普通高等教育“十五”国家级规划教材专用辅导

高等数学

同步辅导

第五版　下册

主　编：同济大学应用数学系　彭　舟

- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解
- 考研真题精选

航空工业出版社

笃志图书

普通高等教育“十五”国家级规划教材专用辅导

高等数学

同步辅导

同济五版　下册

主　编：同济大学应用数学系　彭　舟

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版相配套的学习辅导用书，全书根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试要求编写的。可供理、工、农、医（非数学专业）大学生学习高等数学时作为参考用书，也可供考研数学复习第一阶段使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步辅导/彭舟主编，-北京：航空工业出版社，2004.8（2005.6重印）

ISBN 7-80183-419-4

Ⅰ.高… Ⅱ.彭… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第130245号

高等数学同步辅导（上、下册）

Gaodengshuxue Tongbufudao

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里14号 100029）

发行电话：010-82742036 010-84926529

北京市燕山印刷厂 全国各地新华书店经售

2004年8月第1版 2005年6月第3次印刷

开本：787×960 1/16 印张：33.5 字数：650千字

印数：7001-10000 上、下册定价：32.00元

本社图书如有残缺情况，请联系010-82742036或13501285859

前　言

本书是同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)的指定配套参考用书,适合初次学习《高等数学》课程的大学生及准备报考硕士研究生的人员复习《高等数学》时使用。

由于近年来教学改革的实施,高等数学课时有所减少,对概念的深入探讨、知识点的融会贯通、课本知识的灵活运用无法在课堂上完成,同学们急切需要一本合适的高等数学辅导书。为了满足同学们的需求,北京大学数学科学学院、同济大学应用数学系根据多年的高等数学教学经验,听取广大学生的意见,联合编写了这本《高等数学同步辅导》(上、下册)。

全书分上下两册,内容体系编排完全按照同济五版教材。本书主要有以下特点:

1. 在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求,使学生在学习中做到有的放矢。

2. 知识内容表格网络化,更有利于同学提纲挈领,深刻地理解各部分内容之间的关系,从整体的角度掌握课本内容。

3. 例题既包括与基本概念有关的各种题型,又有综合多个知识点具有一定难度的综合例题,从基础到提高,适合各种水平学生的需要。

4. 给出了每节课后习题的全解,供学生作为解题参考。

5. 精选了有代表性的近年考研真题及解答放在每章的最后,让学生在第一遍学习时就对研究生入学考试的难度要求有初步认识。

《高等数学同步辅导(同济五版)》(上、下册)有科学完整的体系,如果合理地使用本书,必将事半功倍。本书的出版,如果能对广大学生在高等数学的学习和复习中有所帮助,那就是对我们工作的最大肯定。

由于时间仓促和水平所限,书中的不足之处恳请广大读者和专家给予批评指正。

编　者

二〇〇四年八月

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

本章大纲要求

1. 知道多元函数、多元函数的极限和多元函数连续的概念

2. 理解二元函数的概念及几何意义，掌握二元函数极限与连续的概念及二元函数极限与路径的无关性

3. 掌握有界闭区域上二元连续函数的性质、全微分存在的充分条件与必要条件，了解二元函数连续、存在偏导与可微之间的关系

4. 熟练掌握偏导数的定义与求法，理解二元函数全微分的定义，二元函数在一点可微的充分条件和必要条件

5. 会求空间曲线的切线和法平面的方程，曲面的法线和切平面的方程

6. 理解方向导数的概念，方向导数存在与可微的关系，方向导数与偏导数的关系，方向导数与梯度之间的关系

7. 掌握二元函数极值的理论及其求法，会用拉格朗日乘子法解决多元函数条件极值及相关应用问题

本章知识结构图

- 多元函数微分学
  - 多元函数的基本概念
    - 多元函数的概念
    - 多元函数的极限
    - 多元函数的连续性
  - 偏导数、全微分与方向导数
    - 偏导数
      - 偏导数的定义及几何意义
      - 计算方法
        - 基本方法
        - 复合函数求导法则
        - 隐函数的求导公式
    - 高阶偏导数
      - 定义
      - 二阶混合偏导数相等的充分条件
      - 高阶偏导数的计算
    - 全微分
      - 定义
      - 可微的充分与必要条件
      - 微分的叠加原理
      - 全微分形式不变性
      - 全微分在近似计算中的应用
    - 方向导数与梯度
  - 微分法的应用
    - 几何应用
    - 多元函数的极值及其求法
      - 无条件极值
      - 条件极值
      - 最值
    - 二元函数的泰勒公式与最小的二乘法

第一节　多元函数的基本概念

一、基本内容

表1－1　平面点集的基本概念

<table>
<tr><th colspan="2">名　称</th><th>定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td colspan="2">邻　域</td><td>平面上与定点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的点 $P(x, y)$ 的全体称为 P_0 的邻域，记作
$U(P_0,\delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta\}$ 或
$U(P_0,\delta)=\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$</td><td>几何上点 P_0 的 δ 邻域表示以 P_0 为中心，以 δ 为半径的圆的内部的点的全体．</td></tr>
<tr><td rowspan="4">点的分类</td><td>内点</td><td>E 是平面上一点集，若存在点 P 的某一邻域 $U(P,\delta)\subset E$，称 P 为 E 的内点．</td><td>对任一点 P，只要存在 $\varepsilon>0$，使 $U(P,\varepsilon)\subset E$ 即可，不论 ε 大小．</td></tr>
<tr><td>外点</td><td>若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\Phi$，则称 P 为 E 的外点</td><td>显然 $P\notin E$，外点不属于集合 E.</td></tr>
<tr><td>边界点</td><td>若点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，称 P 为 E 的边界点．</td><td>E 的边界点的全体称为 E 的边界．</td></tr>
<tr><td>聚点（极限点）</td><td>若对任意 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 的点，称 P 是 E 的聚点或极限点.</td><td>聚点可属于 E，如内点，也可不属于 E，如边界点中不属于 E 的点.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">平面点集分类</td><td>开集</td><td>若点集 E 的所有点都是内点，则 E 称为开集</td><td>由内点构成，不含边界点.</td></tr>
<tr><td>闭集</td><td>若点集 E 的余集 E^c 为开集，则称 E 为闭集</td><td>包含全部聚点，包括内点及非孤立边界点.</td></tr>
<tr><td>连通集</td><td>若点集 E 中任何两点均可用完全位于 E 中的折线连接起来，则称 E 为连通集.</td><td></td></tr>
<tr><td>区域</td><td>连通的开集称为区域或开区域</td><td>连通开集.</td></tr>
<tr><td>闭区域</td><td>（开）区域 D 加上它的边界所成的点集称为闭区域或闭域，记作 $\overline{D}$</td><td>闭区域是闭集的特殊情形.</td></tr>
<tr><td>导集</td><td>集 E 的全体聚点所成的集称为 E 的导集.</td><td>记为 E'.</td></tr>
</table>

表 1-2　二元函数的概念及性质

概　念	设 D 是平面上一个点集,若对每个点 $P(x, y) \in D$,变量 z 按照一定法则 F 都有确定的值与它对应,称 z 是变量 x, y 的二元函数,记为 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 或 $z = f(P), P \in D$ D 称为定义域,x, y 称为自变量,z 称为因变量,点集 $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形,它是空间中的曲面.
极　限	设函数 $f(x, y)$ 在开区域(或闭区域)D 内有定义,$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点为边界点,如果对于任意给定的函数 ε,总有在函数 δ,使对适合不等式 $0 < \mid PP_0 \mid = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ 的一切点 $P(x, y) \in D$,都有 $\mid f(x, y) - A \mid < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ 或 $f(x, y) \to A(\rho \to 0), \rho = \mid PP_0 \mid$.
连续性定　义	设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点,且 $P_0 \in D$,若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$,则称 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处连续.
有界闭区域上连续函数性质	1. 最值定理:有界闭区域 D 上的连续函数在 D 上必取得最大值和最小值.
	2. 介值定理:有界闭区域 D 上的连续函数在 D 上取得两个不同的函数值,则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.
	3. 一致连续性定理:有界闭区域 D 上的连续函数必在 D 上一致连续.

二、重点难点

1. 理解点的各种分类:内点、外点、边界点、聚点之间的区别与关系,如 E 的聚点可属于 E,如内点;也可不属于 E,如边界点中不属于 E 的点.

2. 我们说的多元函数一般指二元函数,二元函数的极限是本节的重点和难点,注意理解定义.

3. 注意多元函数极限与一元函数极限在概念等方面的许多不同。一元函数中,常用洛必达法则计算极限,而多元函数缺乏该法则的理论依据 —— 柯西中值定理,因此除非多元函数能化为一元函数,否则不能用洛必达法则. 在计算极限时,不能选择特殊路径来计算,而在证明极限不存在时,常选择两条不同路径而按这两条路径计算的极限值不同的方法.

4. 在学习中应注意联系上册中一元函数的性质,比较多元函数与一元函数各种性质的异同,这对从本质上掌握微积分有重要意义.

三、典型例题分析

例 1. 求下列函数的定义域，并判断它们是否为同一函数：

$$z_1 = \ln[(1-x^2)(1-y^2)]$$
$$z_2 = \ln[(1-x)(1+y)] + \ln[(1+x)(1-y)].$$

解　由 $(1-x^2)(1-y^2) > 0$，即 $\begin{cases}1-x^2>0\\1-y^2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x^2<0\\1-y^2<0\end{cases}$，求得 z_1 的定义域

$$D_1=\{(x, y)\mid |x|<1,\ |y|<1 \text{ 或 } |x|>1, |y|>1\}.$$

由 $\begin{cases}(1-x)(1+y)>0\\(1+x)(1-y)>0\end{cases}$ 求得 z_2 的定义域为

$$D_2=\{(x, y)\mid |x|<1,\ |y|<1 \text{ 或 } x<-1,\ y>1 \text{ 或 } x>1,\ y<-1\}$$

由于 D_2 仅是 D_1 的一部分，所以 z_1，z_2 不是同一函数.

例 2. 若 $f(x+y, \dfrac{y}{x}) = x^2 - y^2$，求 $f(x, y)$.

解　令 $\begin{cases}x+y=u\\ \dfrac{y}{x}=v\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=\dfrac{u}{1+v}\\ y=\dfrac{uv}{1+v}\end{cases}$，故

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

所以　$f(x, y) = \dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$　$(y \neq -1)$.

例 3. 讨论 $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 当 $(x, y) \to (0, 0)$ 时的极限是否存在.

解　当 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot k^2x^2}{x^2+k^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2} = 0$$

当 (x, y) 沿二次曲线 $x = ky^2 (k \neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x=ky^2\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

此时极限值与 k 有关且不为零. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ 不存在.

例 4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解　(1) 由于 $0 < \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leqslant \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{y^2} = 0$，

根据极限存在准则，得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

(2) 这是$\frac{0}{0}$型，故不能用极限运算定理. 若令 $u=xy$，则当 $x\to 0,\ y\to a$ 时，可考虑用$\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}y=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\lim_{y\to a}y=a.$$

(3) 因为 $0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\quad(x>0,\ y>0)$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$

故
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

(4) 因为$\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是初等函数，(1,0) 是其定义域的内点，故函数在(1,0) 点连续，从而

$$\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2.$$

例 5. 设 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$f(x)=\frac{x_1\sin x_1+x_2\sin x_2+\cdots+x_n\sin x_n}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，

求证 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

证明 令 $r^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，则

$$f(x)=\frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{\sin x_i}{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2}\frac{\sin x_i}{x_i}$$

因为$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2}=1$，故

$$f(x)-1=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^2}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}-1\right)$$

又$\left|\frac{x_i^2}{r^2}\right|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x_i\to 0}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}-1\right)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}[f(x)-1]=\sum_{i=1}^{n}\left[\lim_{x_i\to 0}\frac{x_i^2}{r^2}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}-1\right)\right]=0.$$

所以
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

例 6. 证明函数 $f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,\ 0)\end{cases}$ 在点(0,0) 分别对 x 及 y

是连续的，但对(x, y)却不连续.

证明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$，$\lim\limits_{y\to 0}f(0, y) = 0 = f(0, 0)$，

故$f(x, y)$在$(0,0)$分别对x, y是连续的，但是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x, y) = \lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{2k}{1+k^2}$$

与k有关，故$f(x, y)$在点$(0,0)$极限不存在，从而不连续.

例 7. 证明函数$f(x, y) = \sin xy$在R^2不一致连续.

证明 为证$f(P)$在区域D内不一致连续，只须对于某一$\varepsilon > 0$，对$\forall\delta > 0$，$\exists P_1, P_2 \in D$，且$\rho(P_1, P_2) < \delta$，但$|f(P_1) - f(P_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned} f(x, y+\Delta y) - f(x, y) &= \sin x(y+\Delta y) - \sin xy \\ &= \sin xy[\cos(x\Delta y) - 1] + \cos xy\sin(x\Delta y)\end{aligned}$$

给定$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，对$\forall\delta > 0$，取$\Delta y = \frac{\delta}{2}$，$x = \frac{\pi}{\delta}$，$y = \frac{\delta}{2}$，则$P_1\left(\frac{\pi}{\delta}, \frac{\delta}{2}\right)$、$P_2\left(\frac{\pi}{\delta}, \delta\right) \in R^2$，且$\rho(P_1, P_2) = \frac{\delta}{2} < \delta$，但

$$|f(P_1) - f(P_2)| = \left|\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1 > \varepsilon$$

故$f(x, y)$在R^2内不一致连续.

四、课本习题全解

习题 8－1 解答

1. **解** (1) 集合是开集，无界集；导集为$\mathbf{R}^2$，边界为$\{(x, y) \mid x = 0 或 y = 0\}$.

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为$\{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$，边界为$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为$\{(x, y) \mid y \geqslant x^2\}$，边界为$\{(x, y) \mid y = x^2\}$.

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为$\{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4\}$.

2. **解** $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty} = t^2(x^2 + y^2 - xy\tan\frac{x}{y})$

$= t^2 f(x, y)$.

3. **证**
$$\begin{aligned} F(xy, uv) &= \ln(xy)\cdot\ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v) \\ &= \ln x\cdot\ln u + \ln x\cdot\ln v + \ln y\cdot\ln u + \ln y\cdot\ln v \\ &= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).\end{aligned}$$

4. **解** $f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

5. **解** (1)$\{(x, y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$.　　(2)$\{(x, y) \mid x + y > 0, x - y > 0\}$.

(3)$\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}$.　　(4)$\{(x, y) \mid y - x > 0, x \geqslant 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

(5)$\{(x, y, z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$.

(6)$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

6. **解** (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1.$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2.$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}.$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot 2=2.$

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0.$

7. **证** (1) 当(x, y)沿直线 $y=kx$ 趋于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ y=kx}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}\quad(k\neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的,故所求极限不存在.

(2) 依次取$(x, y)\to(0, 0)$的两种方式:$y=x$, $y=-x$,分别求极限:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

两种方式求得的极限值不同,故所求极限不存在.

8. **解** 这函数的定义域为 $D=\{(x, y)\mid y^2-2x\neq 0\}$,曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点,且函数在这些点处没有定义,因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

9. **证** 因为$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,

要使$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$,

所以 $\forall\varepsilon>0$,取$\delta=2\varepsilon$,则当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时,就有$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$成立,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

10. **证** 设 $P_0(x_0, y_0)\in\mathbf{R}^2$,因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续,所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而,当 $P(x, y)\in U(P_0, \delta)$ 时,$|x-x_0|\leqslant\rho(P, P_0)<\delta$,因而有

$$|F(x, y)-F(x_0, y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x, y)$ 在(x_0, y_0)处连续.

第二节　偏导数

一、基本内容

表 2－1　偏导数的定义与性质

定 义	设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，将 y 固定为 y_0，给 x_0 以改变量 Δx，于是 $z(x,y)$ 有改变量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，若 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$ 存在，则此极限值为 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点对 x 的偏导数，记作 $f_x(x_0,y_0)$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，对 y 的偏导定义类似.
性 质	(1) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示空间曲线 $l_1:\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$ 在点 $M_0[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ 处的切线 T_x 对 x 的斜率. (2) 若 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则必相等，即 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

表 2－2　高阶偏导数

定 义	函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导数为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$，那么在 D 内若 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 的偏导数也存在，称它们为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，二阶和二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.
性 质	如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数相等.

二、重点难点

1. 偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 实际上是 $z=f(x,y)$ 在 $y=y_0$ 时相应的一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数，即 $f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,y_0)]\right|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$.

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，则一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续；而若 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 未必可偏导. 对多元函数，可偏导未必连续，不连续未必不可偏导.

3. 求高阶偏导数时，应紧扣定义，以低到高逐阶计算并分步写出所要用的各阶偏导数.

三、典型例题分析

例 1. 讨论下列函数 $f(x, y)$ 在(0,0)处是否连续,偏导数是否存在.

(1) $f(x, y) = |x| + |y|$　　(2) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

(3) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y+2x}{y-2x}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

解 (1) 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x| + |y|) = 0$,且 $f(0, 0) = 0$,所以 $f(x, y)$ 在(0,0)处连续,又 $\varphi(x) = f(x, 0) = |x|$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导,因此 $f(x, y)$ 在(0,0)处对 x 的偏导数不存在.

同理 $f(x, y)$ 在(0,0)处对 y 的偏导数也不存在.

(2) 显然 $f(x, y)$ 在(0,0)处连续,又 $\varphi(x) = f(x, 0) = 0$ 在 $x = 0$ 处连续且导数为零,所以 $f_x(0, 0) = 0$.同理 $f_y(0, 0) = 0$.

(3) 与一元函数类似,对多元分段函数在分段点处的偏导数也应用定义讨论.

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx+2x}{kx-2x} = \dfrac{k+2}{k-2}(k \neq 2)$,其值与 k 有关,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ 不存在,从而 $f(x, y)$ 在(0,0)处不连续.而

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2\Delta x}{-2\Delta x} - 1}{\Delta x} = \infty,\text{故 } f_x(0, 0) \text{ 不存在.}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta y} - 1}{\Delta y} = 0.$$

例 2. 设 $z = f(x, y)$ 时 x 的偏导数存在,证明 $f_x(x, b) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x, b)]$.

证明 根据导函数与偏导函数的定义,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x, b)] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x}$$

$$f_x(x, b) = \left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right]\Bigg|_{y=b}$$

由于 y 与 Δx 无关,故上面两极限相等,于是 $f_x(x, b) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x, b)]$.

例 3. 设 $f(x, y) = x^2 + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求 $f'_x(x, 1)$, $f'_x(1, 1)$.

解 $f_x(x, y) = 2x + \dfrac{y-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}} \times \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} \times \dfrac{1}{y} = 2x + \dfrac{y-1}{2\sqrt{x(y-x)}}$,于是

$$f_x(x, 1) = f_x(x, y)\big|_{y=1} = 2x,\ f_x(1, 1) = f_x(x, y)\big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = 2.$$

例 4. 求下列函数的二阶偏导数：

(1)$u=\ln(x+y^2)$　　(2)$u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$　　(3)$u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{y^z}x^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^z z}{y^{z+1}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z-1)}{y^2}x^{z-2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^{z+2}}x^z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{z^2x^{z-1}}{y^{z+1}},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\frac{x^z}{y^{z+1}}\left(z\ln\frac{x}{y}+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{x^{z-1}}{y^z}\left(z\ln\frac{x}{y}+1\right).$$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{|y|}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2}(y\neq 0)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}(y\neq 0).$$

例 5. 证明下列每个函数都是调和函数，即满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(1)$u=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$　$(r=\sqrt{x^2+y^2})$；　　(2)$u=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

证明　(1) $u=\dfrac{1}{2\pi}\ln(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{2\pi(x^2+y^2)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{2\pi(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{y^2-x^2}{2\pi(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x^2-y^2}{2\pi(x^2+y^2)^2}$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(2) 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=(2x\sin 2xy+2y\cos 2xy)e^{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(-2y\sin 2xy+2x\cos 2xy)e^{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=[(2+4x^2-4y^2)\sin 2xy+8xy\cos 2xy]e^{x^2-y^2}$$