



复旦卓越·数学系列

总主编 张圣勤 史 历

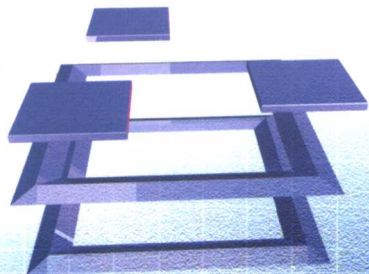
高等职业技术学院教材

高等数学

(第二版)

主 编 张圣勤

副主编 许 栩 刘中瑞 于 江



复旦大学出版社

复旦卓越·数学系列
高等职业技术学院教材

总主编 张圣勤 史 历

高等数学

(第二版)

主 编 张圣勤

副主编 许 栩 刘中瑞 于 江

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

·高等数学/张圣勤主编.—2版.—上海:复旦大学出版社,
2000.7(2006.5)

高等职业技术学院数学教材

ISBN 7-309-02576-8

I. 高… II. 张… III. 高等数学-高等学校:技术学校-
教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 31716 号

高等数学(第二版)

张圣勤 主编

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编 200433

86-21-65642857(门市零售)

86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

责任编辑 陆盛强

总编辑 高若海

出品人 贺圣遂

印刷 同济大学印刷厂

开本 850 × 1168 1/32

印张 13.75

字数 396 千

版次 2006 年 5 月第二版第七次印刷

印数 23 001—29 000

书号 ISBN 7-309-02576-8/O · 202

定价 20.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本教材共分四册,各册本着“降低理论要求,优化结构体系,加强实际应用,注重能力培养”的原则,在结构处理上和内容安排上力求做到学习理论知识与培养能力相结合,各册中还选配了大量的例题和习题.

本册是本教材中的一册,共分九章,分别介绍函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分、定积分、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换、数学实验等内容.

本册可作为招收初中毕业生的五年制和招收高中毕业生的三年制的高职、高专工科学生的高等数学教材,也可作为成人高职、高专的高等数学教材.

前 言

欢迎使用这本高职数学教材. 本教材是根据现行全日制普通初级中学、高级中学数学教学大纲和五年制高职数学教学基本要求, 组织全国部分高等职业技术学院长期从事高职数学教育的教师及部分具有教学经验的重点中专学校数学教师编写的. 主要用于招收初中毕业生的五年制高职工科学生, 其中第三、第四两册还适用于招收高中毕业生的工科三年制的高职学生, 也可供高职成人教育和中专教育使用, 也可作为一般工程技术人员参考书.

在本丛书的编写过程中, 作者本着“降低理论要求, 优化结构体系, 加强实际应用, 注重能力培养”的原则, 在教学内容上删去了一些繁琐的数学证明, 力求把数学内容讲得简单易懂, 加入了大量的例题和习题, 以便于教师的教学和学生的自学; 在结构处理上注意与现行初、高中数学教学内容的衔接, 结合理工科高职教育的特点照顾到专业教学的需要; 在习题的编排上照顾到高职工科多专业的特点, 力求做到理解数学知识和加强实际应用相结合、主观题和客观题相结合、学习理论知识与培养能力相结合, 并力求做到习题难易搭配得当. 为跟上计算机发展的步伐和加强学生的数学应用能力, 本书特意增加了应用 MATHEMATICA 软件的实验和数学建模的内容.

全书共分四册. 第一册为初等数学(上); 第二册为初等数学(下); 第三册为高等数学; 第四册为应用数学. 本册为高等数学, 内容包括: 初

等函数,数列的极限,一元函数的极限与连续,导数与微分,导数的应用,一元函数的积分学,常微分方程,无穷级数,拉普拉斯变换等。

本教材由上海电机学院张圣勤副教授和西安航空技术高等专科学校史历副教授担任总主编。本册由上海电机学院张圣勤同志任主编,由河北机电职业技术学院许栩同志、深圳职业技术学院刘中瑞、山东烟台职业学院于江同志任副主编。各章编写人员是:上海电机学院张圣勤、裘锡林、张艳同志,湖南工业职业技术学院钟莫、蒋明霞同志,河北机电职业技术学院许栩、陶金瑞同志,山东烟台职业学院于江同志,西安航空技术高等专科学校岳卫、赵芳玲、胡红亮同志,深圳职业技术学院刘中瑞同志,江苏常州机械职业技术学院周伟等同志。

在本书的编写和修订过程中,得到了各参编院校各级领导的关心和支持,同时也得到了北京防灾技术高等专科学校高盛义同志的支持和帮助,参阅了有关的文献和教材,很多学校及有关教师对本教材的修订提出了很好的修改意见,在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促,加之水平有限,虽经努力但教材中疏漏之处在所难免,恳切期望使用本教材的师生多提意见,以便再版时更正。

编 者

2006年3月

目 录

第一章 函数的极限与连续	1
§ 1-1 初等函数	1
§ 1-2 数列的极限	11
§ 1-3 函数的极限	15
§ 1-4 极限的运算	22
§ 1-5 两个重要极限	27
§ 1-6 函数的连续性	33
复习题 1	43
第二章 导数与微分	46
§ 2-1 导数的概念	46
§ 2-2 函数的和、差、积、商的求导法则	55
§ 2-3 复合函数的求导法则	60
§ 2-4 初等函数的导数、基本初等函数的求导公式	66
§ 2-5 高阶导数	73
§ 2-6 隐函数及参数方程所确定的函数的求导法	78
§ 2-7 变化率问题举例	84
§ 2-8 函数的微分	90
* § 2-9 曲线的曲率	99
复习题 2	105
第三章 导数的应用	108
§ 3-1 中值定理与罗必塔法则	108
§ 3-2 函数的单调性与极值	119

§ 3-3 函数的最大值与最小值	127
§ 3-4 曲线的凹凸与拐点	134
§ 3-5 函数图形的描绘	139
复习题 3	144
第四章 积分	148
§ 4-1 不定积分的概念	148
§ 4-2 积分的基本公式和法则、直接积分法	154
§ 4-3 换元积分法	161
§ 4-4 分部积分法	179
复习题 4	184
第五章 定积分	186
§ 5-1 定积分的概念	186
§ 5-2 牛顿-莱布尼兹公式	197
§ 5-3 定积分的换元积分法和分部积分法	201
§ 5-4 广义积分	207
§ 5-5 定积分在几何上的应用	212
§ 5-6 定积分在物理上的应用	219
复习题 5	225
第六章 常微分方程	229
§ 6-1 微分方程的概念	229
§ 6-2 一阶微分方程	232
§ 6-3 可降阶的高阶微分方程	239
§ 6-4 二阶常系数齐次线性微分方程	241
§ 6-5 二阶常系数非齐次线性微分方程	247
§ 6-6 微分方程的应用	255
复习题 6	260

第七章 无穷级数	263
§ 7-1 无穷级数的概念	263
§ 7-2 数项级数的审敛法	269
§ 7-3 幂级数	276
§ 7-4 函数的幂级数展开式	283
§ 7-5 傅立叶级数	296
§ 7-6 周期为 $2l$ 的函数展开成傅立叶级数	308
复习题 7	317
第八章 拉普拉斯变换	321
§ 8-1 拉普拉斯变换的基本概念	321
§ 8-2 拉普拉斯变换的性质	328
§ 8-3 拉普拉斯逆变换	337
§ 8-4 拉普拉斯变换的应用	344
复习题 8	350
第九章 数学实验	352
§ 9-1 Mathematica 软件实验 1	352
§ 9-2 Mathematica 软件实验 2	369
§ 9-3 Mathematica 软件实验 3	385
附录一 习题参考答案	400
附录二 常用积分表	419

第一章 函数的极限与连续

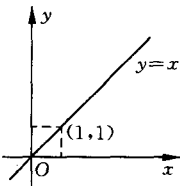
函数是贯穿于高等数学中的一条主线,而函数的极限是学习微积分的理论基础,连续函数又是微积分研究的主要对象.本章将在复习和加深理解函数有关知识的基础上,引入极限的概念,并建立一些有关极限的运算法则,然后讨论函数的连续性.

§ 1-1 初等函数

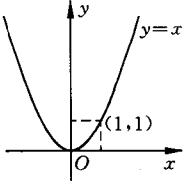
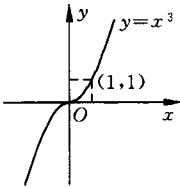
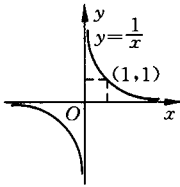
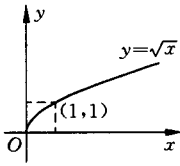
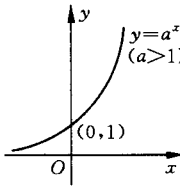
一、基本初等函数

在第一册里,我们学习了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,它们统称为基本初等函数;常数作为函数时,也列入基本初等函数.为便于应用,现将基本初等函数的定义域、值域、图像和主要性质列成表 1-1.

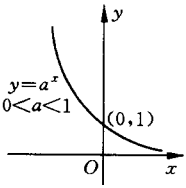
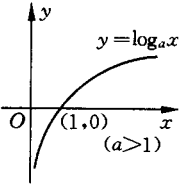
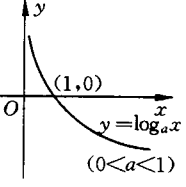
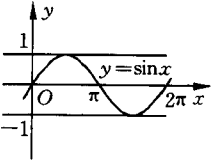
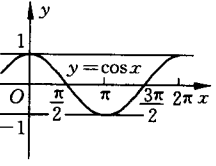
表 1-1

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
幂 函 数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加

(续表)

函 数	定 义 域 与 值 域	图 像	特 性
幂 函 数	$y = x^2$ $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y = x^3$ $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$ $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 单调减少
	$y = x^{1/2}$ $x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加
指 数 函 数	$y = a^x$ ($a > 1$) $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调增加

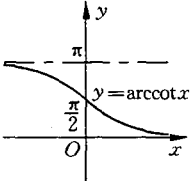
(续表)

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
指 数 函 数	$y = a^x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
对 数 函 数	$y = \log_a x$ ($a > 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调增加
对 数 函 数	$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调减少
三 角 函 数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 内单调减少($k \in \mathbf{Z}$)
三 角 函 数	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调 减少, 在 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ 内单调增加($k \in \mathbf{Z}$)

(续表)

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
三角函数	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加 ($k \in \mathbf{Z}$)
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少 ($k \in \mathbf{Z}$)
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界
	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数, 单调增加, 有界

(续表)

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
反三角函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

二、复合函数

在实际问题中,遇到的函数多数不是基本初等函数,而是由几个基本初等函数组合成的较复杂的函数.例如,函数 $y = \sin x^2$, 它可以看成是由三角函数 $y = \sin u$ 和幂函数 $u = x^2$ 组合而成的函数. 对这类函数我们有如下定义.

定义 1 如果 y 是 u 的函数, 即 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数, 即 $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内, 那么 y (通过 u 的联系) 也是 x 的函数. 我们就称此函数是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记作

$$y = f[\varphi(x)],$$

其中, u 称为中间变量.

下面我们举例分析复合函数的复合过程, 也就是要看出一个复合函数是由哪些基本初等函数(以及多项式)复合而成的. 正确熟练地掌握复合过程, 对后面学习微积分会有很大帮助.

例 1 指出下列函数的复合过程, 并求其定义域:

- (1) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$; (2) $y = a^{\tan x}$;
 (3) $y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^2$; (4) $y = \ln \sin x$.

解 (1) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 是由 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 - 2x - 3$ 复合而

成;要使 $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 有意义,只须 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$,解此不等式得 $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

(2) $y = a^{\tan x}$ 是由 $y = a^u$, $u = \tan x$ 复合而成;因为,当 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $\tan x$ 不存在,所以 $y = a^{\tan x}$ 的定义域为 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$.

(3) $y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y = u^2$, $u = \arccos v$, $v = \frac{1}{x}$ 复合而成的;要使 $y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^2$ 有意义,只须 $\arccos \frac{1}{x}$ 有意义,即 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$,所以 $y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(4) $y = \ln \sin x$ 是由 $y = \ln u$, $u = \sin x$ 复合而成的;要使 $y = \ln \sin x$ 有意义,须 $\sin x > 0$,所以 $y = \ln \sin x$ 的定义域为 $\{x \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

注意 (1) 并不是任何两个函数都可以复合成一个函数的.例如, $y = \arcsin u$, $u = x^2 + 2$ 就不能复合成一个函数,因为 u 的值域为 $[2, +\infty)$,而 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$,即 u 的任何函数值都超出了 y 的定义域.

(2) 分析复合函数的复合过程时,每个层次都应是基本初等函数或多项式,直至分解到自变量的基本初等函数或多项式.

三、初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成,并可以用一个解析式表示的函数叫做初等函数.

例如, $y = \ln(x + \sin x)$, $y = e^{\cos^2 x}(x^2 - x + 2)$, $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2} - 5$, $y = (x^2 + 3)^{\frac{2}{3}} + \tan x^2 - a^{x^3}$ 等都是初等函数.

四、分段函数

在实际问题中,有时我们会遇到一个函数的解析式,需要用两个或

两个以上的式子来分段给出,这类函数称为分段函数.

例2 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域、值域,并作图.

解 因为使函数有意义的 x 取值为一切实数,所以其定义域为 $(-\infty, +\infty)$;而可以取得的函数值只有 1, 0, -1, 所以其值域为 $\{-1, 0, 1\}$. 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1 所示.

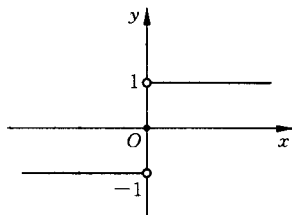


图 1-1

例3 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & -4 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 4-x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

作出这个函数的图像,并求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$.

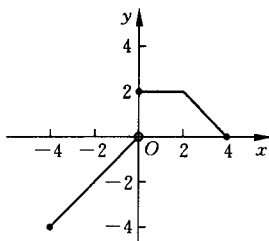


图 1-2

解 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-2 所示.

因为 $-1 \in [-4, 0)$, 所以由 $f(x) = x$ 可得 $f(-1) = -1$.

同理 $0 \in [0, 2)$, $3 \in [2, 4]$, 所以由 $f(x) = 2$, 得 $f(0) = 2$; 由 $f(x) = 4-x$, 得 $f(3) = 1$.

由例3可以看出,求分段函数的函数值时,必须把自变量的值代入相应的式子

中去计算.

对分段函数来说,不论分段多少,它总是一个函数.有的分段函数

可以用一个式子表示,如 $y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 可以表示为 $y = |x|$

$\sqrt{x^2}$, 所以它是一个初等函数; 而有的分段函数不能用一个式子表示, 如例 2、例 3 中的分段函数, 所以它们不是初等函数.

五、建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时, 通常先要找出这个实际问题中变量之间的函数关系, 即列出函数关系式, 然后再进行分析和计算. 下面举例说明建立函数关系的过程.

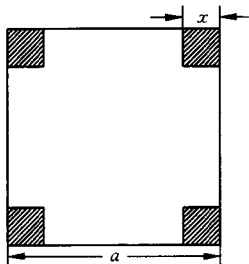


图 1-3

例 4 在一块边长为 a 的正方形铁板的 4 个角上各截去一个边长为 x 的小正方形, 如图 1-3 所示, 然后把四边折起做成一个无盖的水箱. 试把水箱的容积表示成 x 的函数, 并求其定义域.

解 设水箱容积为 V , 由题意知, 水箱底边长为 $a - 2x$, 高为 x , 则容积为

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x,$$

由实际意义知, 截去的小正方形边长 x 必须满足 $0 < x < \frac{a}{2}$, 所以函数的定义域为 $(0, \frac{a}{2})$.

例 5 弹簧受力伸长, 由实验可知, 在弹性限度内, 伸长量和受力大小成正比. 已知, 一弹簧受力 5 N 时, 伸长 0.4 m, 求弹簧伸长量与所受力之间的函数关系.

解 设弹簧受力 F N 时, 其伸长量为 s m, 由题可知

$$s = kF \quad (k \text{ 为比例系数}),$$

已知 $F = 5$ N 时, $s = 0.4$ m, 代入上式得

$$k = 0.08 (\text{m/N}),$$

所以, 弹簧伸长量与所受力之间的函数关系为

$$s = 0.08F,$$