JICHUTUOPUXUE

基础拓扑学

何伯和　廖公夫　赫泉玲

吉林大学
出版社

基础拓扑学

何伯和　廖公夫　赫泉玲

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

基础拓扑学 / 何伯和，廖公夫主编. —长春：吉林大学出版社，2003.12

ISBN 7－5601－2978－1

Ⅰ. 基… Ⅱ. ①何… ②廖… Ⅲ. 拓扑—基本知识
Ⅳ. 0189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 113430 号

基础拓扑学

何伯和　廖公夫　赫泉玲　主编

责任编辑、责任校对：赵洪波	封面设计：孙　群
吉林大学出版社出版	吉林大学出版社发行
(长春市明德路 421 号)	吉林农业大学印刷厂印刷
开本：850×1168 毫米　1/32	2005 年 9 月第 1 版
印张：8.25	2005 年 9 月第 1 次印刷
字数：187 千字	印数：1－400 册
ISBN7－5601－2978－1	定价：12.00 元

前　言

拓扑学的研究可以说是从 1736 年瑞士数学家 Euler 研究哥尼斯堡七桥问题开始的. 以后, 1752 年, Euler 关于凸多面体的定理, 则是拓扑学中头一个重要的结果. 继 Euler 以后, 在 1833 年前后, 德国数学家 Gauss 研究了 3 维空间中各种各样的纽结问题, 并讨论了函数沿纽结的积分. 到 1851 年, 德国数学家 Reimann 进行了所谓 Reimann 曲面的研究, 这方面的工作, 虽然属于所谓复变函数论的范围, 但是从另一角度, 也可以看作是对于曲面性质的拓扑研究. 到十九世纪末, 德国数学家 Cantor 创立了集合论. 这是数学基础方面一次重大的改革, 从此数学中的分析、代数与几何, 甚至包括数理逻辑, 都可看作是以集合论为基础的. 时至今日, 集合与映射, 已经成为一切现代数学中最基本的概念.

在分析学发展中积累起来的大量素材的基础上, 由于集合论与公理化方法的发展, 产生了抽象空间的概念, 这种研究拓扑空间的方法, 可以说是由法国数学家 Fréchet 等人 1906 年所倡导与开始的, 延续至今, 这就逐渐形成了今天的点集拓扑学.

与此同时, 法国数学家 Poincaré 从研究分析学中问题的几何解释入手, 感到有研究多维流形的几何性质首先是拓扑性质的必要, 从而开始了拓扑空间的组合, 也就是代数方法的研究, 他把流形——局部看起来象欧氏空间的那种整体图形, 分

解成单纯形，单纯形的集合便是一种具有组合结构的复合形，从而引入了同调的概念，这就逐渐形成了现在的代数拓扑学.

本教材是应吉林大学数学系的教学需要而编写的，在编写过程中，参照了1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审订的两个拓扑学教学大纲，并且基本上编入了两个大纲所列的主要内容，这是因为作为拓扑学的一个基础教材，从吉林大学的实际情况来看，点集拓扑与代数拓扑两方面的基本内容都是需要的. 当然，我们假定读者在阅读本书的时候，已经熟悉了群与同态、集合及其运算等方面的基础知识. 但是对于代数方面的进一步内容，如具有有限生成元的交换群的分解定理，我们作为附录，列在本书的最后，以供参考.

从吉林大学数学系的试用情况来看，本教材大约可在64学时内讲完，初学者如果感到困难的话，可能是由于拓扑学中以同胚作为一切考虑的核心，因而在处理问题的方法上，对不拘一格、多种多样这样一种风格不习惯. 熟悉这种风格需要一个过程，因此作为第一次，在学的过程中删去任何一些比较难的部分，都是可以的.

本教材是由何伯和、廖公夫两位同志负责编写的，我的研究生赫泉玲同志也参加了部分编撰工作. 由于时间仓促，水平有限，不当与笔误之处在所难免，敬希海内同仁不吝赐教.

何伯和

2003年2月于长春

目　录

第一章　拓扑空间的基本概念

在上世纪初，由于集合论与公理化方法的发展，在分析学积累起来的大量素材的基础上，产生了抽象空间的概念，从而建立了点集拓扑学. 点集拓扑学的基本思想来源于分析，所以，一方面它具有高度的抽象与概括，能够广泛应用于现代数学的许多分支，成为现代数学的基本工具之一，而另一方面，它的基本概念与方法，又都有其具体背景，因此把握这两者之间的关系，是十分重要的. 在本章我们讨论拓扑空间、连续映射等点集拓扑的基本概念，对有关问题的进一步展开，将留待下一章讨论.

§1　拓扑空间

在一个抽象集合上定义拓扑的方法是多种多样的，自从1914年Hausdorff用邻域系确定拓扑以来，现在人们已经知道，用开集族、闭集族、闭包运算、收敛类等方法均可定义拓扑. 下面我们从目前比较通用的由开集族建立拓扑的方法，来定义拓扑空间，这种方法始于Alexandroff与Hopf.

1.1　定义　设 X 为非空集合，$\mathscr{T}\subset 2^X$ 为 X 的一个子集族，若 $\mathscr{T}$ 满足：

1）X，$\varnothing\in\mathscr{T}$；

2）当 $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$ 时，$\bigcup\limits_{U\in\mathscr{T}'}U\in\mathscr{T}$；

3）当 $U_1, \cdots, U_n \in \mathscr{T}$ 时，$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{T}$，其中 n 为任意有限数，

则称 $\mathscr{T}$ 为 X 上的一个**拓扑结构或拓扑**. 集合 X 与它的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 组成的偶 $(X, \mathscr{T})$ 称为**拓扑空间或空间**，X 中的元素称为**点**，$\mathscr{T}$ 中的元素称为 $(X, \mathscr{T})$ 的**开集**，在不致引起混淆的情况下，也记 $(X, \mathscr{T})$ 为 X.

由定义可见，所谓给空间（即集合）X 以一个拓扑，就是规定其中某些子集为开集，使之满足条件 1）~3），因此可以想象，在一个集合 X 上，可以给出的拓扑结构，一般来说不是唯一的，而拓扑空间无非是比集合更为精细的一种结构.

例 1 设 $X \neq \varnothing$，令 $\mathscr{T}_I = \{X, \varnothing\}$，则 $\mathscr{T}_I$ 为 X 上的拓扑，称为 X 的**密集拓扑**. 又令 $\mathscr{T}_d = 2^X$，则 $\mathscr{T}_d$ 也是 X 的一个拓扑，称为 X 上的**离散拓扑**.

易见，对于 X 上的任意一个拓扑 $\mathscr{T}$，作为 2^X 中的子集，总有

$$\mathscr{T}_I \subset \mathscr{T} \subset \mathscr{T}_d,$$

因此从这个意义上说，$\mathscr{T}_I$ 是最粗或者说最弱的拓扑，而 $\mathscr{T}_d$ 是最细，最强的拓扑.

例 2 设 $X = \{a, b\}$，令

$$\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a, b\}\},$$
$$\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\},$$
$$\mathscr{T}_3 = \{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}\},$$
$$\mathscr{T}_4 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$$

则 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$，$\mathscr{T}_3$，$\mathscr{T}_4$ 均为 X 上的拓扑，其中 $\mathscr{T}_1$ 为密集拓扑，$\mathscr{T}_4$ 为离散拓扑，而 $\mathscr{T}_2$ 与 $\mathscr{T}_3$ 不能比较.

例 3 设 $X \neq \varnothing$，令

$$\mathscr{T}_{cf} = \{X - A;\ A \text{ 为 } X \text{ 的有限子集}\} \cup \{\varnothing\},$$

则容易验证，$\mathscr{T}_{cf}$是 X 上的一个拓扑，称为 X 上的**余有限拓扑**.

例 4　设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathscr{T}_{cc}=\{\varnothing, \mathbf{R}-c; c$ 为 $\mathbf{R}$ 中的可数集$\}$，则 $\mathscr{T}_{cc}$是 $\mathbf{R}$ 的一个拓扑，称为 $\mathbf{R}$ 上的**余可数拓扑**.

例 5　设 $\mathbf{R}$ 为实数集，对于 $x, y\in\mathbf{R}$，令

$$d(x, y)=|y-x|$$

称为两个点 x, y 之间的**距离**. 其次对于 $x\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$，令

$$U_\varepsilon(x)=\{y; d(x, y)<\varepsilon, y\in\mathbf{R}\}$$

称为点 x 的 ε **邻域**. $U\subset\mathbf{R}$ 称为 $\mathbf{R}$ 的开集，当且仅当对于任意 $x\in U$，存在$U_\varepsilon(x)\subset U$. 于是容易验证，如此规定的 $\mathbf{R}$ 中的开集族，满足定义 1.1 中的 1) ~3)，因此它使 $\mathbf{R}$ 成为一个拓扑空间，这个拓扑空间称为**实直线**或 **1 维欧氏空间**，记作 E^1，其中的开集就是我们通常所熟悉的实直线上的开集. $\mathbf{R}$ 的这个拓扑，也称为 $\mathbf{R}$ 的通常拓扑.

例 6　对于 n 元实数之集 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两点

$$x=(x_1, \cdots, x_n), \quad y=(y_1, \cdots, y_n),$$

令

$$d(x, y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

对于 $x\in\mathbf{R}^n$, $\varepsilon>0$，令

$$U_\varepsilon(x)=\{y; d(x, y)<\varepsilon, y\in\mathbf{R}^n\},$$

然后定义 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，当且仅当对于任意 $x\in U$，存在$U_\varepsilon(x)\subset U$. 容易验证，如此定义的 $\mathbf{R}^n$ 中的开集族满足定义 1.1 的 1) ~3)，因此构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个拓扑，称为 $\mathbf{R}^n$ 的通常拓扑，而这个拓扑空间称为 n **维欧氏空间**，记作 E^n，这也是我们通常所熟悉的.

在拓扑空间的定义中，有了开集的概念，便可派生出闭集的概念.

1.2 定义 设 X 为拓扑空间，$A \subset X$，A 称为 X 的**闭集**，当且仅当 $X-A$ 为 X 的开集.

于是由定义 1.1 的 1）~3），对应地可得下列关于闭集的基本性质的命题.

1.3 命题 拓扑空间$(X, \mathscr{T})$中的闭集满足下列性质：

1）X 与 $\varnothing$ 是闭集；

2）若 $\mathscr{A}$ 是 X 中任意一族闭集，则 $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$ 是闭集；

3）若 $A_1, \cdots, A_n$ 是闭集，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 是闭集，其中 n 为任意有限数.

证明 1）由 1.1，X，$\varnothing \in \mathscr{T}$，$\Rightarrow X-X=\varnothing$，$X-\varnothing=X$ 为闭集.

2）设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$，因 A_λ 是闭集，$\Rightarrow X-A_\lambda$ 为开集，$\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(X-A_\lambda)=X-\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 为开集，$\Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 为闭集.

3）因 A_i 为闭集，$\Rightarrow X-A_i$ 为开集，$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n}(X-A_i)=X-\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为开集，$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为闭集.

其次我们讨论由 X 的拓扑诱导的 X 的子集的拓扑.

1.4 定义 设$(X, \mathscr{T})$为拓扑空间，Y 为 X 的非空子集，令

$$\mathscr{T}|_Y=\{Y \cap U; U \in \mathscr{T}\},$$

则容易验证 $\mathscr{T}|_Y$ 是集合 Y 上的一个拓扑，称之为由 $\mathscr{T}$ 诱导的**相对拓扑**，$(Y, \mathscr{T}|_Y)$称为$(X, \mathscr{T})$的**拓扑子空间**，简称为**子空间**.

由定义 1.4，对于拓扑空间 X 中的任意非空子集 Y，在相对拓扑意义下，均自动成为拓扑空间. 例如根据例 6，已知 E^n 为在通常拓扑意义下的拓扑空间，因此 E^n 中的任意非空子集，

都是在相对拓扑意义下的拓扑空间.

例 7　当 $0<m<n$, 容易看出 $\mathbf{R}^m$ 关于 E^n 的相对拓扑，即为 E^m.

例 8　由于 E^1 为拓扑空间，所以 E^1 中的任一闭区间 $[a, b]$为拓扑子空间，这时对于任意 $a<c<b$, $[a, c)$便是 $[a, b]$中的开集，但它不是 E^1 中的开集. 又如 $X=[a, b)$为 E^1 的拓扑子空间，由于在任何拓扑空间$(X, \mathscr{T})$中，全空间 X 是其中的既开又闭集，因此$[a, b)$是$(X, \mathscr{T})$中的既开又闭集，但在 E^1 中，它既不是开集，也不是闭集.

因此以后我们在谈到开集或闭集时，必须说明它在什么空间中是开集或闭集，这是十分重要的.

1.5　命题　设 Y 是 X 的子空间，$B\subset Y$, 则 B 是 Y 的闭集，当且仅当存在 X 的闭集 A, 使得 $A\cap Y=B$.

证明　A 为 X 的闭集，$\Rightarrow X-A$ 为 X 的开集，$\Rightarrow (X-A)\cap Y =X\cap Y-A\cap Y=Y-A\cap Y$ 为开集，$\Rightarrow A\cap Y=B$ 为 Y 的闭集. 反之，$B\subset Y$ 为闭集，$\Rightarrow Y-B=C\cap Y$, 其中 C 为 X 的开集，$\Rightarrow B= Y-C\cap Y=X\cap Y-C\cap Y=(X-C)\cap Y=A\cap Y$, 其中 $A=X-C$ 是 X 的闭集.

例 9　设 X 为拓扑空间，$Y\subset X$ 为开集，则 $U\subset Y$ 为 Y 中的开集，当且仅当 U 是 X 的开集. 同样地，若 $Y\subset X$ 为闭集，则 $A\subset Y$ 为 Y 中的闭集，当且仅当 A 是 X 的闭集，这由定义 1.4 与命题 1.5 即可获知.

1.6　定义　1) 设$(X, \mathscr{T})$为拓扑空间，A, V 为 X 的子集，V 称为 A 的**邻域**，当且仅当存在 $U\in\mathscr{T}$, 使得 $A\subset U\subset V$, 并且常常记 $V=V(A)$;

2) 包含 A 的开集 U 称为 A 的**开邻域**. 特别地，若 $A=\{x\}$, V 称为 x 的邻域，U 称为 x 的开邻域. 点 x 的全体邻域记作

$\mathscr{N}(x)$，称为 x 的**邻域系**.

由定义，包含 x 的开集均为 x 的开邻域，当然更是邻域，但是 x 的邻域未必是开集.

1.7 命题 拓扑空间 X 的子集 A 是开集，当且仅当对于任意 $x \in A$，有 $A \in \mathscr{N}(x)$

证明 由邻域的定义，必要性显然. 反之，对于 $x \in A$，因 $A \in \mathscr{N}(x) \Rightarrow$ 有 x 的开邻域 $U_x \subset A$，所以 $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} U_x \subset A$，$\Rightarrow A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$ 为开集.

1.8 定义 1）设 X 为拓扑空间，$A \subset X$，$x \in X$，如果对于 x 的任意开邻域 U，有 $U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$，则称 x 为 A 的**聚点**；

2）A 的全体聚点之集称为 A 的**导集**，记作 A'；

3）A 与 A 的导集之并称为 A 的**闭包**，记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A} = A \cup A'$

关于闭包，有下列基本性质.

1.9 命题 1）$\overline{A}$ 是 X 中的一切含 A 的闭集之交；

2）对于 $x \in X$，$x \in \overline{A}$ 当且仅当对于 x 的任何开邻域 U，有 $U \cap A \neq \varnothing$.

证明 1）令

$$\mathscr{F} = \{F;\ A \subset F,\ F \text{ 为 } X \text{ 的闭集}\},$$
$$B = \bigcap_{F \in \mathscr{F}_A} F,$$

则对于 $x \in \overline{A}$，$F \in \mathscr{F}_A$. 当 $x \in A$ 时，$\Rightarrow x \in F$；当 $x \in A'$时，$\Rightarrow x \overline{\in} X - F$. 所以也有 $x \in F$. 从而 $\overline{A} \subset B$. 反之，对于 $x \in B$，若 $x \overline{\in} A$，任取 x 的开邻域 U，若 $U \cap (A - \{x\}) = U \cap A = \varnothing$，$\Rightarrow X - U$ 是含 A 的闭集，不含 x，$\Rightarrow x \overline{\in} B$，矛盾，因此必有 $U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$，故 $x \in A'$，从而 $B \subset A \cup A' = \overline{A}$，所以 $\overline{A} = B$.

2）设 $x \in \overline{A}$，U 是 x 的开邻域，若 $x \in A$，显然有 $U \cap A \neq \varnothing$，若 $x \in A' - A$ 也有 $U \cap A = U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$，所以总有 $U \cap A$

$\neq \varnothing$.

反之，对于 $x \in X$，若对于 x 的任意开邻域 U，有 $U \cap A \neq \varnothing$，此时如果 $x \bar{\in} A$，则 $U \cap (A - \{x\}) = U \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in A'$，从而必有 $x \in \overline{A}$.

1.10　命题　1）对于任意 $A \subset X$，$\overline{A}$ 是 X 中的闭集；

2）对于 $F \subset X$，F 为闭集当且仅当 $\overline{F} = F$；

3）对于 $F \subset X$，F 为闭集当且仅当 $F' \subset F$.

证明　1）由命题 1.9，$\overline{A}$ 是 X 中的一切含 A 的闭集之交，故为闭集.

2）若 F 为闭集，因 $\overline{F}$ 是含 F 的最小闭集，所以 $\overline{F} = F$. 反之，若 $\overline{F} = F$，由 1）即知 F 为闭集.

3）$\overline{F} = F \cup F'$，若 F 为闭集，则 $\overline{F} = F$，所以 $F' \subset F$. 反之，由于 $F' \subset F \Rightarrow \overline{F} = F$，故 F 为闭集.

1.11　命题　1）若 $A \subset B \subset X$，则 $\overline{A} \subset \overline{B}$；

2）若 $A \subset B \subset X$，则 $A' \subset B'$；

3）对于任意 $A_1, A_2 \subset X$，有 $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cup A_2'$.

证明　1）由命题 1.9 之 1）即知.

2）对于 $x \in A'$，设 U 为 x 的任意一个开邻域，则

$$U \cap (B - \{x\}) \supset U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing,$$

所以 $x' \in B$，$\Rightarrow A' \subset B'$.

3）由 $A_1, A_2 \subset A_1 \cup A_2$，根据 2），$\Rightarrow A_1', A_2' \subset (A_1 \cup A_2)'$，$\Rightarrow A_1' \cup A_2' \subset (A_1 \cup A_2)'$. 反之，若 $x \bar{\in} A_1' \cup A_2'$，则存在 x 的开邻域 V，使得 $(V \cap (A_1 - \{x\})) \cup (V \cap (A_2 - \{x\})) = \varnothing \Rightarrow V \cap (A_1 \cup A_2 - \{x\}) = \varnothing \Rightarrow x \bar{\in} (A_1 \cup A_2)'$. 这表明 $(A_1 \cup A_2)' \subset A_1' \cup A_2'$. 于是 $A_1' \cup A_2' = (A_1 \cup A_2)'$.

1.12　命题　在拓扑空间 X 中，关于子集的闭包有下列性

质：

1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$；

2) $\overline{A}\supset A$；

3) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；

4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明 1)~3)是显然的，对于性质4)，由于

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=(A\cup B)\cup(A\cup B)'\\&=(A\cup B)\cup A'\cup B'\\&=(A\cup A')\cup(B\cup B')\\&=\overline{A}\cup\overline{B},\end{aligned}$$

所以也成立.

性质1)~4)称为 Kuratowski 的闭包公理，由它们出发，也可以定义拓扑空间.

1.13 定义 1) 对于拓扑空间 X，以及 $A\subset X$，若 $\overline{A}=X$，则称 A 在 X 中**稠密**或 A 是 X 的**稠密子集**.

2) 对于拓扑空间 X，若在其中存在可数稠密子集，则称 X 为**可分的**，或**可分空间**.

对于 $A\subset X$ 与 $x\in A$，若存在开集 U，使得 $x\in U\subset A$，则称 x 为 A 的**内点**，A 的全体内点之集称为 A 的**内部**，记作 A°，显然它是含于 A 中的最大开集. 因此 $A\subset X$ 为开集，当且仅当 $A^\circ=A$，而对于一般情形，总有 $A^\circ\subset A$. 此外，对于 $N\subset X$，$x\in X$，N 是 x 的邻域，当且仅当 $x\in N^\circ$.

1.14 定义 设 A，B 为 X 的子集，若 $B\subset\overline{A}$，则称 A 在 B 中**稠密**；若 $A=A'$，则称 A 为**完全集**；若$(\overline{A})^\circ=\varnothing$，则称 A 为 X 中的**无处稠密集**. 可数多个无处稠密集之并称为**第一范畴集**，不是第一范畴集的子集，称为**第二范畴集**. 若 X 的任意可数个稠密开集之交仍为稠密集，则称 X 为 **Baire 空间**.

例 10　在 E^1 中，设 Q 为有理数集，S 为无理数集，Z 为自然数集，则 $\overline{Q}=\overline{S}=E^1$，故 Q，S 均为 E^1 中的稠密子集. 而$(\overline{Z})^\circ=Z^\circ=\varnothing$，故 Z 在 E^1 中无处稠密.

1.15　定义　对于拓扑空间 X 的子集 A，称 $\overline{A}\cap\overline{X-A}$为 A 的**边界**，记作 BdA，BdA 中的点称为 A 的**边界点**.

例 11　在 E^1 中，显然有

$$\mathrm{Bd}Z=Z,\quad \mathrm{Bd}Q=\mathrm{Bd}S=E^1,$$
$$\mathrm{Bd}[a,b]=\mathrm{Bd}(a,b)=\{a,b\}.$$

习　题

1. 设 $\mathscr{T}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$是 X 上的一族拓扑，证明：$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}_\lambda$ 也是 X 上的拓扑.

2. 设 X 是多于 2 个点的集合，$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 是 X 的拓扑，举例说明 $\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$ 未必是 X 上的拓扑.

3. 说明当 X 为什么集合时，在 X 上有 $\mathscr{T}_t=\mathscr{T}_d$.

4. 设 $\mathscr{T}_{cf}$，$\mathscr{T}_{cc}$，$\mathscr{T}_e$ 分别为 $\mathbf{R}$ 上的余有限，余可数与通常拓扑，试比较它们的粗细，即强弱.

5. 试考察在下列空间中每点的邻域：

1）$(X,\mathscr{T}_1)$；

2）$(X,\mathscr{T}_d)$；

3）$(\mathbf{R},\mathscr{T}_{cf})$.

6. 举例说明导集 A'未必是闭集.

7. 1）举例说明有集族$\{A_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$，使得

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\neq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A}_\lambda.$$

2）举例说明存在 A 与 B，使得$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$.

8. 证明$\overline{\cap A_\lambda}\subset\cap\overline{A}_\lambda$，$\overline{\cup A_\lambda}\supset\cup\overline{A}_\lambda$.

9. 设A为X的稠密子集，U为开集，证明$U\subset\overline{(A\cap U)}$.

10. 设A是X的稠密子集，B在A中稠密，证明B是X的稠密子集.

11. 证明稠密开集与稠密子集之交为稠密子集.

12. 证明可分空间中互不相交的开集的个数至多是可数的，但其逆不成立.

13. 证明 Baire 空间的开集仍为 Baire 空间.

14. 设A，$B\subset X$，证明：

1）$\overline{A}=A\cup \mathrm{Bd}A=A^\circ\cup \mathrm{Bd}A$；

2）$\mathrm{Bd}(A\cup B)\subset \mathrm{Bd}A\cup \mathrm{Bd}B$.

15. 设A，$B\subset X$，证明：

1）$\mathrm{Bd}A\subset A\Leftrightarrow A$是闭集；

2）$\mathrm{Bd}A\cap A=\varnothing\Leftrightarrow A$为开集；

3）$\mathrm{Bd}A=\varnothing\Leftrightarrow A$既开又闭；

4）$\overline{A^\circ}=A\Leftrightarrow A$是开集的闭包.

§2 拓扑基与度量空间

我们知道对于拓扑空间X，可以通过其中的开集来了解它，但是一般说来，X的开集往往非常之多，因此如同向量空间中的向量通过基来表示一样，可以考虑用X中的一部分开集来表示X的全部开集，这就导致拓扑基的概念.

2.1 定义 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$，若对于任意$U\in\mathscr{T}$，存在$\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$，使得

$$U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}'}B,$$

则称$\mathscr{B}$为拓扑$\mathscr{T}$的一个基或集X的一个**拓扑基**. 为了叙述的