.

7. 已知 R_1, R_2 是阻值不同的两个电阻,现分别按图①和图②连接,设相应的总阻值为 R_A, R_B,则 R_A 和 R_B 的大小关系是________.



①　　②

8. 比较 $1+2x^4$ 与 $2x^3+x^2$ 的大小.

SANWEISHEJI 三维设计 CHENGJIUMENGXIANG

数学名言(二) ■对笛卡儿来说,代数学居于数学其它各分支的最前列,它是逻辑的引申,是处理量的一门有用的学科,因而从这个意义上来说,它甚至比几何学还具有根本的意义.——M·克莱茵

■数学的本质在于其自由.乔治·康托 ■没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中开除出去.——希尔特

■他以几乎神般的思维力,最先说明了行星的运动和图象,彗星的轨道和大海的潮汐.——牛顿墓志铭

9. 已知 $a^2<9$，试比较 a^3 与 $9a$ 的大小.

10. 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1>0$，$a_3=b_3>0$，$a_1\neq a_3$. 试比较 a_5 和 b_5 的大小.

▶▶▶观摩亭……………………（瞄准重点！）

1.（2006年临沂二模）若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，设 $a=2-x\sin x$，$b=\cos^2 x$，则下式正确的是　（　）

A. $a\geq b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. $a>b$

2.（2006年潍坊一模）有一批货物的成本为 A 元，如果本月初出售，可获利100元，然后可将本利都存入银行，已知银行的月利息为2%；如果下月初出售，可获利120元，但货物存贮要付5元保管费，试问是本月初还是下月初出售好？并说明理由.

回味方法点悟

1. 比较任意两实数的大小，其一般步骤是：作差——变形——判断符号——结论. 其中变形是比较大小的关键，配方、因式分解是常用的手段. 为了便于判断"差式"的符号，常将"差式"变形为一个常数或几个因式积的形式，当所得"差式"是某个字母的二次三项式时，常用配方法判断符号（判断符号包括判断各项的符号与差的符号）.

2. 比较多个实数（代数式）的大小，可先用特殊值法判断出它们的大小，然后再进行证明. 特别地，对于选择题采用此法更有效.

3. 分类讨论法也是本课时出现的一个重要的数学思想方法. 若差的符号不确定，有时要根据两实数间的三种大小关系（大于、等于、小于）进行分类讨论.

第二课时

新知花絮

(1)如果甲的年龄大于乙的年龄，那么乙的年龄小于甲的年龄吗？为什么？

(2)如果甲的个子比乙高，乙的个子比丙高，那么甲的个子比丙高吗？为什么？我们这一课时就来回答这一问题.

课前学习探究　自主学习，挑战自我！

▶▶▶认知所……………………（做好准备！）

1. 如果 $a>b$，那么______；如果______，那么 $a>b$，即______. 用语言描述为：把不等式的左边和右边交换，所得不等式与原不等式______.

SANWEISHEJI　三维畅想　CHENGJIUMENGXIANG

无穷大　古希腊哲学家亚里士多德认为，无穷大可能是存在的，因为一个有限量是无限可分的，但是无限是不能达到的. 12世纪，印度出现了一位伟大的数学家布哈斯克拉，他的概念比较接近理论化的概念.
将8水平置放成"∞"来表示"无穷大"符号是在英国人沃利斯的论文《算术的无穷大》(1655年出版)一书中首次使用的.

2. 如果 $a>b$，且 $b>c$，则______，这就是不等式的______.

3. 如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$，反之，若 $a+c>b+c$，则 $a>b$，即 $a>b$ ______ $a+c>b+c$，即不等式的两边同加上或减去同一个数，不等号的方向______.

4. 如果 $a>b$ 且 $c>d$，则 $a+c>b+d$，即同向不等式具备可____性.

5. 如果 $a>b$ 且 $c>0$，则 $ac>bc$，如果 $a>b$ 且 $c<0$，则 $ac<bc$，即若不等式的两边同乘以一个正数，不等号的方向______；若不等式的两边同乘以一个负数，不等号的方向要______.注意：定理与 c 的符号____关，而与 a，b 的符号____关.

▶▶▶强化站……（打好基础！）

1. 若 $a>b>c$，则下列一定成立的不等式是 （ ）

A. $a|c|>b|c|$　　B. $ab>ac$

C. $a-|c|>b-|c|$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

2. 使 $a+b>2c$ 成立的一个充分条件是 （ ）

A. $a>c$ 或 $b<c$　　B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$

3. 用“>”，“<”填空：

(1)若 $a>b$，则 $-a$ ______ $-b$.

(2)若 $a<b$，$ab>0$，则 $\frac{1}{a}$ ______ $\frac{1}{b}$.

(3)若 $a>b>c>0$，则 $\frac{c}{a}$ ______ $\frac{c}{b}$.

(4)若 $0<a<b<1$，$n\in \mathbf{N}^*$，则 $\frac{1}{a^n}$ ______ $\frac{1}{b^n}$ ______ 1.

课堂师生互动

▶▶▶精题库……（精讲引导！）

例1 设 $2<x<5$，$4<y<10$，求：(1) $x-y$ 的范围；(2) $\frac{x}{y}$ 的范围.

【解】 (1) $\because 4<y<10$，$\therefore -10<-y<-4$.

$\because 2<x<5$，$\therefore 2-10<x-y<5-4$，$\therefore -8<x-y<1$.

(2) $\because 4<y<10$，$\therefore \frac{1}{10}<\frac{1}{y}<\frac{1}{4}$，$\because 2<x<5$，$\therefore 2\times\frac{1}{10}<x\cdot\frac{1}{y}<5\times\frac{1}{4}$，即 $\frac{1}{5}<\frac{x}{y}<\frac{5}{4}$.

【点评】 解决本题的关键是求出 $-y$ 与 $\frac{1}{y}$ 的范围，然后只要利用同向不等式的可加性及两边都是正数的同向不等式的可乘性，问题即可得到解决.

例2 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，求证：$\frac{b}{a-c}<\frac{a}{b-d}$.

【证明】 $\because a>b>0$，$-c>-d>0$，

$\therefore a-c>b-d>0$，$\therefore 0<\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d}$.

$\because a>b>0$，$\therefore \frac{b}{a-c}<\frac{a}{b-d}$.

【点评】 利用不等式的性质证明简单不等式，其关键是保证式子为正数，以进行同向不等式相乘及取倒数.

例3 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx\ (a\neq 0)$ 满足 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围.

【解】 $\because \begin{cases} f(-1)=a-b, \\ f(1)=a+b, \end{cases}$

解方程组得 $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$，$b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$.

又 $\because f(-2)=a(-2)^2+b(-2)$

$=4a-2b=4\times\frac{f(1)+f(-1)}{2}-2\times\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f(1)+3f(-1)$，而 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，

$\therefore 3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$.

又 $2\leqslant f(1)\leqslant 4$，

$\therefore 5\leqslant f(1)+3f(-1)\leqslant 10$，

即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

【点评】 (1)本题通过变量代换、解方程组的方法解不等式.

(2)解此类题常见的错误是：

依据 $\begin{cases} 1\leqslant a-b\leqslant 2, & ① \\ 2\leqslant a+b\leqslant 4. & ② \end{cases}$

加减消元得 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$，$\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant 1$.

$\therefore$ 由 $f(-2)=4a-2b$ 得 $4\leqslant f(-2)\leqslant 11$.

其错误原因在于，由①②所得两式的等号成立的条件不同.在多次运用同向不等式相加这一性质(单向性)上，导致 $f(-2)$ 取值范围的扩大.

▶▶▶拓展园……（拓展课堂！）

1. (例1变式)已知 $-3<a<b<1$，$-2<c<-1$，求证：$-16<(a-b)c^2<0$.

2. (例2变式)求证：若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$.

无穷与极限 在圆外面作外切正多边形，又在正多边形外面作外接圆，再作外切正多边形，再作外接圆，如此反复，正多边形的边数连续增加，你会觉得这种圆的半径会无限增大，但事实上半径的增大接近于一个极限，极限值大约等于初始圆半径的12倍.

3.（例 3 变式）已知 $1\leqslant a-b\leqslant 2$，$2\leqslant a+b\leqslant 4$，求 $5a-b$ 的范围.

课后演练拓展

演练场（练好本领！）

1. 若 a,b 为实数，下列命题正确的是 （ ）

A. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　　B. 若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$

C. 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$　　D. 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$

2. 设 $x<a<0$，则下列各不等式中一定成立的是 （ ）

A. $x^2<ax<a^2$　　B. $x^2>ax>a^2$

C. $x^2<a^2<ax$　　D. $x^2>a^2>ax$

3. a、$b\in\mathbf{R}$，两个不等式 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立的充要条件是 （ ）

A. $a>b>0$　　B. $a>0>b$

C. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$　　D. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

4. 如果 $a\in\mathbf{R}$，且 $a^2+a<0$，那么 $a,a^2,-a,-a^2$ 的大小关系是 （ ）

A. $a^2>a>-a^2>-a$　　B. $-a>a^2>-a^2>a$

C. $-a>a^2>a>-a^2$　　D. $a^2>-a>a>-a^2$

5. 若 x,y,z 互不相等，且 $x+y+z=0$，则下列四项不正确的为 （ ）

A. 必有两数之和为负数　　B. 必有两数之和为正数

C. 必有两数之积为负数　　D. 必有两数之积为正数

6.（2006 年合肥第一次质检）设命题甲：$\begin{cases}x+y<3\\xy<2\end{cases}$，命题乙：$\begin{cases}x<1\\y<2\end{cases}$，那么甲是乙的________条件.

7. 已知三个不等式：①$ab>0$，②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，③$bc>ad$，以其中两个作为条件，余下一个作为结论，则可以组成______个正确的命题.

8. 设 $2<a\leqslant 5$，$3\leqslant b<10$，求 $a+b$，$a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

9. 用不等式的性质证明：

(1)已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$；

(2)已知 $a<b<0$，$c<d<0$，求证 $ac>bd$.

10. 设 $c<-1<b<0<a<1$，及四个代数式：①$bc+c$；②$ab-b$；③abc；④$bc+b+c+1$. 其中值最小的是哪一个？为什么？

观摩亭（瞄准重点！）

1.（2005 年湖南八校联考）已知 4 枝郁金香和 5 枝丁香的价格小于 22 元，而 6 枝郁金香和 3 枝丁香的价格大于 24 元. 设 2 枝郁金香的价格为 A，3 枝丁香的价格为 B，则 A、B 的大小关系为 （ ）

A. $A>B$　　B. $A=B$

C. $A<B$　　D. 不确定

2.（2001 年高考北京卷）如果 a,b,c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是 （ ）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

回味方法点悟

1. 注意不等式性质的单向性或双向性，也就是说每条性质是否具有可逆性. 只有 $a>b\Rightarrow b<a$，$a>b\Rightarrow a+c>b+c$，$a>b\Rightarrow ac>bc(c>0)$ 等是可以逆推的，而其余几条性质不可逆推，在应用性质时要准确把握条件是结论的充要条件还是充分条件.

2. 在使用不等式的性质时，一定要搞清它们成立的前提条件. 例如：(1)在应用传递性时，如果两个不等式中有一个带等号而另一个不带等号，那么等号是传递不过去的. 如 $a\leqslant b,b<c\Leftrightarrow a<c$. (2)在乘法法则中，要特别注意"乘数 c 的符号"，例如当 $c\neq 0$ 时，有 $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$；若无 $c\neq 0$ 这个条件，则 $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$ 就是错误结论（∵当 $c=0$ 时，取"="）.

SANWEISHEJI 三维时空 CHENGJIUMENGXIANG

公鸡归纳法 1962 年华罗庚先生在首都剧场给中学生讲了以下的一个故事：一只公鸡被人买了回家，第一天，主人喂了公鸡一把米；第二天，主人又喂了公鸡一把米；第三天，主人又喂了公鸡一把米. 连续十天，主人每天都给公鸡喂一把米. 公鸡有了十天的经验，它就得出结论说：主人一定每天都给它喂一把米. 但是就在它得出这个结论不久，主人家里来了一位客人，公鸡就被宰了来做菜.

第三课时

新知梳解

我们研究一下当 $a>b>0$，能否推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$？$a^n>b^n$？$\sqrt{a}>\sqrt{b}$？若 $a<b<0$，上述结论是否还成立？

课前学习探究

自主学习，独步前行！

▶▶▶认知站……（做好准备！）

1. 若 $a_1>b_1>0,a_2>b_2>0,\cdots,a_n>b_n>0$，则 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$，当 $a=a_1=a_2=\cdots=a_n>0,b=b_1=b_2=\cdots=b_n>0$ 时，则有________.

2. 定理5：如果________，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$，定理5与定理4的推论2相结合可以推广到正有理指数幂，即如果 $a>b>0$，s 为正有理数，则有 $a^s>b^s$.

▶▶▶强化站……（打好基础！）

1. 下列命题中正确命题的个数是（　　）

① $a>b\Rightarrow\frac{a}{b}>1$　　② $a>b\Rightarrow a^2>b^2$

③ $a^3>b^3\Leftrightarrow a>b$　　④ $a>b\Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 下列推导不正确的是（　　）

A. $c-a<c-b\Rightarrow a>b$

B. $\frac{c}{a}<\frac{c}{b},c>0\Rightarrow a>b$

C. $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b}}>\sqrt{\frac{d}{c}}$

D. $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},n\in\mathbf{N}^*\Rightarrow a<b$

3. 下列命题：

① $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$；

② $a>b>1\Leftrightarrow a^n>b^n>1(n\in\mathbf{N}^*)$；

③ $a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}-a>\frac{1}{b}-b$；

④ $a+c<b+d\Leftrightarrow a<b$ 且 $c<d$.

其中正确命题的序号是________.

课堂师生互动

触类旁通，举一反三！

▶▶▶讲题库……（搞好引导！）

例1 已知 a,b,c,d 是互不相等的正数，且满足 $0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$，$a+b=c+d$，则下列不等式正确的是（　　）

A. $ab>cd,a>c>d>b$　B. $ab>cd,c>a>b>d$

C. $ab<cd,a>c>d>b$　D. $ab<cd,a>b>c>d$

【解析】 $\because 0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$

$\therefore a>b,c>d$ 且 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$，

即 $a+b-2\sqrt{ab}<c+d-2\sqrt{cd}$.

又 $\because a+b=c+d$，$\therefore ab>cd$，排除C、D.

令 $a=3,b=2,c=4,d=1$，

满足 $a+b=c+d$ 和 $0<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$，排除A，选B.

【答案】 B

【点评】 "由已知想性质"是转化已知的思想方法，条件中根式应转化为有理式，因此需平方．另外解选择题常常利用特殊值淘汰.

例2 已知 a,b 为正数，$m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m>n$，求证：$a^m+b^m\geqslant a^{m-n}b^n+a^nb^{m-n}$.

【证明】 $(a^m+b^m)-(a^{m-n}b^n+a^nb^{m-n})=(a^{m-n}-b^{m-n})(a^n-b^n)$

$\because a,b$ 为正数，$m-n>0$，$\therefore$ 当 $a\neq b$ 时，$a^{m-n}-b^{m-n}$ 与 a^n-b^n 同号，$\therefore(a^{m-n}-b^{m-n})(a^n-b^n)>0$；

当 $a=b$ 时，$a^m+b^m=a^{m-n}b^n+a^nb^{m-n}$，

$\therefore a^m+b^m\geqslant a^{m-n}b^n+a^nb^{m-n}$.

【点评】 作差与变形后，要制定其符号，需分类讨论．然后利用公理4的推论2比较 a^{m-n} 与 b^{m-n}，a^n 与 b^n 的大小.

例3 已知 a,b,c,d 均为正数，$a>c+d,b>c+d$.

求证 $ab>ad+bc,ab>ac+bd$.

【证明】 $\because a,b,c,d$ 均为正数，$a>c+d,b>c+d$，

$\therefore a-c>d>0,b-d>c>0$，

即 $(a-c)(b-d)>cd>0$.

从而 $ab-(ad+bc)=ab-ad-bc+cd-cd$

$=a(b-d)-c(b-d)-cd=(b-d)(a-c)-cd>cd-cd=0$.

$\therefore ab>ad+bc$.

同理 $ab>ac+bd$.

【点评】 在证明中，由已知变形为 $a-c>d>0,b-d>c>0$，从而利用其性质进行证明.

▶▶▶拓展园……（抓好落实！）

1.（例1变式）判断下列命题的真假.

(1) $a>b\Rightarrow a^2>b^2$　　(2) $a>b\Leftrightarrow a^3>b^3$

(3) $a^2>b^2\Leftrightarrow|a|>|b|$　　(4) $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a-c>b-c$

(5) $a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(6) $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$.

数学笑话（一）　十一点半　上午第四节课，A生肚子饿，无心听课，坐在位置上呆呆地想着牛肉，面包．数学老师发现他走神，便提问他："1.130小数向右移动一位，将会怎么样？"A生毫不犹豫地回答："将会开午饭！"

2. (例2变式)已知 a,b 为正数，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

3. (例3变式)已知 $x>y>z>0$，求证 $\frac{y}{x-y}>\frac{z}{x-z}$.

课后演练拓展

演练场……（练好本领！）

1. 与不等式 $a<b$ 等价的不等式是（　　）

   A. $|a|<|b|$　　B. $a^2<b^2$

   C. $a^3<b^3$　　D. $\frac{a}{b}<1$

2. 下列命题正确的是（　　）

   A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

   B. $a-b<0,c>1\Rightarrow\frac{c-1}{b}<\frac{c-1}{a}$

   C. $a>b,c>d\Rightarrow(a-b)^2>(d-c)^2$

   D. $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

3. 已知 $a<0,b<-1$，则下列不等式成立的是（　　）

   A. $a>\frac{a}{b}>\frac{a}{b^2}$　　B. $\frac{a}{b^2}>\frac{a}{b}>a$

   C. $\frac{a}{b}>\frac{a}{b^2}>a$　　D. $\frac{a}{b}>a>\frac{a}{b^2}$

4. 若 $a<b,c<d$，且 $(c-a)(c-b)>0,(d-a)(d-b)<0$，则（　　）

   A. $a<c<d<b$　　B. $c<a<b<d$

   C. $a<c<b<d$　　D. $c<a<d<b$

5. 在下列各命题中

   ①$a>b\Rightarrow 2^{-x}\cdot a>2^{-x}\cdot b$；②$a>b,c>d\Rightarrow a-c>b-d$；

   ③$a>b,c<d,cd\neq 0\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；④$|a|>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$；⑤$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.

   正确命题的个数是（　　）

   A. 1个　　B. 2个

   C. 3个　　D. 4个

6. 若 $a\geqslant b,c\geqslant d$，则在：①$(a-d)^2<(b-c)^2$；②$(a-d)^3\geqslant(b-c)^3$；③$\sqrt{a-d}\geqslant\sqrt{b-c}$；④$(a-d)^{-1}>(b-c)^{-1}$ 中一定成立的是________.（写出序号即可）

7. 若 $1<x<10,a=(\lg x)^2,b=\lg x^2,c=\lg(\lg x)$，则 a,b,c 的大小顺序是____________.

8. 设 a,b,c,d 为正数，且 $m<\frac{a}{b}<n,m<\frac{c}{d}<n$，比较 $m,n,\frac{a+c}{b+d}$ 的大小.

9. 已知 $x<y,n\in\mathbf{N}^*$，求证：$x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

数学笑话(二)　概率　我去参观气象站，看到许多预测天气的最新仪器，参观完毕，我问站长："你说有百分之七十五的概率下雨时，是怎样计算出来的？"站长没有多想便答道："那就是说，我们这里有四个人，其中三个认为会下雨."

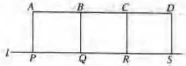
10. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$a,b\in\mathbf{R}$.

(1)求证：如果 $a+b\geqslant 0$，那么 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$；

(2)判断(1)中命题的逆命题是否成立？并证明你的结论.

▶▶▶观厚亭……（瞄准重点！）

1. (2006 年上海调研)如图，A、B、C、D 是某煤矿的四个采煤点，l 为公路，图中所示线段为道路，$ABQP$、$BCRQ$、$CDSR$ 近似于正方形，已知 A、B、C、D 四个采煤点每天的采煤量之比约为 3∶2∶1∶5，运煤的费用与运煤的路程、所运煤的重量都成正比. 现要从 P、Q、R、S 中选出一处设立一个运煤中转站，使四个采煤点的煤运到中转站的费用最少，则地点应选在 （　）



A. P　　B. Q

C. R　　D. S

2. (200[illegible] 年高考湖北卷)若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 中，正确的不等式有 （　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

1. 学习不等式的性质时，可将不等式的性质与等式的性质进行类比，要特别注意它们之间的区别，这样可加深认识，避免解题中的一些错误. 譬如等式两边同乘一个非零的数仍为等式，而不等式中则需明确此数的符号以确定不等号是否变向.

2. 不等式的性质及其证明方法，是学习不等式证明的基础，为了达到深刻理解、准确记忆不等式性质的目的，学习时，要紧紧抓住不等式性质的条件，认真分析它们的相同点、不同点，并能通过反例加深理解与记忆. 在学习性质的证明时，要仔细体会各性质的证明思路，逐步养成用逻辑推理进行数学证明（特别是代数证明）的习惯与能力.

3. 根据不等式的性质求变量的范围是一种常见题型，不等式变形时要防止扩大变量的范围.

§6.2 算术平均数与几何平均数

第一课时

新知花絮

某商家，用一个两臂之长有差异的天平称量售出物品. 为示公平公正，售货员每次都将物品放在左、右两个托盘中各称一次，再把两次结果相加并除以 2 计之，问这种计量准不准确？如不准确，吃亏的是商家还是顾客？试说明理由. 要解决这一问题，利用这节课的算术平均数和几何平均数定理便可解决.

课前学习探究

▶▶▶认知所……（做好准备！）

1. 公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 要求条件________，当且仅当______时取等号.

2. 如果 a,b 是______，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$

概率论　概率论是一门研究随机现象规律的数学分支. 其起源于十七世纪中叶，当时在误差、人口统计、人寿保险等范畴中，需要整理和研究大量的随机数据资料，这就孕育出一种专门研究大量随机现象的规律性的数学，但当时刺激数学家们首先思考概率论的问题，却是来自赌博者的问题. 数学家费马、帕斯卡、惠根斯、伯努利、棣莫弗、拉普拉斯、泊松、柯尔莫哥洛夫等对概率论的发展起了重要的作用.

时取等号)，$\frac{a+b}{2}$称 a、b 的算术平均数；$\sqrt{ab}$称 a、b 的______________. 这一定理又可叙述为：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

▶▶▶强化练……(打好基础!)

1. 已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是　(　　)

A. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　　B. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$

2. 若 $a\in\mathbf{R}$，下列不等式恒成立的是　(　　)

A. $a^2+1>a$　　B. $\frac{1}{a^2+1}<1$

C. $a^2+9>6a$　　D. $\lg(a^2+1)\geqslant\lg|2a|$

3. 若 $a>0$，则 $a+\frac{1}{a}\geqslant$____；若 $a<0$，则 $(-a)+\frac{1}{-a}\geqslant$____，$a+\frac{1}{a}\leqslant$____.

课堂师生互动

▶▶▶精题库……(编辑引导!)

例1 给出以下四个命题：

①若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$；

②若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $\lg a+\lg b\geqslant 2\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$；

③若 $x\in\mathbf{R}$，则 $|x+\frac{4}{x}|=|x|+\frac{4}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\frac{4}{|x|}}=4$；

④$y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$的最小值是 2.

其中正确命题的序号是________.

【解析】 若 $a=-1$，$b=1$，①错.

若 a，$b\in(0,1)$，则 $\lg a+\lg b<0<2\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，②错.

③中 x 与 $\frac{4}{x}$ 同号，$\therefore|x+\frac{4}{x}|=|x|+\frac{4}{|x|}\geqslant 4$，正确.

④$y=\frac{x^2+2+1}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2$，

当且仅当 $x^2+2=1$，即 $x^2=-1$ 时等号成立，显然错.

【答案】 ③

【点评】 本例必须对给出的四个命题利用均值不等式一一进行判断，通过举反例淘汰命题①和②，然后对式子进行变形，凑配出定理满足的条件"一正二定三相等"，从而利用定理中取等号的充要条件否定了命题④取等号的可能性. 用均值不等式求最值是高考中出现频率较高的题型，也是容易失分的地方，因为大家往往会忽视"取等号"的条件，那么当"取等号"的条件不满足时，应该怎么办？我们常用函数 $y=x+\frac{k}{x}(k>0)$的单调性求解.

例2 若 a，b，c 是互不相等的实数，求证：$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

【证明】 $\because a$，b，c 是互不相等的实数，

$\therefore a^2+b^2>2ab$，$b^2+c^2>2bc$，$c^2+a^2>2ca$.

将上面三个同向不等式相加得

$2(a^2+b^2+c^2)>2(ab+bc+ca)$

即 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

【点评】 分段应用基本不等式，然后整体相加(乘)得结论，是证明轮换对称不等式的常用技巧.

在证明不等式时，有时多次运用这个结论来证明较复杂的不等式.

例3 已知：a，b，$c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

【证明】 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=3+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})\geqslant 3+2+2+2=9$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时，等号成立.

【点评】 巧妙利用"1"的代换，进行恰当的"拆"、"配"，其目的是为定理创造条件. 此题可推广为：若 a_1、a_2、……、$a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=1$，求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\geqslant n^2$.

▶▶▶拓展园……(抓好落实!)

1. (例1变式)现有以下四个命题：

①"a，b，c 成等差数列"是"b 是 a，c 的算术平均数"的充要条件；②已知 A，B，C 是$\triangle ABC$ 的三内角，则 $B=60°$是 B 为 A，C 的算术平均数的充要条件；③"a，b，c 成等比数列"是"b 为 a，c 的几何平均数"的充要条件；④已知，a，b，c 是$\triangle ABC$ 的角 A，B，C 对应的三边长，则"a，b，c 成等比数列"是"$\sin B$ 为 $\sin A$，$\sin C$ 的几何平均数"的充要条件.

其中真命题共有　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2. (例2变式)若 a，b，c 是不全相等的正数，求证：

$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

SANWEISHEJI　三维梦想　CHENGJIUMENGXIANG

爱因斯坦的"由厚变薄"学习法　有一次，爱因斯坦读完一本几何教科书，立即清楚地讲出了书中的要点. 有人惊讶地问他是怎样读这本书的？他说：抓住书的骨肉，抛掉书的皮毛，这不就是把一本厚厚的书读"薄"了吗？