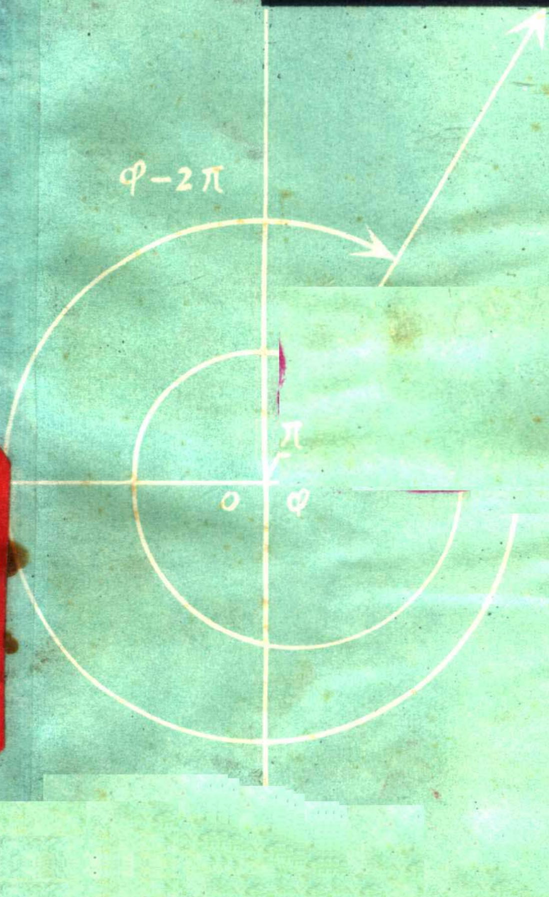
基础数学选讲

胥文章



山西人民出版社

基础数学选讲

胥 文 章

山西人民出版社

基础数学选讲

胥 文 章

山西人民出版社出版（太原并州路七号）

山西省新华书店发行山西新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：$3\frac{3}{4}$ 字数：81千字

1978年第1版 1978年8月太原第 1 次印刷

印数：1—240,000册

书号：7088·765 定价：0.29元

前　言

这里所讲的主要内容是原来属于高等学校，而今下放到中学的教材的一部分。它们在高等学校分属于不同的学科，很难把它们归纳到一个单纯的合理的体系之中，因而采用了“基础数学选讲”这个题目。

这个小册子，是根据我七七年参加晋中、晋东南高中数学教师培训工作时，参考新的教学大纲赶写的讲稿和讲义整理、改写的。由于教学的对象是中学教师，所以在材料的安排上，是有选择和侧重的。

为了便于自学，努力想把它写得通俗易懂，并且不去过分地追求简练和严谨，相反地，尽可能多地给出一些例题及解释。希望这本小册子能够为中学教学提供一些参考，甚至希望它能够成为中学高年级学生的课外读物。由于个人思想水平以及业务能力的限制，缺点与错误肯定是很多的，恳切地欢迎批评指正。

胥文章

一九七八年四月

目　录

第一章　集的基本知识……………………………………1

§1.集合的概念……………………………………1

§2.包含关系与相等……………………………………3

§3.集的运算……………………………………4

§4.包含及并与交的关系……………………………………5

§5.等价关系……………………………………7

§6.代数运算……………………………………9

第二章　自然数与数学归纳法……………………………………12

§7.自然数……………………………………12

§8.数学归纳法……………………………………14

§9.自然数的四个等价命题……………………………………22

第三章　有关实数域的几个问题……………………………………25

§10.数的整除性及其应用……………………………………25

§11.无理数……………………………………30

§12.根式……………………………………31

§13.指数与对数方程及不等式……………………………………34

第四章　复数域……………………………………42

§14.复数及其运算……………………………………42

§15.复数运算的几何解释与棣美弗定理……………………………………47

§16.开方……………………………………54

§17.代数基本定理……………………………………60

第五章　行列式与矩阵……………………………………………64
§18.行 列 式…………………………………………………………64
§19.矩阵及其运算……………………………………………………85
§20.逆 矩 阵…………………………………………………………97
§21.矩阵的初等变换与线性方程组……………………………106

第一章　集的基本知识

§1.集合的概念

集合（简称为集），原始概念之一，不下定义。所谓原始概念，就是不能用更简单的概念去定义的概念。如点，线，面，法则，力，物质等都是原始概念。对于原始概念，可以通过实例来了解它，或对它进行一些描写和解释。

集合与集体、集团、总合、总体、整体、组、系、班、伙、帮等具有同样的意义。说得详细些，集合就是由具有某种特殊性质的东西构成的整体；当我们把所考察或研究的对象看成一个整体时，就说由这些对象组成一个集合。例如：自然数组成的集合，就是说由全体自然数组成的一个整体。同样可以说，中国人组成的集，某个时刻某个教室中的学生组成的集，所有多项式组成的集，天体中星星组成的集，某张桌子上的东西组成的集，多项式 x^2+1 的所有实数根组成的集，等等。

集合一般用大写字母A，B，…，M，…表示。

组成一个集合的那些对象（东西，个体，成员），叫该集合的元素。例如我们说集A是由所有山西人组成的，那么每一个山西人都是集A的元素。

元素一般用小写的字母a，b，…表示。如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作：$a\in A$；如果a不是集A的元素，就说a不属于A，记作：$a\bar{\in} A$。

由a，b，c，d组成的集合，一般记作：$\{a, b, c, d\}$或$\{b, c, d, a\}$或$\{c, a, b, d\}$等等，这表明这个集合是由a，b，c，d组成的，与写出的顺序无关。这个记法是合理的，它表明组成这个集合的元素具有性质：与a或与b或与c或与d相等。这也决定了记法：$\{a, a, b, c, d\}$是不允许的，我们认为集合中的元素是不重复的。

类似的记法也适用于某些无限集，例如自然数集，整数集，正偶数集，由2的正整数幂组成的集依次可以表成：

$\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$,

$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\cdots\}$,

$\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$,

$\{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\cdots\}$.

当然在这种记法中，应该使人能够判断出，该集是由哪些元素组成的，例如上面最后一个集，我们可以断定，64，128，2^{13}，2^{100}都是它的元素，我们也可以断定3，$\sqrt{2}$，-7，10都不是它的元素。因之下面的记法：

$\{1, 8, -2, \sqrt{3}, 7, \cdots\cdots\}$

是没有意义的，因为我们无法断定，它到底是由哪些数组成的。一般说来，确定一个集的条件（组成一个集的那些元素所共有的性质），必须是十分明确的，明确到足以判别任一事物是否符合该条件。例如说："非常大的数组成的集"，"距点P很远的点组成的集"都是没有意义的，因为我们无法断定哪个数才算是非常大的，哪个点才算是距点P非常远的。

为了讨论问题的方便，假想有一个不含任何元素的集，叫它做空集，记作：O。例如前面说到的多项式x^2+1的实数根组成的集就是一个空集。太阳上的人组成的集也是空集。

我们认为空集是唯一的。

O 表示空集，联系出现的场合，不会与数 0 混淆。

§2.包含关系与相等

1.若集 A 的每一个元素都是集 B 的元素，即若 $x\in A$ 则 $x\in B$，就说集 A 包含于集 B，此时说集 A 是集 B 的子集（部分集合）。记作：$A\subset B$。

例如：A 是由山西人组成的集，B 是中国人组成的集。因为每一个山西人都是中国人，所以集 A 是集 B 的子集，即 $A\subset B$。

再如：$C=\{1,3,5,7,\cdots\cdots\}$，$D=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$，此时 $C\subset D$。

空集 O 是任何集的子集。这是因为空集不含任何元素。若 A 是任意集，那么："$x\overline{\in}A$ 时，一定有 $x\overline{\in}O$"，而这与"$x\in O$，则有 $x\in A$"是等价的。（互为逆否命题！）因而说空集是任何集的子集。

关于包含关系，易知：

1° $A\subset A$，

2° 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

2.若集 A 是集 B 的子集，集 B 又是集 A 的子集，则说集 A 等于集 B，记作 $A=B$，也就是说：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$。这表明当且仅当两个集合的元素完全相同时才叫相等。

3.若集 A 是集 B 的子集，但集 B 不是集 A 的子集，则说集 A 是集 B 的真子集。

显然，若集 A 是集 B 的真子集，那么 A 的每个元素都是 B 的元素，但 B 中至少有一个元素不属于 A。

注意：A 与 $\{A\}$ 的意义不同，例如 $A=\{a, b\}$是一个有两个元素的集合，而$\{A\}$是仅有一个元素的集合。

§3.集的运算

1.集的并

由属于集 A 或属于集 B 的一切元素组成的集，（其中当然也包括既属于集 A 又属于集 B 的一切元素），叫集 A 与集 B 的并集，记作：$A\cup B$。

例1 集 A 是由中国男人组成的集，集 B 是由中国女人组成的集，那么 $A\cup B$ 是由中国人组成的集。

例2 设$A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\cdots\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots\}$，那么 $A\cup B=B$。

例3 设$A=\{a, b, c\}$，$B=\{b, d, e\}$，那么$A\cup B$

$$=\{a, b, c, d, e\}$$

关于并，我们有

$A\cup B=B\cup A$ （交换律）

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ （结合律）

特别的 $A\cup A=A$， $A\cup O=A$，

同样可以定义多个集合的并集。

2.集的交

由既属于集 A 又属于集 B 的一切元素组成的集，叫做集 A 与集 B 的交集。记作：$A\cap B$。

例1 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{4, 5, 6\}$，则 $A\cap B=\{4, 5\}$。

例2 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{$甲，乙，丙，丁，$\}$，则 $A\cap B=O$.

例 3　若集 A 是中学生组成的集合，B 是男人组成的集合，则 $A\cap B$ 是由男中学生组成的集合。

关于交，我们有：

$A\cap B=B\cap A$　　　　　　　　（交换律）

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　　　　（结合律）

特别的　$A\cap A=A$，　$A\cap O=O$，

另外还有两个分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

这些性质的证明方法都是类似的，兹证最后一个如下：

〔证明〕　设　$x\in A\cup(B\cap C)$

那么　$x\in A$　或　$x\in B$　且　$x\in C$

无论哪种情况，都有

$$x\in A\cup B \quad 且 \quad x\in A\cup C$$

因而　$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\therefore$　$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$

反之，若　$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

那么　$x\in A\cup B$　且　$x\in A\cup C$，

所以　$x\in A$　或者　$x\in B$　且　$x\in C$

也就是说　$x\in A$　或　$x\in B\cap C$　从而　$x\in A\cup(B\cap C)$

所以　$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$

故　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.▮

同样可以定义多个集合的交集。

§4.包含及并与交的关系

1.对于任意两个集 A，B，都有

$$A\cap B\subset A,\qquad A\cap B\subset B,$$
$$A\subset A\cup B,\qquad B\subset A\cup B,$$

这是因为 A 和 B 如果有公共元素，这些公共元素都是 A 的，当然也都是 B 的。而 A 与 B 的并 $A\cup B$ 中包含了所有 A 的元素，也包含所有 B 的元素。

2.下面三个关系

1° $A\subset B$,　2° $A\cup B=B$,　3° $A\cap B=A$，有一个成立，另外两个一定成立。

〔证明〕 假设1°成立。若 $x\in A\cup B$，那么 $x\in A$ 或 $x\in B$。而 $A\subset B$ $\therefore x\in B$

$\therefore A\cup B\subset B$。 由1知 $B\subset A\cup B$

$\therefore A\cup B=B$ 故 2°成立。

此外，设 $x\in A$，由1°推出 $x\in B$，$\therefore x\in A\cap B$，从而 $A\subset A\cap B$，而由1知 $A\cap B\subset A$。$\therefore A\cap B=A$。故3°成立。

假设2°成立，$\because$ $A\subset A\cup B$ 及 $A\cup B=B$ $\therefore$ 1°成立，从而3°亦成立。

假设3°成立，由 $A\cap B\subset B$ 及 $A\cap B=A$ $\therefore$ 1°成立，从而2°亦成立。▮

关于集合的包含、运算等关系，有时可以用各种重迭的元直观地表示出来。下面三个图形依次表出：$A\subset B$, $A\cup B$, $A\cap B$。

图 1

§5. 等价关系

设有两个集合 A 与 B，如果集 A 中的任何一个元素 a，通过法则 φ 都能唯一地确定集 B 中的一个元素 $\varphi(a)$，我们就说：φ 是集 A 到集 B 的一个对应（映射）。此时说 a 对应 $\varphi(a)$，$a \to \varphi(a)$。$\varphi(a)$ 叫 a 的象，a 叫 $\varphi(a)$ 的原象。

例如，若 $A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$，$B=\{1, 2\}$，法则 φ 为 A 中每一个元素 a，规定象 $\varphi(a)$，当 a 是奇数时，$\varphi(a)=1$，当 a 为偶数时，$\varphi(a)=2$，这个 φ 就是集 A 到集 B 的一个对应。

φ 究竟是否为集 A 到集 B 的一个对应，主要决定于①φ 要为 A 中的每一个元素都在 B 中规定一个象，②A 中每一个元素在 B 中的象都是唯一的。注意，这里没有要求 A 中不同的元素的象也不同，也没有要求 B 中的每一个元素都必须是 A 中某个元素的象。

如果 φ 是集 A 到集 B 的一个对应，而且还具有以下两个性质：

1° φ 使 A 中不同的元素，在 B 中有不同的象，

2° φ 使 B 中每一个元素，至少是 A 中某一个元素的象。

那么 φ 叫集 A 到集 B 的一个一一对应。

显然，若有一个集 A 到集 B 的一一对应，也一定有一个集 B 到集 A 的一一对应。

若集 A 与集 B 间存在一个一一对应，则说集 A 与集 B 等价（对等）。

例1 设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{$甲，乙，丙$\}$，法则

φ_1使：$\varphi_1(a)=$甲，$\varphi_1(b)=$乙，$\varphi_1(c)=$丙，那么φ_1是集A到集B的一个一一对应，此时A与B等价。上面的对应关系有时也表成：

φ_1：$a\to$甲，$b\to$乙，$c\to$丙，

当然下面的φ_2、φ_3也都是A到B的一一对应。

φ_2：$a\to$乙，$b\to$甲，$c\to$丙；

φ_3：$a\to$丙，$b\to$甲，$c\to$乙。

例2 设$A=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$，$B=\{2,4,6,\cdots\cdots\}$，$C=\{1,4,9,16,\cdots\cdots\}$，$D=\{100,100^2,100^3,100^4,\cdots\cdots\}$

φ_1，φ_2及φ_3依次使A中的任一元素a对应：$2a$，a^2，100^a，即$\varphi_1(a)=2a$，$\varphi_2(a)=a^2$，$\varphi_3(a)=100^a$，那么φ_1是A到B的，φ_2是A到C的，φ_3是A到D的一一对应。

例3 设$A=[0,1]$，$B=(0,1)$，即A是由大于或等于0，但小于或等于1的所有实数组成的集；而B是由所有大于0且小于1的所有实数组成的集。

法则φ使集A中的元素x，对应$\varphi(x)$，当$x\in\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots\}$时，$\varphi(0)=\frac{1}{2}$，$\varphi(1)=\frac{1}{3}$，$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$\varphi(\frac{1}{3})=\frac{1}{5}$，$\varphi(\frac{1}{4})=\frac{1}{6}$，$\cdots\cdots$，$\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+2}$，$(n>1)$；而当$x\overline{\in}\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\cdots\}$时，$\varphi(x)=x$，这个$\varphi$就是$[0,1]$到$(0,1)$的一个一一对应。

在例2中我们看到集A与集B，C，D每一个都是等价的，而B，C，D又都是集A的真子集。这就是说有这样的集合存在，它可以与它的一个真子集等价。然而也有这样的集合存在，它不能和它的任何一个真子集等价。例如集$E=\{a,b,c\}$，它一共有七个真子集：O，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，

$\{a, b\}$，$\{b, c\}$，$\{a, c\}$，而这七个当中的任何一个都不与 E 等价。一个集合，如果不能够与它的任何一个真子集等价，就叫它为有限集。空集也是有限集，因为它没有真子集。非有限集叫做无限集。或者说一个集如能和它的一个真子集等价，就叫无限集。所以一个集或为有限集或为无限集。例 2 中的 A，B，C，D，例 3 中的 A，B 都是无限集。

若集 A 与集 B 等价，记作：$A \sim B$，显然

1° $A \sim A$；

2° $A \sim B$ 则 $B \sim A$；

3° $A \sim B$，$B \sim C$ 则 $A \sim C$。

§6.代数运算

设 A 是一个非空的集合，如果法则○，对于顺次从 A 中取出的任意一对元素 a，b，都唯一的确定集 A 中的一个元素 c，记作：$a \bigcirc b = c$ 就把法则○叫做集 A 上的一个运算（代数运算）。此时有说：○在 A 中封闭，或○在 A 中可以施行。

例如自然数集中的普通加法"+"就是自然数集中的一个代数运算，因为任何两个自然数相加还是一个自然数。同样，普通的乘法"×"也是自然数集中的代数运算。（这里的"+"与"×"相当于定义中的"○"，代数运算用什么记号是无关重要的。）但减法却不是自然数集中的代数运算，因为尽管当 $a>b$ 时，自然数 a 与 b 的差是唯一确定的一个自然数，然而 $a \leq b$ 时，$a-b$ 却不是自然数。

一般说来，在一个非空的集合中，可以任意定义代数运算，例如在自然数集中，可以定义：

$$a \bigcirc b = a^b \quad \text{或} \quad a \circledcirc b = 3a + 2b$$

等等，这里容易验证，“○”及“◎”都是自然数集中的代数运算。但是这样随便定义的代数运算却未必有什么实际用途或意义。数学中讨论的代数运算都是从大量实际模型中抽象出来的。一般还要求代数运算要满足一定的规律，如结合律，交换律等。代数学中就讨论具有一个或两个代数运算的、并且满足一定条件的数学体系，如群、环、域等。这些都超出了中学教学内容的范围。在中学教学中关于数环、数域的概念还是必要的。

1°数模是指一个对于加法和减法都封闭的非空的数集。也就是说数模是这样一个数集，它不是空集，而且其中任意两个元素的和与差都在其中。例如全体整数所成的集，全体3的倍数所成的集，仅由一个数0组成的集$\{0\}$都是数模。全体自然数组成的集却不是数模。容易看到任何一个数模中都含有数0，这是因为设A是一个数模，由于A不是空集，故必有一个$a \in A$，那么$0 = a - a \in A$，$\therefore A$含有数0。

同样，一个数模中若含有a，一定含有a的所有倍数，事实上，$a \in A$，那么$a + a \in A$，即$2a \in A$，那么$3a = 2a + a \in A$，……，而$0 \in A$，$\therefore -a = 0 - a \in A$，$(-a) + (-a) \in A$，即$-2a \in A$，如此下去，不论$k$是任何整数，$ka \in A$。

2°数环是指一个对于加法、减法和乘法都封闭的非空的数集。也就是说一个非空的数集，如果包括其中任意两个元素的和、差、积就是一个数环。

数环一定是数模。上面例举的三个数模都是数环。全体整数构成的数环，叫整数环。

3°数域是指一个至少含有两个数的数环，而且包括其中

任意两个元素的商，零做除数除外。也就是说数域是这样一个数集，它至少含有两个数，而且其中任何两个数的和、差、积、商（零作除数除外），也都在其中。

例如：全体有理数构成一个数域，叫有理数域，全体实数构成实数域，全体复数构成复数域。

数域一定是数环。数域还有一个重要性质：任何数域都包含有理数域。这是因为，如果P是一个数域，它至少含有一个不等于零的数a，那么由$a\in P$推出$\frac{a}{a}=1$也属于P，因而包含1的所有倍数，即包含全体整数。那么P也含有任何两个整数的商（零不为除数），即包含全体有理数。因而P包含有理数域。

这个性质告诉我们有理数域是最小的数域。

这一章就讲到这里，在此基础上可以直接进入第四章；或直接进入第五章。