中小学新教材重点难点解析与训练丛书

● 根据新大纲新教材编著
● 由海淀区著名教师撰写

高中数学

重点·难点解析与同步强化训练

（一年级）

董世奎　朱传瑜　黄建生　编著

广西师范大学出版社

·中小学新教材重点难点解析与训练丛书·

高中数学

重点·难点解析与同步强化训练

（一年级）

董世奎　朱传瑜
黄建生　编著

广西师范大学出版社

中小学新教材重点难点解析与训练丛书

高　中　数　学

重点·难点解析与同步强化训练

（一年级）

董世奎　朱传瑜　黄建生　编著

广西师范大学出版社出版　　邮政编码:541001

（广西桂林市中华路36号）

全国各地新华书店经销

柳州市彩色印刷包装总厂(市商标印刷厂)印刷

*

开本:787×1092　1/32　　印张:10.75　　字数:270千字

1997年2月新一版　　1997年2月第一次印刷

印数:00001—20000册

ISBN 7-5633-1985-9/G·1570

定价:8.00元

前　言

《中学新教材重点难点解析与同步强化训练》(以下简称《同步强化训练》)包括初中一、二年级和高中一、二年级绝大部分文化课学科。1990年出版的《中小学新教材重点难点解析与训练》(以下简称《解析与训练》),主要供初三、高三年级用。而现经过重新修订的这套丛书,增添了《同步强化训练》这一部分。两者配合,便形成一部于学生有指导作用、于教师亦有参考价值的完整的导读系列丛书。

"学习的过程就是知识积累和能力培养的过程,要能有效地积累知识并把知识转化为能力,必须掌握所学知识的重点,突破难点。只有这样,才能收到事半功倍的效果。"(摘引自《解析与训练》序)实践证明,这个看法是符合学习规律的。《解析与训练》的一版再版,为其配套编写《同步强化训练》的呼吁要求,也有力地说明了丛书的构想经受了实践的检验,得到了社会的认可,受到广大读者的欢迎。《同步强化训练》就是在这样的背景下编写的。

基于此,《同步强化训练》力求帮助学生打好基础,培养能力。一方面,帮助学生在中学阶段稳步地、循序渐进地学好基础知识;另一方面,也注重同步地扩展、加深课堂所学知识,培养科学的思维方法和分析问题和解决问题的能力,为学生顺利应试创造条件。

丛书力求突出的特色是:源于教材,适当扩大知识面,突出重点,突破难点。为此,丛书撰写严格遵循严谨扎实的原则,避免课本内容的罗列和重复。撰写力求少而精当,结合知识点给方法、给思路,既体现教学的重难点,又充分重

视知识的综合运用及知识向能力的转化。使学生学有所得，体现出丛书的实用性、指导性。

丛书根据国家教委颁发的各科教学大纲要求，按普通中学现行新课本的章节或单元顺序同步编写。全套书按统一体例编排。

参加本套书编写的有北京大学附中、人民大学附中、北京四中、首都师大附中、北京理工大附中、北京矿业大学附中、北京石油大学附中、北航附中、北医附中、北京中关村中学、北京101中、北京海淀区教师进修学校等部分教师。

由于水平、经验所限，定有谬误疏漏之处，恳请读者和专家指正。

严大成

1994年3月

目　　录

代数部分

第一章　对数与函数

一　对数

1．对数定义　如果 $N=a^b(a>0$ 且 $a\neq1)$，那么幂指数 b 就叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$，其中 N 叫做真数，a 叫做底数．

这里我们应该认识到：

(1) $N=a^b$ 与 $b=\log_a N$ 是反映了同样三个量的同一种关系的两种不同的表达形式，前一个叫做指数式，后一个叫做对数式，这两种形式互为充要条件．其意义是两种形式在同一问题中可以互相等价转化．

(2)由定义可以推导出一系列重要性质：

①$\log_a a^\alpha=\alpha$.

证　令 $a^\alpha=x$，由定义得 $\alpha=\log_a x$，把 $a^\alpha=x$ 代入上式，$\log_a a^\alpha=\alpha$.

此公式指出欲求一个数的对数，只需将真数写成底数幂的形式即可．例如　$\log_{\sqrt{2}}8=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6=6$.

特别是当 $\alpha=1$，$\alpha=0$ 时分别有：

$$\log_a a=1;\quad \log_a 1=0.$$

②$a^{\log_a N}=N$.

证　令 $\log_a N=x$，由定义得 $a^x=N$，把 $x=\log_a N$ 代入上式，得　$a^{\log_a N}=N$.

由公式①，②可以导出所有对数运算法则.

$$\log_a MN = \log_a a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}$$
$$= \log_a a^{\log_a M+\log_a N} = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a (a^{\log_a M} \div a^{\log_a N})$$
$$= \log_a a^{(\log_a M - \log_a N)} = \log_a M - \log_a N.$$

$$\log_a M^\alpha = \log_a (a^{\log_a M})^\alpha$$
$$= \log_a a^{\alpha\log_a M} = \alpha\log_a M.$$

$$\log_{a^\alpha} M = \log_{a^\alpha} a^{\log_a M} = \log_{a^\alpha} a^{\alpha\cdot(\frac{1}{\alpha}\log_a M)}$$
$$= \log_{a^\alpha} (a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\log_a M}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\log_a M.$$

这样我们就导出了四个对数运算法则.

2. 对数运算法则$(M>0,\ N>0)$

(1)$\log_a M\cdot N = \log_a M + \log_a N$；

(2)$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$；

(3)$\log_a M^\alpha = \alpha\log_a M$；

(4)$\log_{a^\alpha} M = \dfrac{1}{\alpha}\log_a M$.

以上证明的关键是利用对数恒等式将真数写成对数的底数幂的形式，根据指数法则和对数定义完成证明．这些证明也可以换一种书写形式，以(3)为例.

证　令 $\log_a M = x$，

∴　$a^x = M$，　∴　$a^{\alpha x} = M^\alpha$.

∴　$\log_a M^\alpha = \alpha x = \alpha\log_a M$.

这里应该指出：

(1)作为法则是有条件的，因此在具体问题中运用这些法则时应该特别注意条件．例如法则(3)，当 $\alpha=2$ 时，在无

$M>0$ 的条件下应为：

$$\log_a M^2 = 2\log_a |M|.$$

(2)如果抛开条件 $M>0$，$N>0$，在运用这些法则时，应特别注意真数取值范围的变化，以法则(1)为例，

$$\log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N.$$

左端只要求 M，N 同号，且全不为零；而右端要求 M，N 同时大于零．因此用此公式将代数式变形时，若从左变到右，真数允许取值范围缩小，若从右变到左，真数允许取值范围扩大了．

3. 换底公式

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

分析　欲将 $\log_a M$ 换成以 b 为底的对数，只需先将 M 从对数式下解脱出来，显然将对数式转化为指数式 M 即可解脱．

证　令 $\log_a M=x$，

$\therefore\quad M=a^x$，　$\therefore\quad \log_b M=x\log_b a$．

又 $a\neq 1$，$a>0$，　$\therefore\quad \log_b a\neq 0$，

$\therefore\quad x=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$，　$\therefore\quad \log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$.

特别是当 $M=b$ 时有：

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}，即\quad \log_a b\cdot\log_b a=1.$$

例 1　计算下列各式：

(1)$\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50$；

(2)$(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$；

(3)$\log_6^2 2+\log_6 3\cdot\log_6 2+\log_6 3$；

(4)$\lg 5^2+\dfrac{2}{3}\lg 8+\lg 5\cdot\lg 20+\lg^2 2$.

解 (1)原式$=\lg^2 5+\lg 2(\lg 2+2\lg 5)$

$$=\lg^2 5+2\lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 2$$

$$=(\lg 5+\lg 2)^2=(\lg 10)^2=1.$$

另解

原式$=\lg^2 5+\lg 2(1+\lg 5)$

$$=\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 5+\lg 2$$

$$=\lg 5(\lg 5+\lg 2)+\lg 2$$

$$=\lg 5+\lg 2=\lg 10=1.$$

(2)原式$=\left(\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$$=\left(\frac{5}{6}\log_2 3\right)\left(\frac{3}{2}\log_3 2\right)=\frac{5}{4}.$$

(3)原式$=\log_6 2(\log_6 2+\log_6 3)+\log_6 3$

$$=\log_6 2\cdot\log_6 6+\log_6 3=\log_6 2+\log_6 3$$

$$=\log_6 6=1.$$

(4)原式$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5(2\lg 2+\lg 5)+\lg^2 2$

$$=2\lg 10+(\lg 2+\lg 5)^2$$

$$=2+(\lg 10)^2=3.$$

注 此题解题思路是利用对数法则及代数恒等变形公式，使之出现 $\log_a a^a$ 的形式.

例 2 计算下列各式：

(1)$3^{\log_9(\lg 2-1)^2}+5^{\log_{25}(\lg 0.5-2)^2}$；

(2)$[(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\cdot\log_6 18]\cdot\log_4 6$.

解 (1)原式$=3^{\log_3(1-\lg 2)}+5^{\log_5(2-\lg 0.5)}$

$$=1-\lg 2+2-\lg 0.5=3-\lg 1=3.$$

(2)原式$=[(\log_6 6-\log_6 3)^2+\log_6 2\cdot\log_6 18]\left(\frac{1}{2}\log_2 6\right)$

$$=\frac{1}{2}[\log_6^2 2+\log_6 2\cdot\log_6 18]\log_2 6$$

$$=\frac{1}{2}\log_6 2\cdot\log_2 6(\log_6 2+\log_6 18)$$

$$=\frac{1}{2}\log_6 36=1.$$

例 3　已知:$\log_2 3=a$，$3^b=7$，求 $\log_{42}56$.

分析　由 $\log_2 3=a\Leftrightarrow\log_3 2=\frac{1}{a}$，$3^b=7\Leftrightarrow\log_3 7=b\Longleftrightarrow\log_7 3=\frac{1}{b}$. 所以求 $\log_{42}56$ 的关键是能否把 $\log_{42}56$ 写成以上对数的表达式，注意到 $42=3\times2\times7$，$56=2^3\times7$，所以换成以 3 为底的对数为好.

解　$\because\ \log_2 3=a$，　$\therefore\ \log_3 2=\frac{1}{a}$.

$\because\ 3^b=7$，　$\therefore\ \log_3 7=b$.

$$\therefore\ \log_{42}56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{1+\log_3 7+\log_3 2}$$

$$=\frac{\frac{3}{a}+b}{1+b+\frac{1}{a}}=\frac{3+ab}{a+ab+1}.$$

注　如果都换成常用对数，那么原题化为：

已知$\begin{cases}\lg3-a\lg2=0,\\ \lg7-b\lg3=0,\end{cases}$求 $\log_{42}56=\frac{3\lg2+\lg7}{\lg2+\lg3+\lg7}$.

因此我们用方程的观点，由已知解出 $\lg3$，$\lg7$，代入目标式即可.

例 4　已知 a，b 为正数，且 $a\neq b$，$a\neq1$，$b\neq1$，$x-y\neq0$，$a^x=b^y=\left(\frac{b}{a}\right)^z$，求证 $z=\frac{xy}{x-y}$.

分析　这是一个由幂的等量关系式——两个独立等式，求证指数间的等量关系式，所以可考虑将 x，y，z 求出，为了方便可考虑引入参数.

证　设 $a^x=b^y=\left(\frac{b}{a}\right)^z=k>0$，

$$\therefore\quad x=\frac{\lg k}{\lg a},\quad y=\frac{\lg k}{\lg b},\quad z=\frac{\lg k}{\lg b-\lg a}.$$

$$\therefore\quad \frac{xy}{x-y}=\frac{\dfrac{\lg^2 k}{\lg a\lg b}}{\dfrac{\lg k}{\lg a}-\dfrac{\lg k}{\lg b}}=\frac{\lg k}{\lg b-\lg a}=z.$$

说明 (1)也可以以 z 为参数，由已知$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x=\dfrac{z(\lg b-\lg a)}{\lg a}, \\ y=\dfrac{z(\lg b-\lg a)}{\lg b}. \end{cases}\text{代入}\frac{xy}{x-y}\Longrightarrow z.$$

(2)注意到 $z=\dfrac{xy}{x-y}\Longleftrightarrow zx-zy=xy$，可考虑构造一个同底数相等的幂.

$$\because\quad a^x=\left(\frac{b}{a}\right)^z,\quad b^y=\left(\frac{b}{a}\right)^z,$$

$$\therefore\quad a^{xy}=\left(\frac{b}{a}\right)^{zy},\quad b^{xy}=\left(\frac{b}{a}\right)^{zx}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{xy}=\left(\frac{b}{a}\right)^{zy-zx}=\left(\frac{a}{b}\right)^{zx-zy}.$$

$\because\quad a\neq b,\quad \therefore\quad xy=z(x-y).$

又 $\quad x-y\neq 0,\quad \therefore\quad \dfrac{xy}{x-y}=z.$

例 5 已知 a, b, c 为三角形的三条边，且均不等于 1，并满足 $a\neq b\neq c$，

$$\frac{a(b+c-a)}{\lg a}=\frac{b(a+c-b)}{\lg b}=\frac{c(a+b-c)}{\lg c}.$$

求证：$a^b b^a=b^c c^b=c^a a^c$.

分析 注意到条件式与目标式差异，可考虑将目标式化为等价的对数形式.

$$a^b b^a=c^a a^c\Longleftrightarrow\frac{a}{\lg a}=\frac{b-c}{\lg c-\lg b}.$$

证法一 $\because\quad \dfrac{a(b+c-a)}{\lg a}=\dfrac{b(a+c-b)}{\lg b}=\dfrac{c(a+b-c)}{\lg c},$

$$\therefore\quad \frac{a(b+c-a)}{\lg a}=\frac{b(a+c-b)-c(a+b-c)}{\lg b-\lg c}$$

$$=\frac{(c-b)(b+c-a)}{\lg b-\lg c}.$$

又 a，b，c 为三角形的三条边，

$\therefore\quad b+c>a$，　$\therefore\quad b+c-a>0$，

$$\therefore\quad \frac{a}{\lg a}=\frac{c-b}{\lg b-\lg c},$$

$\therefore\quad \lg b^a-\lg c^a=\lg a^c-\lg a^b$，

$\therefore\quad \lg b^a+\lg a^b=\lg a^c+\lg c^a$，

$\therefore\quad \lg(b^a a^b)=\lg(a^c c^a)$，　$\therefore\quad b^a a^b=a^c c^a$.

同理可证：$b^c c^b=a^c c^a$.

$\therefore\quad a^b b^a=b^c c^b=a^c c^a$.

证法二　设 $\dfrac{a(b+c-a)}{\lg a}=\dfrac{b(a+c-b)}{\lg b}=\dfrac{c(a+b-c)}{\lg c}=\dfrac{1}{k}$，

$\therefore\quad \lg a=ka(b+c-a)$，　$\lg b=kb(a+c-b)$.

$\therefore\quad b\lg a+a\lg b=kab[(b+c-a)+(a+c-b))]=2kabc$，

$\lg a^b+\lg b^a=2kabc$，　$\lg a^b b^a=2kabc$.

同理可证：$\lg b^c c^b=\lg a^c c^a=2kabc$.

$\therefore\quad \lg a^b b^a=\lg b^c c^b=\lg a^c c^a$. 从而　$a^b b^a=b^c c^b=a^c c^a$.

例 6　已知 $\sqrt{10}=3.162$，$\lg 2=0.3$. 试求 5^{64} 有几位数，并求出 5^{64} 的近似值.

解　令 $y=5^{64}$，

$\therefore\quad \lg y=64\lg 5=64(1-\lg 2)=64\times 0.7=44.8$.

$\therefore\quad 5^{64}$ 是 45 位数.

又　$\lg 3.162=0.5$，　$\lg 2=0.3$，

$\therefore\quad \lg 3.162+\lg 2=0.8$，　即　$\lg 6.324=0.8$.

$\therefore\quad y=6.324\times 10^{44}$，　即　$5^{64}=6.324\times 10^{44}$.

例 7 设 x 是一位正整数，$\frac{1}{x}$的对数尾数(常用对数)小于 x 的对数尾数，求 x.

解 $\because$ x 为一位正整数，$\therefore$ $\lg x$ 为 x 的对数的尾数.

又 $0<\frac{1}{x}<1$， $\therefore$ $\lg\frac{1}{x}$为负的纯小数.

$\therefore$ $1+\lg\frac{1}{x}$为$\frac{1}{x}$的对数的尾数.

由已知得

$$1+\lg\frac{1}{x}<\lg x,$$

$\therefore$ $2\lg x>1$； $\therefore$ $x>\sqrt{10}$.

又$\because$ x 为一位正整数， $\therefore$ $3<x<10$，

$\therefore$ $x=4, 5, 6, 7, 8, 9$；$\therefore$ $x\in\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

例 8 已知 $\lg 7=0.8451$，$\lg x=2\times(-2.8451)$，求 x 的值.

解 $\because$ $\lg x=2\times(-2.8451)$，

$\therefore$ $\lg x^{-\frac{1}{2}}=2.8451$.

又$\because$ $\lg 7=0.8451$，

$\therefore$ $x^{-\frac{1}{2}}=7\times10^{2}$， $\therefore$ $x=\frac{1}{49}\times10^{-4}$.

练习 1.1

1. 计算下列各题：

(1) $-8\times16^{-2^{-2}}-(-2^2)^2$；　　(2) $\left(8b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}b\sqrt[4]{x^{\frac{3}{4}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$；

(3) $\frac{(2a^{-3}b^{-2})(-3a^{-1}b)}{4a^{-4}b^{-3}}$；　　(4) $\left(27a^{\frac{5}{6}}\sqrt{ab^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{b^{\frac{4}{3}}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$；

(5) $\frac{(x-y)^3(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3(\sqrt{xy}-x)}{x-y}$；

(6) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$；

(7) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})$；

(8) $\left[\dfrac{(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}})(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right]\cdot(a+b)^{-1}$.

2. 计算下列各题：

(1) $\lg^2 5+2\lg 2-\lg^2 2$；

(2) $|\lg 5-4|-\sqrt{\lg^2 5-6\lg 5+9}$；

(3) $\log_6 6+\log_6 1+\log_{27} 3-\log_{0.2} 125+\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{4}$.

3. (1) 已知 $\log_8 9=a$，$\log_2 5=b$，求 $\lg 2$，$\lg 3$，$\lg 5$；

(2) 已知 $\log_{18} 9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36} 45$；

(3) 已知 $\lg 392=a$，$\lg 112=b$，求 $\lg 7$，$\lg 2$；

(4) 已知 $12^a=27$，求 $\log_6 16$.

4. 计算：

(1) $2^{4+\log_2 3}$；　　(2) $a^{\frac{1}{3}\log_a b}$；

(3) $100^{\lg\sqrt{3}}$　　(4) $25^{\frac{1}{3}\log_5 27+4\log_{125} 8}$.

5. 已知：$2\lg[\frac{1}{2}(x-y)]=\lg x+\lg y$，求 $\frac{x}{y}$ 的值.

6. 取 $\lg 2=0.3$，$\sqrt{10}=3.16$，试判断 2^{64} 是几位数？并求出其近似值.

7. a 是自然数，a^{100} 是一个 120 位数，试判断 $\frac{1}{a}$ 从小数点后第几位出现非零数字？

8. 已知：$\lg 2.56=0.4082$，$\lg x=\frac{1}{2}(-1.5918)$，求 x.

9. 计算：

(1) $\dfrac{\lg 8+\lg 125-\lg 2-\lg 5}{\lg\sqrt{10}\cdot\lg 0.1}$；

(2) $(\lg 0.25)^2-\lg 4\cdot\lg 2+\lg 2^{-\lg 2^2}$；

(3) $2^{\log_4(\lg 3-1)^2}+3^{\log_{81}(\lg\frac{1}{3}-2)^4}$.

二　函数中的基本概念

函数概念的产生，说明数学研究对象有了根本性的发展．有了崭新的观点和方法，标志着数学跨入了一个新的时期——变量数学的时期．

客观世界在不断地变化，事物之间普遍联系、互相制约．因此对于世界中的空间形式和量的关系，也只有从变化中，从事物之间的相互关系中去认识，才能够得到更深刻的了解，才能更深入地掌握客观规律，从而也能够较好地解决实际中所提出的问题．所以我们必须深刻理解函数中的各种概念，灵活掌握函数中的各种基本方法．

1. 函数

函数的近代定义是指：从非空集合 A 到非空集合 B 上的映射 $f:A\rightarrow B$. 这里的"上"是指集合 B 中的元素在集合 A 中都有原象，也就是 A 中的所有元素在 f 下的象要充满集合 B. 这里应深刻理解函数就是揭示两个非空集合元素间的一种特殊对应关系，即对于集合 A 中的每一个元素 x，在对应法则 f 的作用下，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应．这种从集合 A 到集合 B 的特殊对应关系"f"，就叫做定义在集合 A 上的元素 x 的函数．记作 $y=f(x)$. 其中原象集 A 叫做函数的定义域，象集 B 叫做函数的值域．

从定义可知，对于一个函数，定义域和对应规律"f"一旦确定了，这个函数也就唯一的被确定了．同时，这个函数的值域也就被确定了．所以我们通常把函数的定义域和对应规律叫做函数的两大要素．从映射观点再加上值域合称函数的三大要素，而这里面对应法则是使"映射"得以实现的方法和途径，是联系自变量与因变量的纽带，从而是函数的核心．由以上分析可知，若比较两个函数是否相同，那就看两