高中新课标

◎根据教育部最新教材编写◎

教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI QUANJIE

总主编／薛金星

高中数学

必修④

配套人民教育出版社实验教科书

B版

陕西人民教育出版社

高中新课标

根据教育部最新教材编写

中学教材全解

高中数学必修④

配套人民教育出版社实验教科书B版

陕西人民教育出版社

出版前言

《中学教材全解》系列丛书根据教育部最新教材编写。值此出版之际，我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光，帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其他同类书相比具有以下几个鲜明特色：

第一，新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据，以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材，步步推进，设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸，逐次深入。其三是题型（材料）新。书中选用的题型（材料）都是按中考、高考要求精心设计挑选的，让读者耳目一新。

第二，细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法，变通训练，总结规律。

第三，精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点，突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，精讲精析，使学生举一反三，触类旁通。其次是问题设置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四，透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材，立足于教材，又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行，注重知识"点"与"面"的联系，"教"与"学"的联系。再次是对问题讲解得透，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五，全。

首先是知识分布全面。真正体现了"一册在手，学习内容全有"的编写指导思想。其次是该书的信息量大，它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生，丛书内容由浅入深，由易到难，学作多学易练，学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到出版，精心设计，细致操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

薛金星于北师大

目　录

教材全解

第一章

基本初等函数(Ⅱ)

本章综合解说

在初中知识的基础上，本章首先研究了角的概念的推广，将角的概念扩充到了任意角，进而学习了角的另一种度量制度——弧度制，给出了任意角的集合与实数集合之间的另一种一一对应关系，将角与比值(即角与实数)的对应关系变为实数与实数之间的对应关系，这应是认识上的一次质的飞跃．学习这部分知识，既能开阔视野，又能使人们对函数的概念、三角函数与其他基本初等函数的关系有更深刻的理解，而且为用函数的观点研究三角函数奠定了基础．用函数的观点研究三角是三角学发展的最高阶段，也是新教材中对三角学研究的重点．本章教学内容共有三个部分：角的概念的推广、任意角的三角函数、三角函数的图象和性质．本章考查频率最高的是任意角的三角函数(包括三角函数的定义、三角函数值的符号、直

角三角形中锐角的三角函数),其次是正弦、余弦函数的图象和性质,同角三角函数的基本关系式,已知三角函数值求角等.

三角函数是中学数学的重要内容,它既是解决生产、科研等实际问题的工具,又是进一步学习其他相关知识和高等数学的基础,它在物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科中有着广泛的应用.

学习本章内容时,既要掌握三角函数中各个函数的基本知识,又要熟悉它们之间的内在联系. 对于众多的三角公式,既要用心去记忆,又要掌握公式推导的规律,不断总结公式应用的技巧.

学习本章知识需注意的问题

(1)在考查基础题时,要求几个知识点的综合运用,要求学生从整体上掌握本章知识结构,注意各知识点之间的联系和综合运用.

(2)加大练习力度,解决公式的综合运用问题,提高计算能力.

(3)掌握好正弦函数、余弦函数和 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质(定义域、值域、最大值、最小值、周期及单调性、奇偶性),它们是历年高考常考内容之一.

(4)化归思想、数形结合思想是本章应用的最基本、最重要的数学思想,贯穿本章内容的始终,要认真体会、理解,解题过程中注意灵活地加以应用.

(5)要注意知识外延和横向联系,特别要重视代数、不等式、函数、三角函数的综合运用.

1.1 任意角的概念与弧度制

新课标导学

一、学习目标

1. 知识与技能

初步理解用“旋转”定义角的概念;理解“正角”、“负角”、“零角”、“象限角”、“终边相同的角”的含义;掌握所有与 α 角终边相同的角(包括 α 角)的表示方法.

2. 过程与方法

用运动变化的观点了解角的概念的推广是解决现实生活和生产中实际问题的需要,通过对各种角的表示的训练,提高分析、抽象、概括问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

从“由一点出发的两条射线形成的图形”到“射线绕着其端点旋转而形成角”的这一认识过程,感受“动”与“静”的对立统一,运动是绝对的,静止是相对的,静是动的一个状态,培养我们用运动变化的观点分析问题.

二、相关知识链接

本节内容包括两部分:一是角的概念的推广、二是弧度制、弧度制与角度制的换算.把不大于周角的非负角扩充到任意角,使角也有正角、负角、零角之分,在平面内建立适当的平面直角坐标系后,可以根据角的终边在哪一象限,把角划分为第一、二、三、四象限角和特殊角等几类,于是便引入了象限角和终边相同的角这样两个概念.通过引入度量角的一种新的制度——弧度制,建立了角的集合与实数集之间的一一对应关系.

本节的重点是任意角的概念,象限角的概念;难点是把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来;在平面内,建立适当的坐标系,通过数形结合来认识角的几何表示和终边相同的角的集合,是学好本节的关键.

教材知识全解

一、知识点全解

知识点1 任意角的概念

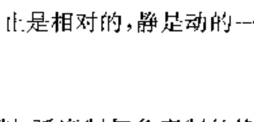


图1-1-1

在平面内,一条射线绕它的端点旋转有两个方向,顺时针方向和逆时针方向.习惯上规定:按照逆时针方向旋转,旋转而成的角叫做正角;按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角;当射线没有旋转时,我们也把它看成一个角,叫做零角.

如图1-1-1,一条射线的端点是 O,它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止

位置OB,形成了一个角α,点O是角α的顶点,射线OA是角α的始边,射线OB是角α的终边.

当射线绕其端点,按照逆时针方向或按照顺时针方向旋转时,旋转的绝对量可以是任意的.在画图时,常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量,旋转生成的角,又常叫做转角.

角的概念经过推广之后,就应该包括正角、负角、零角,也就是可以形成任意大小的角.

特·注

正确理解正角、负角、零角的概念,由定义可知,关键是抓住终边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

知识点2　终边相同的角

将角放在直角坐标系中,给定一个角,就有唯一的一条边与之对应.反之,对于直角坐标系内任意一条射线OB,以它为终边的角不唯一.若α、β角终边相同,则它们的关系为:将角α终边旋转(逆时针或顺时针)$k(k\in\mathbf{Z})$周即得角β.α、β的数量关系用集合表示为$\{\beta|\beta=2k\cdot 360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$,即$\alpha$、$\beta$大小相差360°的整数倍.

所有与角α终边相同的角,连同角α在内,可构成一个集合

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角α终边相同的角,都可以表示成角α与整数个周角的和.

注·意

(1)α为任意角.

(2)$k\cdot 360°$与α之间是"+"号,$k\cdot 360°-\alpha$可理解为$k\cdot 360°+(-\alpha)$.

(3)相等的角,终边一定相同;终边相同的角不一定相等,终边相同的角有无数个,它们相差360°的整数倍.

(4)$k\in\mathbf{Z}$这一条件不可少.

例1　在0°~360°范围内,找出与−650°角终边相同的角.

解:$\because -650°=70°-2\times 360°$,

$\therefore$在0°~360°范围内,与−650°角终边相同的角是70°.

例2　写出终边在y轴上的角的集合.

解:在0°~360°范围内,终边在y轴上的角有两个,即90°和270°.

$\therefore$与90°角终边相同的角的集合为$S_1=\{\beta|\beta=90°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

与270°角终边相同的角的集合为

$S_2=\{\beta|\beta=270°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

于是,终边在y轴上的角的集合为

$S=S_1\cup S_2$

$=\{\beta|\beta=90°+2k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=90°+180°+2k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=90°+2k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=90°+(2k+1)\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=90°+n\cdot 180°,n\in \mathbf{Z}\}$.

知识点 3　象限角

当角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么角的终边(除端点外)在第几象限，就说这个角是第几象限角，如果终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限.

比如 60°、420°，−300°都是第一象限角；120°、480°，−240°都是第二象限角；210°，570°，−150°都是第三象限角；300°、660°，−60°都是第四象限角.

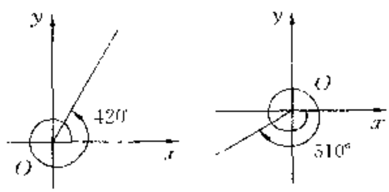
点拨

如果角的顶点不与坐标原点重合，或者角的始边不与 x 轴非负半轴重合，则不能判断角在哪一个象限，也就是它不能称做象限角.

例 3　画出下列各角，并指出该角是第几象限角：

(1)420°；(2)−510°.

分析：画角是指在平面直角坐标系内，让角的顶点与坐标原点重合，让角的始边与 x 轴正向重合，画出终边位置，并指出旋转度数与旋转方向.



(1)　　　　(2)

图 1-1-2

解：由于 $420°=360°+60°$，$-510°=-360°-150°$，可画出其图象，如图 1-1-2 所示，且知它们分别是第一象限角和第三象限角.

知识点 4　各象限角的集合与轴线角的集合

(1)象限角的集合

第一象限角集合为$\{x|k\cdot 360°<x<k\cdot 360°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$.

第二象限角集合为$\{x|k\cdot 360°+90°<x<k\cdot 360°+180°,k\in \mathbf{Z}\}$.

第三象限角集合为$\{x|k\cdot 360°+180°<x<k\cdot 360°+270°,k\in \mathbf{Z}\}$.

第四象限角集合为$\{x|k\cdot 360°+270°<x<k\cdot 360°+360°,k\in \mathbf{Z}\}$.

(2)轴线角(终边在坐标轴上的角)的集合

终边落在 x 轴的非负半轴上，角的集合为$\{x|x=k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 x 轴的非正半轴上，角的集合为$\{x|x=k\cdot 360°+180°,k\in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 x 轴上，角的集合为$\{x|x=k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非负半轴上，角的集合为$\{x|x=k\cdot 360°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非正半轴上，角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ-90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在 y 轴上，角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在坐标轴上，角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

象限角与轴线角的集合的表示形式并不唯一，也还有其他的表示形式. 如：终边落在 y 轴的非正半轴上，角的集合为 $\{x|x=k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

知识点 5　准确区分锐角，$0^\circ\sim90^\circ$的角，小于 90°的角，第一象限角

锐角是 $0^\circ<\alpha<90^\circ$的角；

$0^\circ\sim90^\circ$的角是 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$的角；

小于 90°的角是 $\alpha<90^\circ$的角；

第一象限角是 $\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$所表示的角.

(1)要区分开易混的概念，如锐角一定是第一象限的角，而第一象限角不全是锐角，如 -330°、730°都是第一象限角，但它们都不是锐角.

(2)小于 90°的角是 $\{\alpha|\alpha<90^\circ\}$，显然包括锐角、零角、负角.

知识点 6　弧度制

度量长度可以用米、尺、码等不同的单位制，度量重量可以用千克、磅等不同的单位制. 不同的单位制能给解题带来方便.

我们知道，角可以用度作为单位进行度量，1 度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$，这种用度作为单位来度量角的单位叫做角度制. 为了使用方便，数学上还采用另外一种度量角的单位制——弧度制.

定义：长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角；用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制；在弧度制下，1 弧度记做 1 rad，读作 1 弧度.

定义的基础：根据圆心角定理，对于任何一个圆心角 α，所对弧长与半径的比是一个仅与角 α 的大小有关的常数. 因此，弧长等于半径的弧所对的圆心角的大小并不随半径变化而变化，而是一个大小确定的角，可以取为度量角的标准.

当角 α 的大小一定时，不论这个角所对的圆弧的半径是多少，弧长与半径的比值总是一个定值，它仅与圆心角的大小有关，所以我们可以用弧长与半径的比值来度量角的大小.

弧度数：如图 1-1-3 中，$\widehat{AB}$的长等于半径 r，AB 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角，即 $\frac{r}{r}=1$.

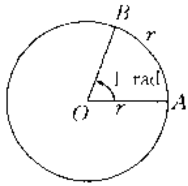


图 1-1-3

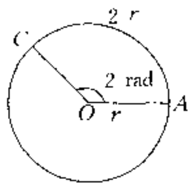


图 1-1-4

在图 1-1-4 中,圆心角$\angle AOC$所对的$\overset{\frown}{AC}$的长 $l=2r$,那么$\angle AOC$的弧度数就是$\dfrac{l}{r}=\dfrac{2r}{r}=2$.

如果圆心角所对的弧长 $l=2\pi r$(即弧长是一个整圆),那么这个圆心角的弧度数是$\dfrac{l}{r}=\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$.

如果圆心角表示一个负数,且它所对的弧的长 $l=4\pi r$,那么这个角的弧度数的绝对值是$\dfrac{l}{r}=\dfrac{4\pi r}{r}=4\pi$,即这个角的弧度数是$-4\pi$.

一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是零.

角 α 的弧度数的绝对值$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$(其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧的长,r 是圆的半径).

知识点 7 角度与弧度之间的互化

(1)将角度化为弧度

$360^\circ=2\pi\ rad$;$180^\circ=\pi\ rad$;$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\ rad\approx0.017\ 45\ rad$.

(2)将弧度化为角度

$2\pi\ rad=360^\circ$;$\pi\ rad=180^\circ$;$1\ rad=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57.30^\circ=57^\circ18'$.

(3)需记住的几个特殊角的弧度数

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

(1)弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度,角度制是以“度”为单位度量角的制度.

(2)1弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或弧)的大小,而1°是圆的$\frac{1}{360}$所对的圆心角(或弧)的大小.

(3)不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的定值.

(4)用弧度为单位表示角的大小时,“弧度”两字可以省略不写,这对弧度数在形式上虽是一个不名数,但我们应当把它理解为名数.如 sin 2 是指 sin(2 弧度),$\pi=180^\circ$是指π弧度$=180^\circ$;但如果以度(°)为单位表示角时,度(°)就不能省去.

(5)用弧度为单位表示角时,常常把弧度数写成多少π的形式,如无特殊要求,不必把π写成小数,如$45^\circ=\frac{\pi}{4}$弧度,不必写成$45^\circ\approx0.785$弧度.

(6)弧度制和角度制一样,只是一种度量角的方法.弧度制与角度制相比有一定的优点.其一是在进位上.角度制在度、分、秒上是60进位制,不便于计算,而弧度制是十进位制,给运算带来方便;其二是在弧长公式与扇形面积公式的表达上,弧度制下的公式远比角度制下的公式简单,运用起来方便.从下一个知识点便可清楚地看到.

(7)用角度制和弧度制来度量零角,虽然单位不同,但量数相同,对于其他非零角度,由于单位不同,量数也就不同了.

(8)在今后表示角的时候,由于弧度制的优点,常常使用弧度表示角,但也要注意,用弧度制表示角时,不能与角度制混用,例如$\alpha=2k\pi+30^\circ(k\in\mathbf{Z})$,$\beta=k\cdot360^\circ+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$都是不准确的.

知识点8　弧长公式和扇形面积公式

在弧度制下,弧长公式和扇形的面积公式分别为:

$l=|\alpha|\cdot r$;$S=\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$.

在角度制下,弧长公式和扇形的面积公式分别为:

$l=\frac{n\pi r}{180}$;$S=\frac{n\pi r^2}{360}$.

两者相比较,弧度制下的弧长公式和扇形面积公式具有更为简单的形式,其记忆和应用更易操作,但使用公式时应注意:

(1)用公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$求圆心角时,应注意其结果是圆心角的弧度数的绝对值,具体应用时,既要注意其大小,又要注意其正负;

(2)使用弧度制下的弧长公式、扇形面积公式有诸多优越性,但是如果已知的角是以“度”为单位,则必须先把它化成弧度后再计算,这样可避免计算过程或结果出错.

二、教材题目研究

例 2 是考查终边相同的角的表示和象限角的定义，先把所给角表示为 $k\cdot 360^\circ+\alpha(0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ)$ 的形式，再根据 α 判断这角是何象限角.

变式引申：写出与下列各角终边相同的集合 S，并指出它们是第几象限角.

(1)45°；(2)125°；(3)-65°；(4)$1\ 735^\circ$.

分析：终边相同的角，相差 $k\cdot 360^\circ$，$(k\in\mathbf{Z})$.

解：(1)$S_1=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，是第一象限角；

(2)$S_2=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+125^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，是第二象限角；

(3)$S_3=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ-65^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，是第四象限角；

(4)$S_4=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+1\ 735^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+5\times360^\circ-65^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=(k+5)\times360^\circ-65^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，是第四象限角；

例 3 是考查终边相同的角的表示，终边在 x 轴上的角，在 0° 到 360° 范围内，有两个，即 0° 和 180°，分别表示出与这两个角终边相同的角的集合后再取并集即可.

变式引申：写出终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合.

分析：终边落在直线 $y=x$ 上的角是与 45° 终边相同的角及与 225° 终边相同的角，问题转化为求两集合的并集.

解：终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot 360^\circ+225^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot 180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边落在直线 $y=-x$ 上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，终边落在直线 $y=\pm x$ 上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 90^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

弧度制和弧度制与角度制的互化共给出了五个例题，它们是两种制度下的互化及弧度制下公式的使用. 由角度换算为弧度的一个“算法”是：

(1)给变量 n 和圆周率 π 的近似值赋值；

(2)如果角度值 n 是以“度、分、秒”形式给出，先把 n 化为以“度”为单位的 10 进制表示；

(3)计算 $\frac{\pi}{180}$，得出的结果赋给变量 a；

(4)计算 na，赋值给变量 α.

α 就是这个角的弧度值.

变式引申：1. -300° 化为弧度是(　　)

A. $-\frac{4\pi}{3}$　　B. $-\frac{5\pi}{3}$　　C. $-\frac{7\pi}{4}$　　D. $-\frac{7\pi}{6}$

解：$\because 1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad，$\therefore -300^\circ=-\frac{5\pi}{3}$ rad. $\therefore$ 应选 B.

2. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的

角度是________，合________弧度.

分析：解此题应抓住在同一时间内大小链轮转过齿数是相同的这一关键.

解：∵ 当大链轮转过一周时，转过了48齿，小链轮同时也转过了48齿，

∴ $\frac{48}{20}=2.4$(周). ∴ 小链轮转过的角度是 $360^\circ\times2.4=864^\circ$，$\frac{\pi}{180}\times864=\frac{24\pi}{5}$.

∴ 应填：864°，$\frac{24\pi}{5}$.

3. $\frac{5\pi}{6}$弧度化为角度是(　　)，是第(　　)象限角.

A. 150°，二　　B. 115°，二　　C. 135°，二　　D. 235°，二

解：∵ $1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

∴ $\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\frac{5\pi}{6}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=150^\circ$，是第二象限角. ∴ 应选 A.

4. 一钟表的分针长 5 cm，经过 40 分钟后，分针外端点转过的弧长是________cm.

解：经过 40 分钟，分针转过的角为 $\alpha=-4\times\frac{\pi}{3}=-\frac{4}{3}\pi$，则 $l=R|\alpha|=5\times\frac{4\pi}{3}=\frac{20}{3}\pi$(cm).

典型例题精析

题型1　角的概念问题

例1　下列各命题正确的是(　　)

A. 终边相同的角一定相等　　B. 第一象限角都是锐角

C. 锐角都是第一象限角　　D. 小于90°的角都是锐角

分析1：可根据各种角的定义，利用排除法予以解答.

解法1：对于A，-60°和300°是终边相同的角，它们并不相等，∴ 应排除A.

对于B，390°是第一象限角，可它不是锐角，∴ 应排除B.

对于D，-60°是小于90°的角，但它不是锐角，∴ 应排除D.

综上，∴ 应选C.

要想否定一个命题，只需举出一个反例即可，本解法就是恰当地举出反例，将A、B、D三个选项予以排除，从而确定选项C.

分析2：可根据锐角和第一象限角的定义，利用定义直接判断.

解法2：∵ 锐角的集合是$\{\alpha|0^\circ<\alpha<90^\circ\}$， ①

第一象限角的集合是$\{\alpha|k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$， ②

对于②，当$k=0$时，②与①相同. ∴ 锐角是第一象限角.

∴ 应选C.

变式引申：$A=\{$小于90°的角$\}$，$B=\{$第一象限的角$\}$，则$A\cap B=$(　　)

A. {锐角}　　B. {小于90°的角}

C. {第一象限的角}　　D. 以上都不对

解：小于90°的角由锐角、零角、负角组成，而第一象限角包含有锐角及其他终边

在第一象限的角，所以 $A\cap B$ 是由锐角和终边在第一象限的负角组成；故上述A、B、C都不对.

∴ 应选D.

评注

小于90°的角不都是锐角，它还包含有零角、负角，只有小于90°的正角才是锐角，要注意从现在开始角已经推广到了零角和负角.

题型2 象限角问题

例2 写出第二象限角的集合.

解：第二象限角的集合是 $\{\alpha|k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

评注

写出第二象限角的步骤：

第一步：在0°～360°范围内，终边落在第二象限内角的取值范围是 $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

第二步：加上360°的整数倍，即加上 $k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

其他各象限角的集合，可仿此步骤写出.

变式引申：1. 已知角 α 是第三象限角，则角 $-\alpha$ 的终边在( )

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

分析：由角 α 的表示法，确定 $-\alpha$ 的表示法，然后得出 $-\alpha$ 所在范围.

解：∵ α 是第三象限角，∴ $k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}$,

则 $-k\cdot 360^\circ-270^\circ<-\alpha<-k\cdot 360^\circ-180^\circ,k\in\mathbf{Z}$. 所以 $-\alpha$ 所在范围与 $(-270^\circ,-180^\circ)$ 范围相同. 则 $-\alpha$ 的终边在第二象限.

∴ 应选B.

评评

(1)终边相同的角的表示方法中 $k\in\mathbf{Z}$，包括正整数、负整数和零，$-k$ 与 k 的意义相同.

(2)若采用数形结合，此题更为简便，你想到了吗？

2. 如果角 2α 的终边在 x 轴上方，那么 α 的范围是( )

A. 第一象限角的集合　　B. 第一或第二象限角的集合

C. 第一或第三象限角的集合　　D. 第一或第四象限角的集合

分析：由 2α 的位置确定 2α 的范围，从而求得 α 的范围.

解：根据题意知 $k\cdot 360^\circ<2\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

∴ $k\cdot 180^\circ<\alpha<k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=2n$ 时，$n\cdot 360^\circ<\alpha<n\cdot 360^\circ+90^\circ,n\in\mathbf{Z}$. ∴ α 是第一象限角.

当 $k=2n+1$ 时，$n\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<n\cdot 360^\circ+270^\circ,n\in\mathbf{Z}$. ∴ α 是第三象限角.

综上，知 α 为第一、第三象限角.

点评

将 k 分为 $2n$,$2n+1$ 两种情况处理,是解答本题的关键.

题型3 终边相同的角问题

例3 与$-457°$角终边相同角的集合是( )

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+457°,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+97°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+263°,k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°-263°,k\in\mathbf{Z}\}$

解法1:∵ $-457°=-2\times360°+263°$,∴ 应选C.

解法2:∵ $-457°$角与$-97°$角终边相同,又$-97°$角与$263°$角终边相同,

又$263°$角与$k\cdot360°+263°$角终边相同,∴ 应选C.

变式引申:1. 已知角α、β的终边相同,那么$\alpha-\beta$的终边在( )

A. x轴的非负半轴上　　B. y轴的非负半轴上

C. x轴的非正半轴上　　D. y轴的非正半轴上

分析:将角α、β按终边相同角公式写出,然后作差$\alpha-\beta$,对其研究即可作出判断.

解:∵ 角α、β终边相同,∴ $\alpha=k\cdot360°+\beta,k\in\mathbf{Z}$.

作差$\alpha-\beta=k\cdot360°+\beta-\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,∴ $\alpha-\beta$的终边在x轴的非负半轴上.

∴ 应选A.

2. 终边与坐标轴重合的角α的集合是( )

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

解:终边为x轴的角的集合$M=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,

终边为y轴的角的集合$P=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$,

设终边为坐标轴的角的集合为S,则

$$\begin{aligned}S=M\cup P&=\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=2k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

∴ 应选C.

点评

对于终边为x轴的角的集合,终边为y轴的角的集合,终边为坐标轴的角的集合,要记住,要熟悉.

3. 已知角α的终边在图1-1-5中阴影所表示的范围内(不包括边界),那么$\alpha\in$__________.