高职高专数学系列教材

概率论

刘汝臣　主编

東北大學出版社
Northeastern University Press

高职高专数学系列教材

概　率　论

刘汝臣　主编

东 北 大 学 出 版 社
·沈　阳·

© 刘汝臣 2005

图书在版编目（CIP）数据

概率论 / 刘汝臣主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2005.5（2006.2 重印）

ISBN 7-81102-150-1

Ⅰ.概… Ⅱ.刘… Ⅲ.概率论—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 059566 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm×203mm
印 张：4.375
字 数：114 千字
出版时间：2005 年 5 月第 1 版
印刷时间：2006 年 2 月第 2 次印刷
责任编辑：刘乃义 刘宗玉　　责任校对：张淑萍
封面设计：唐敏智　　责任出版：秦 力

定 价：14.80 元

前　　言

近几年，高职高专教育发展较快，规模不断扩大，专业设置增多，围绕高职高专培养目标进行的数学教学改革取得了阶段性成果，教材建设也得到了进一步加强。在此基础上，为了满足不同专业对数学教学的具体要求，结合教学改革实际，依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规划》，我们组织编写了本教材。本教材兼顾统一性与多样化、基础教材与辅助教材的关系，形成具有一定特色、优化配套的教材，可供高职高专院校各专业使用。

在编写过程中，充分考虑了上述各专业的特点和对数学知识的基本要求。在保持知识体系、结构基本不变的前提下，淡化了复杂理论和方法的叙述，注重几何、物理等实际背景的说明，增强了直观性，力求做到内容精练，通俗易懂，易教易学。

本教材由刘汝臣主编，第一章至第五章依次由丛政义、刘汝臣、勾丽杰、张唯春、刘颖编写，由曲春平、栾林、岳贵新主审。

编　者

2005 年 3 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　集合与排列组合

第一节　集　　合

一、集合的概念

所谓**集合**，就是由一些事物构成的一个集体．有时也简称为**集**．集合是一个不能定义而只能描述的概念．集合中的事物，称为集合的**元素**．一般用大写字母 A，B，…表示集合，而用小写字母表示元素．如

$$A=\{e_1, e_2, \cdots\}$$

中，A 是集合，而 e_1，e_2，…是 A 中的元素．

如果一个元素 e 是一个集合 A 中的元素，就说元素 e 属于集合 A，记作

$$e \in A;$$

如果一个元素 e 不是集合 A 中的元素，就说元素 e 不属于集合 A，记作

$$e \notin A.$$

如果一个集合中所含的元素有有限多个，那么，称这样的集合为**有限集合**，如$\{1, 3, 5, 7, 9\}$；如果一个集合中所含的元素有无限多个，那么，称这样的集合为**无限集合**，如闭区间$[2, 5]$中的全体实数即构成一个无限集．特别地，一个无限集中的所有元素与全体正整数能够一一对应，那么，称这样的集合为**可数集合**，或称**可列集合**．如

$$A=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\right\}$$

即为一个可数集．但由闭区间[2，5]中的全体实数构成的集合却不是可数集．

二、集合的运算

1．集合的包含与相等

如果一个集合 A 中的任意一个元素，都属于另外一个集合 B，即对于 $\forall e\in A$，总有 $e\in B$，则称 A 是 B 的一个**子集**，此时也称 A **包含于** B，或 B **包含** A，记为 $A\subset B(A\subseteq B)$，或 $B\supset A(B\supseteq A)$．如图 1-1 所示．如果 $A\subset B$，且 $A\supset B$ 同时成立，那么，称集合 A 与集合 B **相等**，记为 $A=B$．如果 A 是 B 的一个子集，且在 B 中含有不属于 A 的元素，则称 A 是 B 的一个**真子集**．如整数集是实数集的真子集．

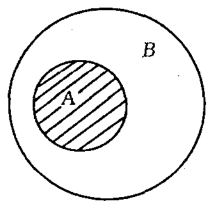

图 1-1

在一定范围内所讨论的所有集合都是另外一个集合的子集，则称这样的集合为**全集**，记作 U．

为方便讨论，将不含任何元素的集合称之为**空集**，记为 $\varnothing$．空集是任何非空集合的**真子集**，因此也把空集称为**当然子集**．

2．集合与集合的并集

将集合 A 与集合 B 中的所有元素放在一起组成的新的集合称为集合 A 与集合 B 的**并集**，记为 $A\cup B$．如图 1-2 所示．

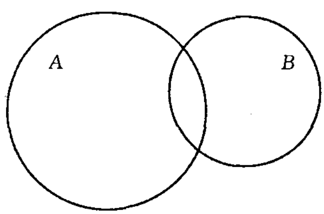

图 1-2

集合的并集满足下列的运算规律：

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A;$$

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

例如，$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，

$B=\{1, 5, 9, 0\}$，

则

$$A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

又如，$A=[1, 5]$，$B=[2, 6]$为两个闭区间，则

$$A\cup B=[1, 6].$$

3. 集合与集合的交集

将集合 A 与集合 B 中的所有公有元素放在一起组成的新的集合称为集合 A 与集合 B 的**交集**，记为 $A\cap B$. 如图 1-3 所示.

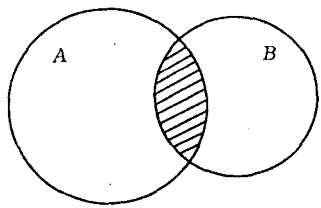

图 1-3

集合的交集满足下列的运算规律：

(1) 交换律

$$A\cap B=B\cap A;$$

(2) 结合律

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

例如，$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，

$B=\{1, 5, 9, 0\}$，

则

$$A\cap B=\{1, 5\}.$$

又如，$A=(1, 5)$，$B=[2, 6]$为两个区间，则

$$A\cap B=[2, 5).$$

集合的交与并满足下列的运算规律：

分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

证　$\forall e\in(A\cup B)\cap C$，则 $e\in A\cup B$ 且 $e\in C$. 即

$$e\in A\cap C \text{ 或 } e\in B\cap C$$

至少有一个成立，即

$$e\in(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

所以有

$$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

反之有

$$(A\cup B)\cap C\supseteq(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

故有

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

同理可证

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，$A\cup B$ 可记为 $A+B$，即

$$A\cup B=A+B.$$

4. 差集与补集

由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素组成的新的集合，称为集合 A 与集合 B 的**差集**，也称为集合 A 与集合 B 的**差**，记为 $A-B$. 如图 1-4 所示.

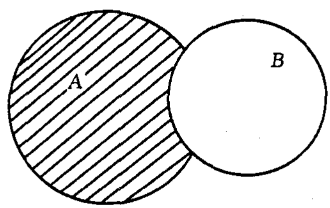

图 1-4

设 U 为全集，A 为 U 的一个子集，则称 $U-A$ 为 A 的**补集**，记为 $\overline{A}$. 如图 1-5 所示.

对于全集 U，补集运算有如下的运算规律：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$;

(2) 如果 $A\subset B$，那么 $\overline{A}\supset\overline{B}$；

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

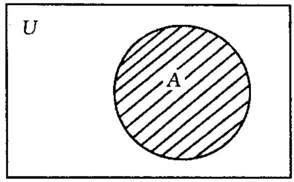

图 1-5

证　仅证(3)中的第一个式子.

$\forall e\in\overline{A\cup B}$，则 $e\notin A\cup B$，因此 $e\notin A$ 且 $e\notin B$，于是 $e\in\overline{A}$ 且 $e\in\overline{B}$，从而 $e\in\overline{A}\cap\overline{B}$，故有

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

反之有

$$\overline{A\cup B}\supseteq\overline{A}\cap\overline{B},$$

故有

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

习题 1-1

1. 求区间$[-5,3]$与集合$(-\infty,0]\cup[2,5)$的交集.

2. 在直角坐标系中，不等式 $x^2+y^2\leqslant 4$ 与 $x^2+y^2>2$ 所确定的两个集合的交集是怎样的一个集合？作图表示这个集合.

3. 对于任意三个集合 A，B，C，证明

$$(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\overline{C}=\overline{(A\cup B)\cap C}.$$

4. 设 A，B，C 为任意三个集合. 从 AC 及BC 不相交能不能推出 A，B 不相交？为什么？

第二节　排列与组合

一、两个基本原理

1. 加法原理

如果完成一件事情有 n 种不同的方式，而第 i 种方式又有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$r_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 种不同的方法，则完成这件事共有

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

种不同的方法.

例如，一个人在一天中从甲地到乙地，可以乘坐的交通工具有飞机、火车、汽车、轮船，而每天飞机有两班、火车有四班、汽车有五班、轮船有六班，则此人在一天中从甲地到乙地不同的走法有

$$2+4+5+6=17(\text{种}).$$

2. **乘法原理**

如果完成一件事情必须经过 n 个不同的步骤，而第 i 个步骤又有 $r_i(i=1, 2, \cdots, n)$种不同的方法，则完成这件事共有

$$r = r_1 r_2 \cdots r_n$$

种不同的方法.

例如，从甲地到丙地，必须经过乙地，甲地到乙地的交通路线有铁路、公路和水路；从乙地到丙地的交通路线只有公路和水路. 那么一个人从甲地到乙地再到丙地共有不同的途径为

$$3\times 2=6(\text{种}).$$

二、排列

1. 无重复元素的排列

从 n 个不同的元素中任取 $r(r\leqslant n)$个不同的元素排成一列，叫做从 n 个不同的元素中任取 r 个不同元素的一种**排列**(亦称**选排列**)，根据乘法原理，这种排列共有

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n^r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

种不同的排法.

特别地，当 $r=n$ 时，$P_n^n=n!$，记为 $P_n=n!$，此时叫做 n 个元素的**全排列**.

例如，某地的电话号码由 7 位数字组成，那么，组成的 7 个数字互不相同的电话号码共有

$$\begin{aligned}P_{10}^7&=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\\&=604800(\text{个}).\end{aligned}$$

2. 有重复元素的排列

从 n 个不同的元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素排成一列，叫做从 n 个不同的元素中任取 r 个元素的一种**排列**(元素可以重复)，根据乘法原理，这种排列共有 n^r 种不同的排法.

例如，某地的电话号码由 7 位数字组成，那么，组成的 7 个数字的电话号码共有 10^7 个.

3. 不尽相异元素的全排列

设 n 个元素由 $k(k\leqslant n)$ 种不同的元素构成，同种元素是不可区分的，第 $i(i=1,2,\cdots,k)$ 种元素有 r_i 个，且 $r_1+r_2+\cdots r_k=r$，则这 n 个元素的全排列共有

$$\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_k!}$$

种不同的排法.

例如，一个口袋中放有 7 个球，其中 2 个红球、3 个白球、2 个黑球，且同一颜色的球不加区分，那么由这 7 个球可以组成

$$\frac{7!}{2!\ 3!\ 2!}=210$$

种不同的排列.

三、组合

1. 无重复元素的组合

从 n 个不同的元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素构成一组，叫做从

n 个不同的元素中任取 r 个元素的一个**组合**，这种组合共有

$$C_n^r=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

种不同的组合方式.

2. **非均匀分组**

把 n 个不同的元素分成 k 组，使第 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 个组有 r_i 个元素，且 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，则共有

$$C_n^{r_1}C_{n-r_1}^{r_2}\cdots C_{n-(r_1+r_2+\cdots+r_{k-1})}^{r_k}=\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_k!}$$

种不同的分法 .

例如，把 10 名学生分成 3 个小组，其中第一小组 2 人，第二小组 3 人，第三小组 5 人，那么共有

$$C_{10}^2C_{10-2}^3C_{10-(2+3)}^5=\frac{10!}{2!\ 8!}\cdot\frac{8!}{3!\ 5!}\cdot\frac{5!}{5!\ 0!}=\frac{10!}{2!\ 3!\ 5!}=2520$$

种不同的分组方法.

3. **从不同类型的每种元素中取确定数目的元素的组合**

n 个不同的元素有 $k(k\leqslant n)$ 种类型，第 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 种类型有 n_i 个不同的元素，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，从这 n 个不同的元素中取 r 个元素，要求从第 i 种类型中取 r_i 个元素，且 $r_1+r_2+\cdots+r_k=r$，则共有

$$C_{n_1}^{r_1}C_{n_2}^{r_2}\cdots C_{n_k}^{r_k}$$

种不同的取法.

例如，现有 13 件产品，其中一等品有 6 件，二等品有 3 件，三等品有 4 件. 今从这 13 件产品中取出 6 件，要求一等品 3 件，二等品 2 件，三等品 1 件，那么共有

$$C_6^3C_3^2C_4^1=\frac{6!}{3!\ 3!}\cdot\frac{3!}{2!\ 1!}\cdot\frac{4!}{1!\ 3!}=240$$

种不同的取法 .

习题 1-2

1. 由 0，1，2，3，4，5 能排成多少个没有重复数字的五位数?

2. 某班有 12 名同学元旦联欢出节目，要 3 人唱歌，4 人跳舞，5 人做游戏，问有多少种分法?

3. 有 10 人站成一排，其中一人不能排在最末一位，那么有多少种不同的排法?

4. 有 10 件产品，其中有 3 件次品，从中任意抽取 5 件产品，其中 4 件是正品，1 件是次品，那么有多少种不同的取法?

5. 将数学、物理、化学、英语、语文这五本书分给甲乙二人，那么，

(1) 给甲 2 本，给乙 3 本，有多少种不同的分法?

(2) 给一人 2 本，另一人 3 本，有多少种不同的分法?

第一章习题参考答案

习题 1-1

1. $[-5, 0]\cup[2, 3]$.

习题 1-2

1. 600.　2. 27720.　3. $9\times 9!$.　4. 105.

5. (1) 10; (2) 20.

第二章 随机事件及其概率

在自然界和人类社会中存在着各种各样的现象. 有一类现象, 在一定条件下必然发生(或必然不发生). 例如, 向上抛一枚硬币必然下落, 同性电荷互相排斥, 等等. 它们的特点是现象发生由条件唯一确定, 这类现象称为**确定性现象**. 还有一类现象, 与其相反, 具有不确定性, 即使在相同的条件下, 现象发生与否也无法确定. 例如, 抛掷一颗质地均匀的骰子, 观察出现的点数, 3 点出现与否不能预知; 抛掷一枚硬币, 落地后观察哪一面朝上, 币值面向上与否不能确定; 打靶一次, 观察中靶的环数, 能否中 10 环无法确定; 考察一昼夜登陆某网站的人次数, 事先无法预知, 等等. 这类现象称为**随机现象**.

对于随机现象, 虽然每次观察的结果是不确定的, 但是经过长期实践并深入研究后发现, 在大量重复试验或观察下却呈现出某种规律性. 如多次抛掷一枚硬币后, 我们会发现币值面和国徽面(花面)出现的次数大体相同; 同一个人打靶, 其中靶环数按照一定规律分布, 等等. 由于随机现象的这种规律性是通过大量的实验统计得到的, 我们称其为随机现象的**统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 其理论和方法在应用上是十分广泛的, 目前已遍及社会经济、自然科学、工程技术等各个领域. 例如, 使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报, 产品的抽样检查, 在产品开发、技术创新等过程中运用统计分析方法进行试验设计和数据处理, 在可靠性分析方面使用概率统计方法可以获得元器件、装置和系统的使用可靠程度以及平均寿命的估计.

第一节 随机事件

一、随机试验

概率论是通过试验来研究随机现象的. 在这里，试验是一个含义广泛的术语. 凡是对现象的观察、测试或为此而进行的实验统称为**试验**.

E_1: 抛掷一枚硬币，观察正面 H 和反面 T(有币值的一面)出现的情况；

E_2: 抛掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3: 打靶一次，观察命中的环数；

E_4: 一只袋子中装有 1 个白球和 99 个红球，只有颜色不同，从中连续取球，每次任取一只，取后放回，直到取得白球为止，观察取球的次数；

E_5: 测试一只灯泡的寿命；

E_6: 连续抛掷一枚硬币两次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

……

观察上面的试验，它们都具有以下三个特点：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且所有可能的结果事先是明确的；

(3) 试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们把具备以上三个特点的试验称为**随机试验**，简称为**试验**，用字母 E 表示.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com