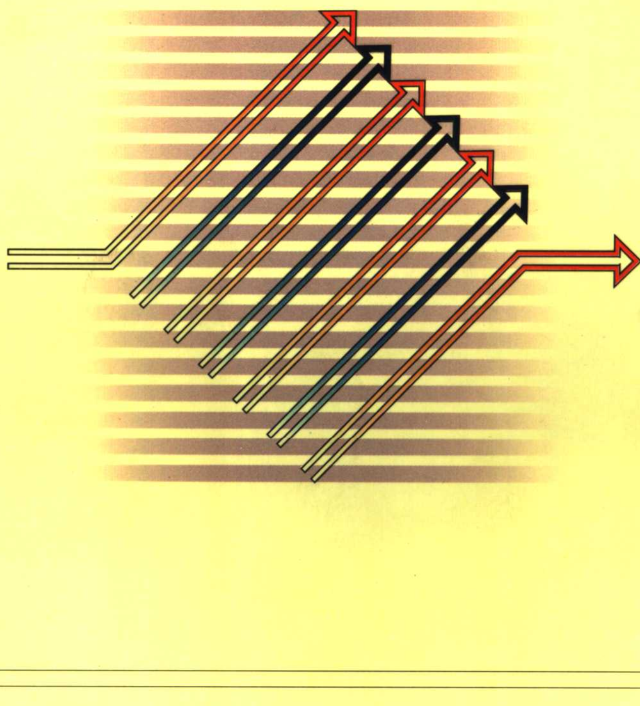
高等数学导学

曹爱民 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学导学

曹爱民　编著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书系统讲解了高等数学的所有重要知识点，包括基本概念、基本思想、基本原理与基本方法，注重理论联系实际，突出解题思路，详尽介绍重要知识点的解题方法以及多种解题方法之间的联系，并使解题思路条理化。书后设计综合练习20套，以使读者得到比较系统的训练和提高。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导学/曹爱民编著.—北京:国防工业出版社，2006.8

ISBN 7-118-04618-3

Ⅰ.高... Ⅱ.曹... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086158 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 12¾ **字数** 230 千字

2006年8月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 20.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

本书依据高职高专《高等数学》教学大纲，以及编者多年来高等数学的教学经验，专门为高职高专学生编写，既可以作为学习《高等数学》的课外辅导书，又可以作为专升本学生的辅导用书。

本书系统讲解了《高等数学》的所有重要知识点，包括基本概念、基本思想、基本原理与基本方法，注重理论联系实际，突出解题思路，详尽介绍重要知识点的解题方法以及多种解题方法之间的联系，并使解题思路条理化，使读者便于学习和记忆。在内容和解题方法之后，设计了20套综合练习题，可以使读者得到比较系统的训练和提高。章节安排与教材一致，便于复习和巩固。内容安排循序渐进，层次分明，前后呼应，便于读者更快、更好地学习掌握《高等数学》的基本内容。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请同行和读者批评指正。

曹爱民

目 录

第一章　函数、极限和连续

一、总体要求

(一) 函数

(1) 理解函数的概念：函数的定义，函数的表示法，分段函数；

(2) 理解和掌握函数的简单性质：单调性，奇偶性，有界性，周期性；

(3) 了解反函数：反函数的定义，反函数的图像；

(4) 掌握函数的四则运算和复合运算；

(5) 理解和掌握基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数；

(6) 了解初等函数的概念。

(二) 极限

(1) 理解数列极限的概念：数列，数列极限的定义，能根据极限概念分析函数的变化趋势；会求函数在一点处的左极限与右极限，了解函数在一点处极限存在的充分必要条件；

(2) 了解数列极限的性质：唯一性，有界性，四则运算定理，夹逼定理，单调有界定理，极限存在定理；掌握极限的四则运算法则；

(3) 理解函数极限的概念：函数在一点处极限的定义，左右极限及其与极限的关系，x趋于无穷时函数的极限；

(4) 掌握函数极限的定理：唯一性定理，夹逼定理，四则运算定理；

(5) 理解无穷小量和无穷大量：无穷小量与无穷大量的定义，无穷小量与无穷大量的关系，无穷小量与无穷大量的性质，两个无穷小量的比较；

(6) 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法。

(三) 连续

(1) 理解函数连续的概念：函数在一点连续的定义，左连续和右连续，函数在一点连续的充分必要条件，函数的间断点及其分类；

(2) 掌握函数在一点连续的性质：连续函数的四则运算，复合函数的连续性，反函数的连续性；会求函数的间断点及确定其类型；

(3) 掌握闭区间上连续函数的性质：有界性定理，最大值和最小值定理，介

值定理(包括零点定理)；会用介值定理推证一些简单命题；

(4) 理解初等函数在其定义区间上连续，并会利用连续性求极限。

二、基本知识

(一) 函数

1. 函数的定义

在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某个范围 D 内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫自变量，记作 $y=f(x)$ (其中 f 是对应法则)。自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

注：两个函数相等当且仅当函数的定义域和对应法则(又称函数的两个要素)都相同。

2. 分段函数

在定义域的不同点集内由不同的式子表示的函数称为分段函数。

3. 函数的性质

1) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得任意 $x\in D$，都有 $|f(x)|<M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上无界。

注：有界函数的图像在直角坐标系中表现为其界于两条水平直线之间。

2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，任意 $x_1<x_2\in D$，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上是单调递增的；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上是单调递减的。

3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

注：奇函数的图像关于坐标原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

4) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 T $(T\neq 0)$，使得任意 $x\in D$，$x\pm T$ 也在定义域中，且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 是它的

一个周期。

注：一般把满足上述条件的最小正常数 T 称为函数的周期，且周期函数在它的每一个周期内图像都是完全相同的。

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别为 D、W,若对于变量 W 中的每一个值，D 中有唯一确定的值与之对应，则由此确定的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}y$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上，将 x,y 互换，记作 $y=f^{-1}(x)$。在同一坐标系内，两个图形关于 $y=x$ 对称。

5. 基本初等函数

(1) 常函数：函数 $y=a$ (a 是常数)称为常函数。其图像为平行于 x 轴的一条直线。

(2) 幂函数：函数 $y=x^{u}$ (u 为任意实数)称为幂函数。

(3) 指数函数：函数 $y=a^{x}$ ($a>0,a\neq1$)称为指数函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

(4) 对数函数：函数 $y=\log_{a}x$ ($a>0,a\neq1$)称为对数函数，它的定义域为 $(0,+\infty)$，所以图像在 y 轴右方。

注：函数 $y=a^{x}$ 和 $y=\log_{a}x$ 互为反函数。

(5) 三角函数：包括正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$。

(6) 反三角函数：包括反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$。

6. 复合函数

设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，并且 $u=\varphi(x)$ 值域的全部或一部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则可以构成一个以 x 为自变量，以 y 为函数值的复合函数，记作 $y=f\left[\varphi(x)\right]$，其中 u 是中间变量。

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合所构成的能用一个式子表达的函数称为初等函数。

(二) 极限

1. 数列的极限

(1) 数列的定义：按某种规律有次序地排列起来的一串数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为数列，简记为 $\{x_n\}$，其中 x_1 叫首项，x_n 叫通项。

注：数列的实质是以全体自然数为定义域的特殊函数。可以记为 $x_n = f(n)$。

(2) 数列的极限：给定数列$\{x_n\}$，当 $n \to \infty$ 时，如果 x_n 与常数 a 无限接近，称$\{x_n\}$极限存在，且极限为 a，或称数列$\{x_n\}$收敛于 a。记作：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。如果数列无极限，也称数列是发散的。

(3) 数列极限的性质：

性质 1：数列$\{x_n\}$若存在极限，则极限是唯一的。

性质 2：如果数列$\{x_n\}$存在极限，那么数列一定有界。

性质 3：如果数列$\{x_n\}$收敛于 a，那么它的任一子列也收敛于 a。

性质 4：单调有界数列必有极限。

性质 5(夹逼性定理)：设有数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$，如果 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

性质 6(数列极限的四则运算法则)：设数列$\{x_n\},\{y_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\ (b \neq 0)$则：

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$

② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$

2. 函数的极限

1) 函数极限的定义

(1) 自变量趋于有限数时函数的极限：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

(2) 自变量趋于无穷大时函数的极限：

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。

2) 函数极限的性质

性质 1(唯一性)：若 $f(x)$ 在 x_0 点存在极限，则极限是唯一的。

性质 2(有界性)：若 $f(x)$ 在 x_0 点存在极限，则存在常数 $M>0$ 与 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)| \leqslant M$。

性质 3(保号性)：若 $f(x)$ 在 x_0 点存在极限，且等于 $A>0(A<0)$，则必存在 x_0 的某一邻域，在该邻域内，有 $f(x)>0(f(x)<0)$；若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则必有 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$。

性质 4：若对于任意 x_0 的去心邻域内的点 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$。

性质 5：若对于任意 x_0 的去心邻域内的点 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。

性质 6：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\,(B\neq 0)$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{A}{B}$

3) 左、右极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 $x\to x_0+0$ 时，$f(x)$ 与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0+0$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$；如果当 $x\to x_0-0$ 时，$f(x)$ 与一常数 A 无限接近，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0-0$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$。

定理：函数 $f(x)$ 在 x_0 点左、右极限存在的充要条件是：$f(x)$ 在 x_0 点极限存在且相等。

4) 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

5) 无穷小与无穷大

(1) 定义：任意一个变量，只要它在某一变化过程中以 0 为极限，这个变量就叫无穷小；若在某一变化过程中趋于无穷大，则称为无穷大。

(2) 无穷小的性质：

性质 1：有限个无穷小的和或乘积仍是无穷小；

性质 2：无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小；

性质 3：若 $|f(x)|$ 在某一过程中是无穷小，则 $f(x)$ 在该过程中也是无穷小；

性质 4：极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 存在的充要条件是：函数 $f(x)$ 可以表示为 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是无穷小(在 $x \to x_0$ 的过程中)。

(3) 无穷小的比较：

设函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的两个无穷小。

1^0：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 高阶的无穷小；

2^0：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 低阶的无穷小；

3^0：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同阶无穷小。

特别地，当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 等价，记作：$\alpha(x) \sim \beta(x)$。

(4) 无穷小与无穷大的关系：

在某一变化过程中，若 $\alpha(x)$ 是无穷小且不取零值(即 $\alpha(x) \neq 0$)，则其倒数 $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ 是无穷大；反之，在某一变化过程中，若 $\beta(x)$ 是无穷大，则其倒数 $\dfrac{1}{\beta(x)}$ 是无穷小。

(5) 等价无穷小的代换性质：

设在某一变化过程中：

1^0：若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ 也存在，且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$。

2^0：若 $\alpha \sim \gamma$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \beta$。

(6) 常见的几个等价关系：在 $x \to 0$ 的过程中：

$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x-1 \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1 \sim \dfrac{x}{n}$。

(三) 连续

1. 函数连续性的概念

(1) 函数在一点连续的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义。

定义 1：若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

定义 2：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

(2) 函数在区间上连续的定义：若函数在区间内的每一点都连续，则称函数在区间上连续。

(3) 左、右连续：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

(4) 定理：函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件是，函数在 x_0 点既左连续，又右连续。即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$。

2. 间断点及其分类

(1) 间断点的定义：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点或不连续点。

(2) 分类：

① 第一类间断点：设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处左、右极限都存在，则称点 x_0 是第一类间断点，其中又分为：

跳跃间断点：若左、右极限不相等，称 x_0 为跳跃间断点。

可去间断点：若左、右极限相等，称 x_0 为可去间断点。

② 第二类间断点：函数在点 x_0 至少有一侧极限不存在，统称为第二类间断点。

3. 初等函数的连续性

(1) 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 点连续，则这两个函数的和、差、积、商在 x_0 也连续。

(2) 由连续函数经有限次复合而成的复合函数在定义区间内仍连续。

(3) 单调增加(减少)且连续的函数，其反函数也是单调增加(减少)且连续的。

(4) 初等函数在其定义的区间内都是连续的。

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值、最小值定理：在闭区间上的连续函数必存在最大值、最小值。

(2) 有界性定理：闭区间上的连续函数必有界。

(3) 介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 c，在 (a,b) 内至少存在一个点 x_0，使 $f(x_0)=c$。

(4) 零点定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一个点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

三、基本题型

(一) 判断函数是否为同一个函数

由函数的定义可以看出，要判断两个函数是否相等时只需判断函数的定义

域和对应法则是否相同即可，因为在函数的定义域和对应法则完全相同的情况下，其值域也一定相同。

例 1. 判断下列函数是否为同一个函数。

(1) $y=x, y=\sqrt{x^2}$ (2) $y=\sin^2 x+\cos^2 x, y=1$

(3) $y=\lg x^2, y=2\lg x$ (4) $y=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t, y=\int_0^{x}\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$

解：(1) 不同，因为对应法则不同。$y=\sqrt{x^2}$ 中，当 $x\geqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，$y>0$。$y=x$ 中，当 $x\geqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，$y<0$。

(2) 相同，因为对任意的 x，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 恒成立。

(3) 不同，因为定义域不同，$y=\lg x^2$ 的定义域是 $\{x|x\in R, x\neq 0\}$；$y=2\lg x$ 的定义域是 $\{x|x\in R, x>0\}$。

(4) 相同，因为由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t\right]=\frac{\sin x^2}{x}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{x}\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t\right]=\frac{\sin x^2}{x}$，知两函数相差一个常数，当 $x=0$ 时函数值相等，所以此常数为零，故两函数相等。

例 2. 下列表示同一个函数的是(　　)。

A. $\log_2(x+1)^2$ 和 $2\log_2(x+1)$　　B. $\sqrt{(x+1)^2}$ 和 $|x+1|$

C. $\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$ 和 $x+1$　　D. $\sqrt{x(x+1)}$ 和 $\sqrt{x}\sqrt{x+1}$

解：由分析可知，应选 B。

(二) 求函数的定义域

求定义域时常用的几个结论：

(1) 函数关系中若有分式，则分母不为零；

(2) 偶次方根下，表达式大于等于零；

(3) 函数中有对数，则其真数大于零；其底数大于零且不等于 1；

(4) 正切函数、余切函数要注意其定义域分别为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$(k\pi-\pi, k\pi)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

(5) 反正弦函数、反余弦函数要符合其定义域；

(6) 当一个表达式中同时有以上几种情况时，取它们的交集。

例 1. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\frac{1}{\log_2(x+1)}$

解：只需 $x+1>0$，且 $x+1\neq 1$，即定义域为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$。

(2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+x}$

解：$1-x^2\neq 0$，$1+x\geqslant 0$ ，即 $x\neq\pm 1$, 且 $x\geqslant -1$，取它们的交集。

所以定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(3) $y=\arccos\frac{2-x}{3}$

解：$\left|\frac{2-x}{3}\right|\leqslant 1$，即 $|2-x|\leqslant 3$，所以定义域为 $[-1,5]$。

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

解：$2-x^2>0$，得 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；再由 $\left|\frac{1}{2}x-1\right|\leqslant 1$，得 $x\in[0,4]$，取它们的交集。所以定义域为 $[0,\sqrt{2}]$。

例 2. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为[−1，2]，求函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域。

解：因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为[−1，2]，所以 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 2$，解之得 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，即函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$。

例 3. 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}, u=\varphi(x)=x+1$，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域。

解：因为 $f(u)$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$，即 $[-2,2]$，$\varphi(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以由 $|u|=|x+1|\leqslant 2$，得函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[-3,1]$。

(三) 求函数的解析式

(1) 已知函数 $f(x), g(x)$ 的解析式，求 $f[g(x)]$ 的解析式。

例 1. 设 $f(x)=3x^2+2x, g(x)=\lg(1+x)$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

解：$f[g(x)]=3g^2(x)+2g(x)=3\lg^2(1+x)+2\lg(1+x)$，($x>-1$)；

$g[f(x)]=\lg[1+f(x)]=\lg(3x^2+2x+1)$，($x\in\mathbf{R}$)。

(2) 已知 $f[g(x)]$ 的解析式，求函数 $f(x)$ 的解析式。

这类题目的解法主要有两种，一是“拼凑法”，二是“换元法”。

例 2. 设 $f(x+1)=x^2+2x+2$，求 $f(x)$。

解法一：因为 $f(x+1)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$，所以 $f(x)=x^2+1$。

解法二：令 $x+1=t$，所以 $x=t-1$，代入 $f(x+1)=x^2+2x+2$ 中，得 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)+2$，整理得 $f(t)=t^2+1$，即 $f(x)=x^2+1$。

例 3. 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$。

解法一：$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$，所以 $f(x)=x^2-x+1$。

解法二：令 $e^x+1=t, x=\ln(t-1)$，原式化为 $f(t)=e^{2\ln(t-1)}+e^{\ln(t-1)}+1=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$，即 $f(x)=x^2-x+1$。

例 4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，则当 $x\neq 0$ 时，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=(\quad)$。

A. $\dfrac{x-1}{x}$　　B. $\dfrac{x}{x-1}$　　C. $1-x$　　D. x

解：$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x$，所以应选 C。

例 5. 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}x-\pi, x\leqslant 0\\ x+\pi, x>0\end{cases}$，则 $f[g(x)]=(\quad)$。

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $-\cos x$

解：$f(g(x))=\begin{cases}\sin(x-\pi)=-\sin x, & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi)=-\sin x, & x>0\end{cases}$，所以应选 C。

(四) 求函数值

解这类题目时，要特别注意原来函数的定义域，而且如果所求函数的变量是一个表达式时，要整体代入，再化简整理。

例 1. 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x<3\\ x^2+1, & 3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(2), f(3)$。

解：因为 $\dfrac{1}{2}\in[0,1]$ 所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$；因为 $2\in(1,3)$ 所以 $f(2)=2x\big|_{x=2}=4$ 因为 $3\in[3,4]$ 所以 $f(3)=x^2+1\big|_{x=3}=10$。

例 2. 设 $f(x)=\begin{cases}2, |x|\leqslant 1\\ 0, |x|>1\end{cases}$，求 $f[f(1)]$。

解：由题意，$f(1)=2$ 所以 $f[f(1)]=f(2)=0$。

(五) 判断函数的单调性

函数单调性的判断方法在这里主要是利用定义来判断，在导数的应用中还有更方便的方法，我们到后面再讲。

例 1. 判断下列函数的单调性。

(1) $f(x)=2x^2+1$　　(2) $f(x)=e^{-x}$

解：(1) $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，对定义域内任意的 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=(2{x_2}^2+1)-(2{x_1}^2+1)=2({x_2}^2-{x_1}^2)=2(x_2+x_1)(x_2-x_1)$，当 $x_1,x_2\in$

$(-\infty,0)$ 时， $x_1+x_2<0$ ， $x_2-x_1>0$ ，所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$ ，函数单调递减；当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时， $x_1+x_2>0$ ， $x_2-x_1>0$ ，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$ ，函数单调递增。但从定义域 $\mathbf{R}$ 来看， $f(x)$ 不是单调函数。

(2) (略)。

例 2. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，证明 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内也单调递增。

证明：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以在 $(-1,1)$ 内， $f(-x)=-f(x)$ ，对 $(-1,0)$ 内的任意两个数 $x_1<x_2$ ，则 $f(x_2)-f(x_1)=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]=-f(-x_2)-[-f(-x_1)]=f(-x_1)-f(-x_2)$ ，由于 $-1<x_1<x_2<0$ ，即 $0<-x_2<-x_1<1$ ，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)-f(x_1)>0$ ，即 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内也单调递增。

(六) 判断函数的奇偶性

函数奇偶性的判断方法主要有：

(1) 根据定义，即设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，对任意 $x\in D$ ，都有 $f(-x)=-f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对任意 $x\in D$ ，都有 $f(-x)=f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数。

注：记住一些常见函数的奇偶性，如 $y=x$ ， $y=x^3$ ， $y=\sin x$ ， $y=\arcsin x$ ， $y=\tan x$ ， $y=\arctan x$ ， $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 等均为奇函数； $y=x^2$ ， $y=\cos x$ ， $y=|x|$ ， $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等均为偶函数。

(2) 由下列结论来判断：

① 两个奇函数的代数和是奇函数；两个偶函数的和是偶函数；奇函数与偶函数的和既非奇函数，也非偶函数。

② 两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；奇函数与偶函数的乘积是奇函数。

例 1. 判断下列函数的奇偶性。

(1) $y=x^3+3x$　(2) $y=\sin x-\cos x$　(3) $y=xe^x$　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(5) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$　(6) $y=2^x+2^{-x}$　(7) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(8) $y=\dfrac{x(e^x-1)}{e^x+1}$　(9) $y=\dfrac{\sin(\sin x)}{x}(x\neq0)$　(10) $y=x^3+\dfrac{\arctan x}{x}(x\neq0)$

解：略。

例 2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，下列函数中必为奇函数的是(　　)。

A. $y=-|f(x)|$ B. $y=xf(x^2)$ C. $y=-f(-x)$ D. $y=f(x)+f(-x)$

解：由奇函数的定义可得，应选 B。

(七) 求函数的周期

例 3. $y=|\sin x|$ 的周期是(　　)。

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

解：应选 C。

(八) 极限的求法

1. 观察法

根据所给数列的通项及其变化规律，判断出其极限的值，这种方法限于比较简单的数列。

例 1. 根据下列数列的通项，判断数列是否收敛。

(1) 1，3，5，7，…，2n+1，…

(2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

(3) $0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1-(-1)^n}{2^n},\cdots$

(4) $-\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5},-\dfrac{5}{7},\dfrac{7}{9},\cdots,(-1)^n\dfrac{2n-1}{2n+1},\cdots$

解：(1)通项为 2n+1，当 n 趋于无穷大时，2n+1 也趋于无穷大，所以该数列发散。

(2) 通项为 $\dfrac{1}{2^n}$，当 n 趋于无穷大时，$\dfrac{1}{2^n}$ 趋于 0，所以该数列收敛。

(3) 通项为 $(-1)^n\dfrac{2n-1}{2n+1}$，奇数项恒为 0，偶数项趋于 0，所以该数列收敛。

(4) 当 n 趋于无穷大时，奇数项趋于-1，偶数项趋于 1，所以该数列发散。

2. 利用四则运算法则来求。

例 2. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$

解：(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{3}$