

高等数学

(合订本)

贲亮 等编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

成人高等教育教材

高等数学

(合订本)

贵亮等编

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 提 要

本书参照普通高等理工院校成人教育《高等数学教学基本要求》编写而成,可作为高等函授教育、现代远程教育及夜大学等成人高等教育(工科)的教学用书。

本书主要包括:函数、极限、连续、一元函数的微积分、多元函数的微积分、级数和常微分方程等内容。本书编写力求逻辑严密、重点突出、深入浅出、便于自学。文中穿插有学习指导,各章后均有内容总结与要求,并配有自我检查的思考题和练习题,书末附有希腊字母表、参考用曲线图、积分表和习题答案。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:合订本/贲亮等编. —北京:北京邮电大学出版社,2006

ISBN 7-5635-1271-3

I. 高... II. 贲... III. 高等学校—成人教育:高等教育—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 054756 号

书 名: 高等数学(合订本)

编 者: 贲亮 等

责任编辑: 李欣一

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(100876)

北方营销中心: 电话:010-62282185 传真:010-62283578

南方营销中心: 电话:010-62282902 传真:010-62282735

E - mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京市梦宇印务有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 27.5

字 数: 682 千字

印 数: 1—5 000 册

版 次: 2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-1271-3/O · 106

定价:39.00 元

如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社营销中心联系

前 言

本书参照普通高等理工院校成人教育《高等数学教学基本要求》编写而成,可作为高等函授教育、现代远程教育及夜大学等成人高等教育(工科)的教学用书。

本书内容包括:函数、极限、连续、一元函数的微积分、多元函数的微积分、级数和常微分方程。

本书编写力求逻辑严密、重点突出、深入浅出、便于自学。文中穿插有学习指导,各章后均有内容总结与要求,并配有自我检查的思考题和练习题,书末附有希腊字母表、参考用曲线图、积分表和习题答案。书中加*号处为高等院校网络教育部分公共基础课全国统一考试所不考的内容,可根据教学需要进行取舍。

学生应循序渐进地阅读本教材,重点和难点内容需反复阅读,并认真、独立地回答全部思考题和完成练习题。

本书由北京邮电大学网络教育学院数学教研组组织编写,邵因、彭绍明、贵亮等参加了编写工作。为适应现代网络教育的改革与发展,在保持高等数学内容的科学性与系统性以及后续课程需求的基础上,由贵亮对2002年版的内容做了较大地调整与修改,如有不妥之处,恳请读者批评、指正。

编 者

2006年5月

目 录

第一章 函数

第一节 函数的定义	1
第二节 函数的定义域	3
第三节 函数记号	8
第四节 函数的几种特性	10
第五节 反函数	14
第六节 基本初等函数	15
第七节 复合函数 初等函数	19
本章总结	23

第二章 函数的极限

第一节 数列的极限	24
第二节 函数的极限	29
第三节 无穷小和无穷大	35
第四节 极限运算法则	39
第五节 两个重要极限	45
第六节 无穷小的比较	51
本章总结	53

第三章 函数的连续性

第一节 函数的连续与间断	55
第二节 初等函数的连续性	59
第三节 闭区间上连续函数的性质	64
本章总结	66

第四章 导数与微分

第一节 导数概念	67
第二节 函数的和、积、商的求导法则 反函数的求导法	76
第三节 复合函数的求导法则	83
第四节 初等函数的求导问题	86
第五节 高阶导数	91
第六节 隐函数求导法 由参数方程所确定的函数求导法	95
第七节 函数的微分	102
本章总结	109

第五章 导数的应用

第一节 中值定理	112
第二节 罗必塔法则	117
第三节 函数单调性的判定法	122

第四节	函数的极值及其求法·····	125
第五节	函数的最大值和最小值·····	129
第六节	曲线的凹凸与拐点·····	132
* 第七节	函数作图举例·····	134
本章总结	·····	137
第六章	不定积分	
第一节	不定积分的概念和性质·····	138
第二节	换元积分法·····	146
第三节	分部积分法·····	157
第四节	特殊类型函数的积分·····	162
* 第五节	积分表的用法·····	172
本章总结	·····	174
第七章	定积分及其应用	
第一节	定积分的概念·····	176
第二节	定积分的性质·····	181
第三节	定积分与不定积分的关系·····	185
第四节	定积分的换元积分法和分部积分法·····	190
* 第五节	定积分的近似算法·····	197
第六节	平面图形的面积 元素法·····	201
第七节	体积·····	207
* 第八节	平面曲线的弧长·····	211
* 第九节	广义积分·····	213
本章总结	·····	218
第八章	多元函数的微积分	
第一节	空间解析几何简介·····	220
第二节	多元函数的概念·····	229
第三节	二元函数的极限和连续性·····	233
第四节	偏导数·····	235
第五节	全微分及其应用·····	239
第六节	多元复合函数的微分法·····	244
第七节	二元函数的极值·····	251
第八节	二重积分的概念和性质·····	257
第九节	二重积分的计算法·····	262
* 第十节	对坐标的曲线积分·····	274
本章总结	·····	289
* 第九章	级数	
第一节	常数项级数的概念和性质·····	291
第二节	常数项级数的判敛法·····	297
第三节	幂级数·····	307

第四节	泰勒级数·····	312
第五节	函数展开成幂级数·····	317
第六节	函数的幂级数展开式的应用·····	324
第七节	三角级数·····	329
第八节	周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数 ·····	330
第九节	正弦级数和余弦级数·····	337
第十节	周期为 $2l$ 的函数展开成傅里叶级数 ·····	341
	本章总结·····	347
第十章 常微分方程		
第一节	微分方程的基本概念·····	351
第二节	一阶微分方程·····	354
* 第三节	可降阶的高阶微分方程·····	362
* 第四节	线性微分方程解的结构·····	367
* 第五节	二阶常系数齐次线性微分方程·····	370
* 第六节	二阶常系数非齐次线性微分方程·····	374
	本章总结·····	382
附录 A	希腊字母表·····	384
附录 B	常用曲线图·····	385
附录 C	积分表·····	389
附录 D	习题答案·····	398

第一章 函 数

函数是高等数学研究的对象,因此,函数的概念是高等数学中最重要的概念之一.本章将首先给出函数的定义.高等数学中多数研究的是初等函数.本章将复习各类基本初等函数及其图形,介绍复合函数,最后给出初等函数的概念.

第一节 函数的定义

一、定义的引出

在同一种自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量,而且这几个变量通常并不是互不相干地、孤立地在变化着,而是相互联系地、遵循着一定的规律在变化着.下面先就两个变量的情形(多于两个变量的情形在第八章中介绍)举几个例子.

例 1 真空中自由落体下落的时间 t 和下落的路程 s 都是变量,并且这两个变量并不是孤立地变化着,而是遵循自由落体运动的规律

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

相互联系地变化着,其中 g 是重力加速度.

例 2 一个 $10\ \Omega$ 的电阻,使用不同的电压通电,用电流表测得电压 U 和电流 I 的关系如表 1-1 所示.

在这个问题中,电压 U 和电流 I 都是变量,并且是遵循表 1-1 所示的规律(U 为 5 V 时, I 为 0.55 A, U 为 10 V 时, I 为 1.04 A……)相互联系地变化着.

表 1-1

U/V	5	10	15	20	25	30
I/A	0.55	1.04	1.45	2.01	2.45	3.01

例 3 某气象观测站用自动温度记录仪,记录得到某日某地区的气温变化如图 1-1 所示.这里时间 t 和温度 T 都是变量,并且遵循图示规律相互联系地变化着.

上述诸例,虽然实际意义各不相同,但是它们的共同点是:含有两个变量,不妨叫做 x 和 y ,当某一变量(如 x)每取定一时,另一变量(如 y)总有确定的值和它相对应.我们把变量 y 叫做变量 x 的函数(如前述诸例中,路程是时间的函数;电流是电压的函

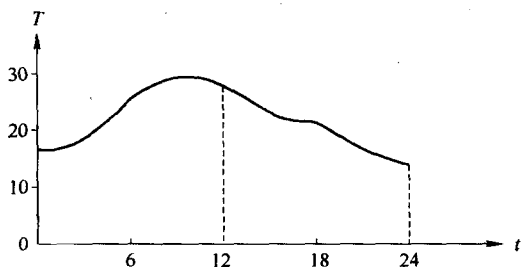


图 1-1

数;温度是时间的函数).这就是函数定义的粗略说法.

然而当我们更加深入地考虑上述诸例之后,发现在函数的概念中有两个要素.

首先,第一个变量所能取的值,是有范围限制的.如例1中的 t 只能取在开始下落的时刻到着地的时刻之间;例2中的 U 只取了5,10,15,20,25,30六个值;例3中的 t 只取0~24小时之间的值.因此,第一个变量的变化范围应该是函数概念中的一个要素.

其次,两个变量之间都存在着一个对应规律.如例1中的对应规律是“ t 平方后乘 $g/2$ 得 s ”;例2中的对应规律如表1-1所示;例3中的对应规律如图1-1所示.因此,两个变量之间的对应规律应该是函数概念的另一个要素.

显然,这两个要素应该反映在函数的定义中.于是,抛开上述诸例的实际意义,就可以抽象得到函数的确切定义了.

二、函数的定义

定义1 若变量 x 在某范围内每取定一值^①后,根据某一对应规律,变量 y 总有确定的值与之对应,就称 y 是 x 的函数.

x 叫做自变量, y 叫做因变量. x 的变化范围叫做这个函数的定义域.

该定义言简而意深.下面通过一组问题来深入领会它的含义.

(1) $y=C$ (C 是常数)是否表示了 x 和 y 之间的函数关系?

有人可能会想:在上式 $y=C$ 中,根本就没有出现 x ,因此不表示 x 和 y 之间的函数关系.如果这样想,那就错了.因为是否表示 x 和 y 之间的函数关系,应该根据函数的定义来回答.而在函数的定义中,并没有要求自变量 x 变化时,函数 y 的值一定要变.重要的是,对自变量 x 可能取的每一个值,函数 y 总有确定的值与之对应.现在对于任一实数 x , y 总有确定的值 C 与之对应.因此,常数可以作为函数的特例.

(2) $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ 是否表示了 x 和 y 之间的函数关系?

有人可能会因为该式右端有正负号而犹豫.其实,在函数的定义中,并没有要求 y 到底有几个确定的对应值,所以回答应该是肯定的.

如果 x 在定义域内任取一个值后, y 都只有一个确定的值与之对应,则称此函数是单值的;否则称为多值的.

今后若无特殊声明,所讲的函数均指单值函数.希望读者记住.

(3) $y=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1, \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$ 是否表示了 x 和 y 之间的函数关系?

该问题的回答仍然应该是肯定的.这是因为在函数的定义中,并没有要求必须用什么方式来表示函数.

此类函数,今后常会遇到,它叫做分段函数,即在不同的范围内,用不同的式子来表示一个(注意:并不是两个)函数.如上述函数是确定在区间 $[0, +\infty)$ 上的一个函数,当自变量 x 取闭区间 $[0, 1]$ 上的数值时,对应的函数 y 的值由式子 $y=2\sqrt{x}$ 确定;当 x 取区间 $(1, +\infty)$ 内的数值时, y 由式子 $y=1+x$ 确定.它的图形如图1-2所示.

^① 本书仅在实数范围内研究问题,因此,凡书中提到的“数值”,均指实数值.

(4) $x^2 + y^2 = -1$ 是否表示了 x 和 y 之间的函数关系?

有人可能会被该式的表面现象所迷惑,而错误地得出了肯定的回答.其实,因为不论 x 取何值,该式左端总不会是负的,也就是说根本没有定义域.根据函数的定义得知少了一个要素,因此不能说 y 是 x 的函数.

(5) $y_1 = x+1$ 和 $y_2 = \frac{x_2-1}{x-1}$ 是否表示同一个函数?

有人可能会想:由于第二个式子右端的分子和分母约去 $x-1$ 后,和第一个式子的右端就相同了,因此表示同一个函数.然而这种想法是不对的.正确的回答应该是:由于 y_1 的定义域是整个实数轴,而 y_2 的定义域是整个实数轴除去 $x=1$ 这一点,因为它们的定义域不同,所以不表示同一个函数.

(6) $y_1 = x$ 和 $y_2 = \sqrt{x^2}$ 是否表示同一个函数?

首先看到,这两个函数的定义域是相同的(整个实数轴).那么它们是否表示了同一个函数呢?在函数的定义中,除定义域这个要素外,还有一个要素,那就是两个变量间的对应规律.而这两个函数的对应规律是不同的,前者由 x 直接得到 y_1 ;后者由 x 平方后再开方才得 y_2 .故 y_1 的值取在 $(-\infty, +\infty)$ 中,而 y_2 的值取在 $[0, +\infty)$ 中(这是因为 $y_2 = \sqrt{x^2} = |x|$),所以正确的回答应该是:不表示同一个函数.

通过上述问题的讨论,读者可能已经体会到为什么说函数的定义是“言简而意深”的.也就是说,函数的概念虽然简单,但要想理解透彻,尚需下一点功夫.

思 考 题

1. 什么叫做函数? 函数定义中的两个要素是什么?
2. 什么叫做函数的定义域? 没有定义域的函数存在吗? 它也能叫做函数吗?
3. 为什么常数也可以看做是函数?

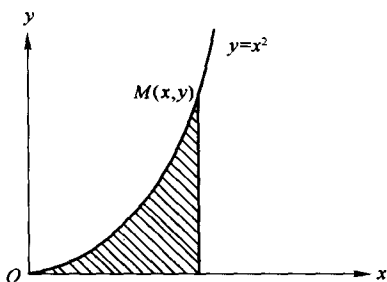


图 1-3

4. $y_1 = \lg x^2$ 和 $y_2 = 2\lg x$ 是否表示同一个函数,为什么?

5. $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ 2x, & x > 0, \end{cases}$ 是表示一个函数还是两个函数,为什么? 试画出其图形.

6. $M(x, y)$ 是曲线 $y = x^2$ 上的动点,如图 1-3 所示.问:

- (1) 弧 $\widehat{OM}$ 的长度是不是 x 的函数?
- (2) 图中阴影部分的面积是不是 x 的函数?

第二节 函数的定义域

从上节的问题(5)和(6)可以看到:函数定义中的两个要素十分重要,两要素之一不同就表示不同的函数.因此,下面就怎样求函数的定义域、怎样表示对应规律的函数记号等内

容,详细地进行研究.

本节研究怎样求函数定义域的问题.

如果自变量取某一数值 x_0 时,函数有确定的值和它对应,那么就称该函数在 x_0 处有定义.因此,函数的定义域,也就是使函数有定义的全体实数.

函数的定义域,需要根据函数的数学表达式和实际意义来求,并且以后者为主.下面看一个简单的例子.

函数 $y=Cx^2$ (C 是常数).

(1) 若是纯数学的、抽象的函数,则其定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2) 若上式中 $C=\pi$, x 和 y 分别表示圆的半径和面积,则其定义域为 $(0, +\infty)$;

(3) 若上式中 $C=\frac{1}{2}g$, x 和 y 分别表示真空中自由落体下落的时间和路程,则其定义域为 $[0, T]$, T 表示落地时间.

然而,数学中常常研究的是抽象的函数,这时定义域仅由公式本身决定.求定义域时只需考虑数值计算是否合理,比如:

(1) 分母不能为零;

(2) 偶次根号内的数不能小于零;

(3) $\log_a x$ (a 是不等于 1 的正常数)中的 x 必须大于零;

(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 中 x 的绝对值不能大于 1;

.....

例 1 求函数 $y=x+e^x-\sin x$ 的定义域.

解 由于不论 x 取任何值, y 都有确定的值与之对应,因此该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

注 若函数在整个实数轴上每一点都有定义,就叫做是处处有定义的.

例 2 求函数 $y=\frac{\sqrt{3-x}}{x}$ 的定义域.

解 由于分母不能为零,又由于偶次根号内的数不能小于零,所以当 $x \neq 0$ 并且 $3-x \geq 0$ (即 $x \leq 3$) 时该函数有定义.

因此,所求定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

注 函数的定义域一般用区间或不等式来表示.如上例所求的定义域也可表示为 $-\infty < x < 0$ 和 $0 < x \leq 3$.

例 3 求函数 $y=\arcsin \frac{3-2x}{5}$ 的定义域.

解 由于 $\arcsin X$ 中 X 的绝对值不能大于 1,而在本例中

$$X = \frac{3-2x}{5}.$$

解不等式:

$$\left| \frac{3-2x}{5} \right| \leq 1.$$

$$|3-2x| \leq 5, -5 \leq 3-2x \leq 5, -8 \leq -2x \leq 2,$$

即 $-1 \leq x \leq 4$ 时,该函数有定义.因此,所求定义域为 $[-1, 4]$.

例 4 求函数

$$y = \frac{\sqrt{3-x}}{x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$$

的定义域.

解 由于要 y 有确定的值, 必须也只需上式右端的两个式子同时有确定的值, 所以函数的定义域也就是使这两个式子有确定的值的自变量值的公共部分.

根据上两例的结果得知: 该函数的定义域应该是 $[-1, 4]$ 和 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, 3]$ 的公共部分, 如图 1-4 所示.

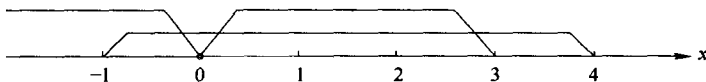


图 1-4

因此, 所求定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 3]$.

注 1 作图时, 凡不属于图形上的点, 都用空圈来表示 (如图 1-4 中的 $x=0$ 这一点).

注 2 用区间来表示定义域时, 需要特别注意区间的端点是否包含在此定义域内的问题. 也就是应该用闭区间, 还是用开区间, 还是用半开区间表示的问题.

例 5 求函数

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$$

的定义域.

解 由于分母不能为零, 所以当 $x \neq 2$ 时, $\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$ 有定义.

又由于 $\log_a X$ 中的 X 必须大于零, 而在本例中 $X=2x-3$ ($a=10$), 即当 $2x-3 > 0$ 时, 亦即 $x > \frac{3}{2}$ 时, $\lg(2x-3)$ 有定义.

因此, $x \neq 2$ 和 $x > \frac{3}{2}$ 的公共部分, 即 $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$ 就是所求的定义域, 如图 1-5 所示.

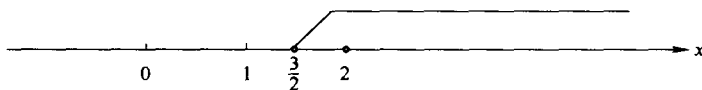


图 1-5

例 6 求函数 $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ 的定义域.

解 由于偶次根号内的数不能小于零, 所以当 $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ 时, 即 $(x-3)(x-4) \geq 0$ 时, 该函数有定义. 解出这个不等式, 就可以得到所求的定义域了.

该不等式左端两个因式的零点是 $x=3, 4$. 这两个点把整个实数轴分成了 3 个区间: $(-\infty, 3)$, $(3, 4)$, $(4, +\infty)$, 如图 1-6 所示.

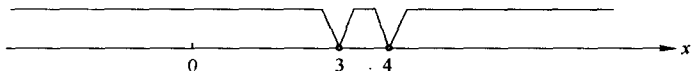


图 1-6

分别在这3个区间内考察两因式 $x-3$ 和 $x-4$ 的符号:

(1) 在 $(-\infty, 3)$ 内, 两因式都取负值, 所得乘积为正, 函数在这个区间内有定义;

(2) 在 $(3, 4)$ 内, 两因式取异号值, 所得乘积为负, 函数在这个区间内没有定义;

(3) 在 $(4, +\infty)$ 内, 两因式都取正值, 所得乘积为正, 函数在这个区间内有定义.

至于在点 $x=3$ 和 $x=4$ 处, 由于两因式必有一个为零, 因此函数在这两点有定义.

综上所述, 即得所求定义域为 $(-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$.

例7 求函数 $y = \sqrt{\cos x - 1}$ 的定义域.

解 由于偶次根号内的数不能小于零, 所以当 $\cos x - 1 \geq 0$ 时, 即 $\cos x \geq 1$ 时, 该函数有定义.

又由于 $\cos x$ 的值是不会大于1的, 所以只有当 $\cos x = 1$ 时, 该函数有定义. 即所求定义域为 $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, 如图 1-7 所示.

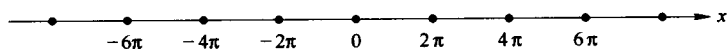


图 1-7

注 此例说明, 函数的定义域不一定是区间, 也可以是实数轴上的一些点.

例8 求函数 $y = |x+1| - 1$ 的定义域, 并作出其图形.

解 应当先去掉上式中的绝对值符号.

由于当 $x+1 \geq 0$ 时, 即 $x \geq -1$ 时, $|x+1| = x+1$, 所以

$$y = (x+1) - 1 = x.$$

又由于当 $x+1 < 0$ 时, 即 $x < -1$ 时, $|x+1| = -(x+1)$, 所以

$$y = -(x+1) - 1 = -x - 2.$$

因此该函数可以分段表示为

$$y = \begin{cases} x, & x \geq -1, \\ -x-2, & x < -1. \end{cases}$$

其图形如图 1-8 所示.

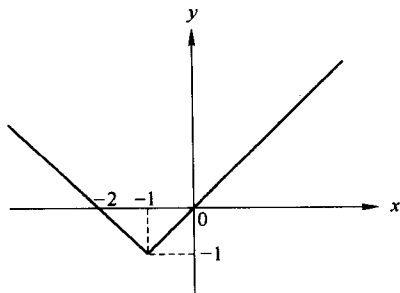


图 1-8

因为当 $x \geq -1$ 时, 函数是有定义的: $y = x$. 当 $x < -1$ 时, 函数也有定义: $y = -x - 2$. 所以该函数是处处有定义的, 即所求定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

注 用绝对值来表示的函数, 常常需要先把它写成分段函数的形式, 以便进行研究.

如: $y = |x|$ 可写成

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

又如:

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

可写成

$$y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

至此,读者可能会问:为什么要求函数的定义域呢?也就是学习本节的目的是什么?

后面在研究函数(比如某函数是否具有某特性;又如需作某函数的图形等等)时,常常先确定该函数在什么范围内存在(即有定义).如果该函数在某部分根本不存在,则对这部分就没有再往下研究的必要了.

思考题

1. 何谓函数在一点 $x=x_0$ 处是有定义的?又何谓函数是处处有定义的?
2. 怎样根据公式本身来求函数的定义域?
3. 下列函数在所给点处有定义吗?

(1) $y=\frac{1}{x+1}$ 在 $x=1$ 处;

(2) $y=\sqrt{-x}$ 在 $x=2$ 处;

(3) $y=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处;

(4) $y=\lg(1+x^2)$ 在 $x=0$ 处;

(5) $y=\begin{cases} x+1, & x>0, \\ x-1, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=1-\log_5 x$;

(2) $y=e^{1/x}$;

(3) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$;

(4) $y=\arccos\frac{x-3}{2}$;

(5) $y=\sqrt{1-|x|}$;

(6) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

(7) $y=\lg\frac{1}{1+x}+\sqrt[3]{x+2}$;

(8) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

(9) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;

(10) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}-\ln(4-x)$;

(11) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;

(12) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}}$;

(13) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$;

(14) $y=\tan(x+1)$.

2. 求下列函数的定义域,并作图.

(1) $y=\begin{cases} x, & 0\leq x<2, \\ 2, & x\geq 2; \end{cases}$

(2) $y=|x-2|$;

(3) $y=\begin{cases} x^2+1, & 0<x\leq 2, \\ 0, & x=0, \\ x^2-1, & -1\leq x<0; \end{cases}$

(4) $y=\begin{cases} |x-1|, & 0\leq x\leq 2, \\ 1, & x<0, x>2. \end{cases}$

第三节 函数记号

函数定义中的第二个要素对应规律,也就是 x 和 y 之间的函数关系.从第一节引出函数定义的 3 个例题可以看到:通常可以用 3 种方法来具体地表示,它们各有优缺点.

1. 公式法

如:例 1 的 $s = \frac{1}{2}gt^2$.

其优点是准确,便于理论分析和运算;其缺点是不够直观.

2. 表格法

如:例 2 的电压和电流的关系表.

其优点是方便,可以直接查阅;其缺点是表中所列的数据常常不完全,也不便于进行理论分析.

3. 图示法

如:例 3 的气温变化图.

其优点是直观,一目了然;其缺点是不便于作理论分析.

以后所讨论的函数,一般用公式表示,再辅之以图形.需要特别注意的是:

(1) 函数和表示法切勿混为一谈,同一个函数常常可以用各种不同的方法来表示.比如正弦函数,既可以用公式 $y = \sin x$ 表示,也可以用三角函数表表示,又可以用图表示.

(2) 切勿认为函数就是公式,公式仅仅是表示函数的一种方法.很多实际问题中遇到的函数,常常不能用公式来表示.比如,气温变化图就无法用公式表示.

有的时候,只需要表示 y 是 x 的函数,而并不需要知道其具体的对应规律是什么,那么可以用记号 $y = f(x)$ (读作“ y 是 x 的函数”)来表示.比如, $s = \frac{1}{2}gt^2$ 就可以记为 $s = f(t)$.

函数记号 $y = f(x)$ 中的字母 f 表示了 x 和 y 之间的对应规律.比如,上述 $s = f(t)$ 中的 f 就表示了如下具体的对应规律: t 平方后乘以 $\frac{1}{2}g$ 得 s .

y 是 x 的函数,也常常记为 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ 或 $y = y(x)$ 等等.需要注意的是:在同一个问题中,如果有几个函数,为了避免混淆,应该分别用不同的记号来表示.

自变量 x 在其定义域内取一个值 $x = x_0$ 时,函数 $y = f(x)$ 对应的值叫做该函数在 $x = x_0$ 处的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

欲求 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$,只需将 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x .比如,对于函数 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 来说,当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 5 = 5$; 当 $x = 2$ 时, $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 5 = 3$; 当 $x = x_0$ 时, $f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 + 5$ 等等.

下面做几个求函数值和熟悉函数记号的例题.

例 1 设 $f(x) = x \cdot 4^{x-2}$, 试求 $f(3)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $\frac{1}{f(a)}$, $f(x^2)$ 和 $[f(x)]^2$ (a 是大于 1 的正整数).

解

$$f(3) = 3 \times 4^{3-2} = 12;$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot 4^{\frac{1}{a}-2} = \frac{\sqrt[a]{4}}{16a};$$

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{a \cdot 4^{a-2}} = \frac{16}{4^a a};$$

$$f(x^2) = x^2 \cdot 4^{x^2-2} = \frac{x^2 \cdot 4^{x^2}}{16};$$

$$[f(x)]^2 = (x \cdot 4^{x-2})^2 = x^2 \cdot 4^{2(x-2)}.$$

例 2 设 $\varphi(x) = x^2 + 9$, $\psi(x) = 4 + \sqrt{x}$, 试求: $\varphi[\psi(9)]$ 和 $\psi[\varphi(-4)]$.

解 因为 $\psi(9) = 4 + \sqrt{9} = 7$, 所以

$$\varphi[\psi(9)] = \varphi(7) = 7^2 + 9 = 58;$$

又因为 $\varphi(-4) = (-4)^2 + 9 = 25$, 所以

$$\psi[\varphi(-4)] = \psi(25) = 4 + \sqrt{25} = 9.$$

例 3 设 $f(x) = \lg x$. 试证:

$$(1) f(x^n) = n f(x);$$

$$(2) f(xy) = f(x) + f(y).$$

证 根据对数的性质即可证明:

$$(1) f(x^n) = \lg x^n = n \lg x = n f(x);$$

$$(2) f(xy) = \lg(xy) = \lg x + \lg y = f(x) + f(y).$$

例 4 (1) 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

(2) 已知 $f(x+1) = x^2 - 1$, 求 $f(\sin x)$.

解 (1) 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$, 所以

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

注 由于题目中给出了 $x > 0$, 因此 x 才可以写到分母上去, 并且 $\sqrt{x^2} = |x| = x$. 类似这种细节问题, 希望读者在看书时注意体会.

(2) 只需先求出 $f(x)$.

因为 $f(x+1) = x^2 - 1 = (x+1)^2 - 2(x+1)$, 所以

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

因此

$$f(\sin x) = \sin^2 x - 2 \sin x.$$

例 5 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

试求: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$; 并作出其图形.

解

$$f(-2) = -(-2) = 2,$$

$$f(0) = 0^2 = 0,$$

$$f(1) = 1^2 = 1,$$

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

由于该函数的定义域为 $(-\infty, 2]$, 所以在 $x = 4$ 这一点函数没有定义, 即 $f(4)$ 不存在. 该函数的图形如图 1-9 所示.

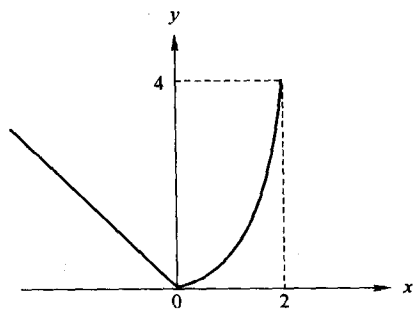


图 1-9

对于分段函数,求某点的函数值时,需要特别注意用哪个式子求的问题.比如上例中,求 $f(-2)$ 要用式子 $f(x)=-x$,而求 $f(0)$, $f(1)$ 和 $f(2)$,则要用式子 $f(x)=x^2$.

思考题

1. 表示函数对应规律的方法一般有哪几种? 它们各有什么优缺点?
2. 函数就是公式,这句话对吗,为什么?
3. 如果 $f(x)=x^2-x+7$,试问 $f(2)$ 等于什么? $f(2)$ 和 $f(x)$ 有何区别和联系?
4. 如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义,问函数 $y=\frac{1}{f(x)}$ 在 $x=x_0$ 处是否一定有定义,为什么?

习题 1-3

1. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数值: $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(x_0)$, $f(x_0+h)$.
2. 设 $f(x)=\arcsin x$,求下列函数值: $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(1)$.
3. 设 $F(x)=e^x$,证明:
 - (1) $F(x) \cdot F(y)=F(x+y)$;
 - (2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.
4. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明: $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.
5. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,并已知 $f(-2)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=5$,试求出 a, b, c ,以确定该函数.
6. 求 $f(x)$,设
 - (1) $f(x+1)=x^2-3x+2$;
 - (2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.
7. 设 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 3. \end{cases}$ 试求: $f(2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(3)$.
8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$ 试求: $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$;并作出函数的图形.

第四节 函数的几种特性

某些(注意:并非所有)函数具有以下一些特殊的性质.