附：全国统一考试试卷解析 考试预测试卷

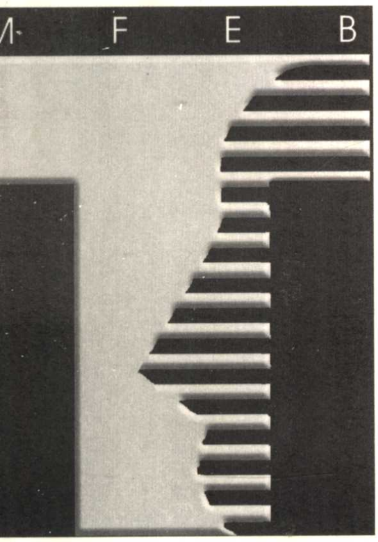
高等数学（工本）

高等教育自学考试同步辅导／同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

滕桂兰 郭洪芝／主编

公共课程



朝华出版社

最新版

赠专家预测试题

定价29.00元

含最新全国统一命题考试试题及参考答案

高等数学（工本）

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

主　编　郭洪芝　滕桂兰
副主编　朱文举　李其霖

公共课程

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工本)/郭洪芝,滕桂兰主编.—北京:朝华出版社,2003.9(2004.2 第 3 版)
(高等教育自学考试同步辅导·同步训练)
ISBN 7-5054-0825-9
Ⅰ.高… Ⅱ.①郭…②滕… Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料
Ⅳ.R473.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 076099 号

高等数学(工本)

主　　编　郭洪芝　滕桂兰
责任编辑　王　磊
特约编辑　吴伶芝
封面设计　朱　珊
责任印制　赵　岭
出版发行　朝华出版社
社　　址　北京市车公庄西路 35 号　**邮政编码**　100044
电　　话　(010)68433166
(010)68413840/68433213(发行部)
传　　真　(010)88415285
印　　刷　北京拓瑞斯印务有限公司
经　　销　全国新华书店
开　　本　16 开　**字　　数**　523 千字
印　　数　1—5000　**印　　张**　22.5
版　　次　2004 年 2 月第 3 版第 1 次印刷
装　　别　平
书　　号　ISBN 7-5054-0825-9/G.0261
定　　价　29.00 元

[第三版出版说明]

本书是全国高等教育自学考试指定教材公共课程《高等数学(工本)》的配套辅导用书的修订本。

梯田品牌自考系列丛书自1998年出版以来，由于其独具的特点和卓越的品质深得全国各省、市教委、学校和广大自考师生的好评和认可，全国每年约有800万人次的考生使用本品牌，销量居全国同类书之榜首，被誉为最受欢迎的自考辅导丛书。此次修订亦是进一步提高质量的举措。

本书的编写及修订依据：

全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《高等数学（工本）》（附：高等数学（工本）自学考试大纲）》（陆庆乐主编，西安交通大学出版社出版）。

修订具体内容所做的重要基础工作：

1. 深入分析研究考试大纲的要求和新命题精神；

2. 深入分析研究最新高等教育自学考试全国统一命题考试的题型、分值分布、答题要求及评分标准。

3. 广泛分析自考生在学习和实际解答试卷中存在的问题，有针对性地进行全面辅导和同步训练，使考生彻底掌握重点与难点。

本书结构及显著特点：

1. 本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索，按考试大纲规定的考核知识点及能力层次要求为线索分章辅导，将该章中的所有知识点按统考的各种题型编写在同步练习中，同时配有参考答案。题型及题序与最新全国统考试题完全一致。编写中力求做到点面结合，突出重点。

2. 精心设计的考试预测试卷，题型、题序、题量与最新全国统考试题完全一致。是作者综合全书、结合考试大纲要求精选出的数道“押题”，一定程度上反映了考试趋势，同时亦检测考生对于本课程的掌握程度。

3. 汇编最新全国统考试卷及答案。考生可以了解到最近、最新的全国统考试题的发展动态。考生学完全书，再通过对历年全国统考试卷的强化训练，巩固已经学过的知识点、考试重点，可以科学地进行自我考核、自我评估及自我调整复习方向，攻克弱点及不足，从而达到事半功倍的效果。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书，是一项长期的、艰难而具有深刻意义的社会助学工作，编写过程中不断得到社会各界的大力支持与关怀，在此深表谢意。

使该书在使用中不断提高和日臻完善，是我们永远的目标。

敬请读者批评指正。

编　者

2004年2月

目　录

第一章　函　　数

基本要求

1. 正确理解函数的定义,要弄清楚定义中的两个要素、定义域和对应法则;要能区分 $f(x)$ 与 $f(a)$,要会计算函数值(包括分段函数).

2. 要牢记基本初等函数的定义域,会求比较简单的函数的定义域.

3. 要弄清楚反函数的概念,以及它与原函数在表示式上、几何图形上的关系;要牢记反三角函数的主值范围.

4. 要弄清复合函数的概念,并能将几个函数正确地复合成一个函数,更为重要的是把一个函数分解成几个简单函数的复合.

5. 能判定一些比较简单函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性(如果函数存在这些性质).

6. 要熟悉基本初等函数的图形与形态.

重点与难点

重点:函数概念、初等函数、复合函数.

难点:复合函数.

例题及例题分析

一、填空题

1. 函数 $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x} + \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为________.

答案　$(-1,1)$

解析　由 $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$、$1-x^2 \geqslant 0$、$x \neq -1$,得 $-1 < x < 1$,即定义域为 $(-1,1)$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1 & |x| < 2 \\ 1 & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$,则 $f(x+1)$ 的定义域为________.

答案　$(-3,2]$

解析　因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,3]$,故 $-2 < x+1 \leqslant 3$,即 $-3 < x \leqslant 2$,所以 $f(x+1)$ 的定义域为 $(-3,2]$.

3. 设 $y = f(x-2)$ 的定义域为 $[1,4)$,则 $f(x)$ 的定义域为________.

答案　$[-1,2)$

解析　因为 $f(x-2)$ 的定义域为 $[1,4)$,故 $-1 \leqslant x-2 < 2$,即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2)$.

4. 设$f(x+2)=x^2+1$，则$f(x-1)=$______.

答案 $x^2-6x+10$

解析 因为$f(x+2)=(x+2-2)^2+1$，故

$$f(x-1)=(x-1-2)^2+1=(x-3)^2+1=x^2-6x+10.$$

5. 如果$f(x)=\sin x$，则$f(-\sin\frac{\pi}{4})=$______.

答案 $-\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 $f(-\sin\frac{\pi}{4})=\sin(-\sin\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 函数$f(x)=\tan(4\pi x+3)$的最小正周期是______.

答案 $\frac{1}{4}$

解析 因为$\tan(4\pi x+3+\pi)=\tan[4\pi(x+\frac{1}{4})+3]=\tan(4\pi x+3)$，故最小正周期是$\frac{1}{4}$.

7. 如果$\varphi(x)=x+2$，且$f[\varphi(x)]=\frac{x-3}{x+1}(x\neq-1)$，则$f(\frac{5}{2})=$______.

答案 $-\frac{5}{3}$

解析 因为$f(x+2)=f[\varphi(x)]=\frac{x+2-5}{x+2-1}$，所以$f(x)=\frac{x-5}{x-1}$，故

$$f(\frac{5}{2})=(\frac{5}{2}-5)\Big/(\frac{5}{2}-1)=-\frac{5}{3}，或f(\frac{5}{2})=f[\varphi(\frac{1}{2})]=\frac{\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{5}{3}.$$

8. 函数$y=\pi+\arcsin\frac{x}{2}$的反函数为______.

答案 $y=2\sin(x-\pi),[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

解析 因为$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\pi+\arcsin\frac{x}{2}\leqslant\frac{3}{2}\pi$，由$y=\pi+\arcsin\frac{x}{2}$，得$x=2\sin(y-\pi)$，故所求反函数为$y=2\sin(x-\pi),[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$.

9. 设$f(x)=\ln x$，函数$\varphi(x)$的反函数$\varphi^{-1}(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$，则$f[\varphi(x)]=$______.

答案 $\ln\frac{x+2}{x-2}$

解析 由$y=\frac{2(x+1)}{x-1}$，得$x=\frac{y+2}{y-2}$，知$\varphi(x)=\frac{x+2}{x-2}$，所以$f[\varphi(x)]=\ln\frac{x+2}{x-2}$.

10. 设$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant0\\-x^3 & x>0\end{cases}$的反函数是$\varphi(x)$，则$\varphi(4)=$______.

答案 -2

解析 因为当$x\leqslant0$时，$y=x^2$，所以$y\geqslant0,x=-\sqrt{y}$；当$x>0$时，$y=-x^3$，所以$y<0,x=-\sqrt[3]{y}$.

即 $\varphi(x)=\begin{cases}-\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -\sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$,故 $\varphi(4)=-\sqrt{4}=-2$. 或由 $f(x)=4$,得 $x=-\sqrt{4}=-2$. 故 $\varphi(4)=-2$.

二、单项选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant -2\\ x+9 & -2<x<2\\ 2^x & x\geqslant 2\end{cases}$,则下列各式中不成立的是

(A)$f(-2)=f(2)$　　(B)$f(1)=f(4)$

(C)$f(-1)=f(3)$　　(D)$f(0)=f(-3)$　　【　】

答案　选(B)

解析　因为 $f(-3)=(-3)^2=9$、$f(-2)=(-2)^2=4$、$f(-1)=-1+9=8$、$f(0)=9$、$f(1)=10$、$f(2)=2^2=4$、$f(3)=2^3=8$、$f(4)=2^4=16$,显然 $f(1)\neq f(4)$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$,则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域为

(A)$[-3,0]$　　(B)$[-3,1]$　　(C)$[-\frac{1}{2},1]$　　(D)$[-\frac{1}{2},0]$　【　】

答案　选(D)

解析　因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$,故有 $\begin{cases}-1\leqslant x+2\leqslant 2\\ -1\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}$,即 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 0\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$,所以 $F(x)$ 的定义域为 $[-\frac{1}{2},0]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ \lg x & x>0\end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases}2-\cos x & x\leqslant 0\\ 1-\sqrt{x} & x>0\end{cases}$,则 $\varphi[f(-1)]=$

(A)0　　(B)1　　(C)$2-\cos 1$　　(D)$\ln(2-\cos 1)$

【　】

答案　选(A)

解析　因为 $f(-1)=1$、$\varphi[f(-1)]=\varphi(1)=1-\sqrt{1}=0$,故选(A).

4. 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a$ 是

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 奇偶性取决于 a 值　　【　】

答案　选(B)

解析　因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a=\ln\dfrac{a^2}{x+\sqrt{a^2+x^2}}-\ln a$

$$=2\ln a-\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a=-[\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\ln a]=-f(x).$$

5. 使等式 $\arcsin(\sin x)=x$ 成立的所有 x 为

(A)$(-\infty,+\infty)$　　(B)$[-1,1]$　　(C)$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$　　(D)$(-\pi,\pi)$　【　】

答案　选(C)

解析　因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2}$,令 $x=\arcsin y$,则 $y=\sin x$,于是得到 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时有

$$x = \arcsin y = \arcsin(\sin x).$$

6. 函数$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,$(-\infty < x < +\infty)$是

(A) 有界函数　　(B) 无界函数

(C) 上无界下有界　　(D) 上有界下无界　　【　】

答案　选(A)

解析　因为$(|x|-1)^2 \geqslant 0$,即$x^2+1 \geqslant 2|x|$,$\dfrac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1$. 所以$\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| = \dfrac{|x|}{1+x^2} \leqslant \dfrac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1$,故$f(x)(-\infty < x < +\infty)$是有界函数.

7. 函数$y = \dfrac{1}{2}e^{1-x}(-\infty < x < +\infty)$是

(A) 单调增函数　　(B) 单调减函数　　(C) 非单调函数　　(D) 有界函数　　【　】

答案　选(B)

解析　因为$y = \dfrac{1}{2}e^{1-x} = \dfrac{e}{2}e^{-x}$,显然由图形可知为单调减函数.

8. 函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$有定义,则对任意的x、y,有$f(x+y) = f(x)+f(y)$,$f(1) = 2$,则$f(2) =$

(A) -2　　(B) -1　　(C) -4　　(D) 4　　【　】

答案　选(D)

解析　由$f(x+y) = f(x)+f(y)$,得$f(1+1) = f(1)+f(1) = 2+2 = 4$,即$f(2) = 4$.

9. 下列各对函数中,表示相同函数关系的是

(A) $f_1(x) = x\sqrt{x-1}$,$f_2(x) = \sqrt{x^3-x^2}$　　(B) $f_1(x) = \arcsin(\sin x)$,$f_2(x) = x$

(C) $f_1(x) = 1-\cos 2x$,$f_2(x) = 2\sin^2 x$　　(D) $f_1(x) = \ln x^2$,$f_2(x) = 2\ln x$.　　【　】

答案　选(C)

解析　因(A)、(D)中两函数的定义域不同,(B)中两函数的对应规律不同,例如$f_1(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{\pi}{2}$,$f_2(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi$.

10. 设$f(x)$、$\varphi(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有定义,且$f(x)$为奇函数、$\varphi(x)$为偶函数,则$\varphi[f(x)]$为

(A) 奇函数　　(B) 偶函数　　(C) 非奇非偶函数　　(D) 有界函数　　【　】

答案　选(B)

解析　因为$\varphi[f(-x)] = \varphi[-f(x)] = \varphi[f(x)]$,故$\varphi[f(x)]$为偶函数.

11. 已知偶函数$f(x)$在$[0,4]$上是单调增函数,则$f(-\pi)$与$f(\log_{\frac{1}{2}}8)$的大小关系是

(A) $f(-\pi) < f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　(B) $f(-\pi) = f(\log_{\frac{1}{2}}8)$

(C) $f(-\pi) > f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　(D) 不能确定　　【　】

答案　选(C)

解析　因为$f(x)$为偶函数且在$[0,4]$上是单调增函数,故$f(x)$在$[-4,0]$上是单调减函数,又$\log_{\frac{1}{2}}8 = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-3} = -3 > -\pi$,故$f(-\pi) > f(\log_{\frac{1}{2}}8)$.

12. 下列函数中为周期函数的是

(A) $y = \sin x^2$　　(B) $y = \arcsin 2x$

(C)$y = x|\sin x|$　　(D)$y=\tan(3x-2)$　【　】

答案　选(D)

解析　因为$\tan[3(x+\frac{\pi}{3})-2]=\tan(3x+\pi-2)=\tan[(3x-2)+\pi]=\tan(3x-2)$，

故$y=\tan(3x-2)$是以$\frac{\pi}{3}$为周期的周期函数.

13. 设$f(x)$是以3为周期的奇函数，且$f(-1)=-1$，则$f(7)=$

(A)1　　(B)-1　　(C)2　　(D)-2　【　】

答案　选(A)

解析　因为$f(7)=f(1+2\times3)=f(1)=-f(-1)=1$.

14. 下列函数中为基本初等函数的是

(A)$y=2x+\tan x$　　(B)$y=x^{\frac{2}{3}}$

(C)$y=1+|x|$　　(D)$y=\ln(1+x^2)$　【　】

答案　选(B)

解析　由定义可得.

三、计算题

1. 求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{1-|x-1|}$　　(2)$y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$

解　(1) 由$\begin{cases}4x-x^2\geqslant 0\\1-|x-1|\neq 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4\\x\neq 0\text{ 且 }x\neq 2\end{cases}$，所以函数的定义域为$(0,2)\cup(2,4]$.

(2) 由$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\\sin x>0\end{cases}$，解得$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\2k\pi<x<(2k+1)\pi\end{cases}$，其中$k$取整数.

解此不等式组，得函数的定义域为$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

2. 设函数$y=f(3x-2)$的定义域是$[1,4]$，求函数$y=f(3x+1)$的定义域.

解　由$1\leqslant x\leqslant 4$得　$1\leqslant 3x-2\leqslant 10$，故函数$f(x)$的定义域是$[1,10]$，由$1\leqslant 3x+1\leqslant 10$解得$0\leqslant x\leqslant 3$，故函数$y=f(3x+1)$的定义域为$[0,3]$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 1\\1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$，且$g(x)=f(x^2)+f(x-1)$，求$g(x)$的定义域.

解　因$f(x)$的定义域为$[-2,2]$，所以$\begin{cases}0\leqslant x^2\leqslant 2\\-2\leqslant x-1\leqslant 2\end{cases}$，解得$\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\-1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$.

所以函数$g(x)$的定义域为$[-1,\sqrt{2}]$.

4. 设$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\0 & |x|=1\\-1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求$f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(\ln x)=\begin{cases}1 & |\ln x|<1\\ 0 & |\ln x|=1\\ -1 & |\ln x|>1\end{cases}$，即$f[g(x)]=\begin{cases}1 & \frac{1}{e}<x<e\\ 0 & x=\frac{1}{e},e\\ -1 & 0<x<\frac{1}{e},e<x<+\infty\end{cases}$

5. 设$f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}+1$，求$f(x)$.

解 $f(1+\frac{1}{x})=(\frac{1}{x^2}-1)+2=(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}-1)+2=(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x}-2)+2$

$=(1+\frac{1}{x})^2-2(1+\frac{1}{x})+2$，故$f(x)=x^2-2x+2$.

6. 设$f(\tan x)=\tan x+\sin 2x$，其中$0<x<\frac{\pi}{2}$，求$f(\cot x)$.

解 令$\tan x=t$. 由$f(\tan x)=\tan x+2\sin x\cos x$及图1.1得：

$f(t)=t+2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=t+\frac{2t}{1+t^2}$.

因此，$f(\cot x)=\cot x+\frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}=\cot x+2\cot x\sin^2 x=\cot x+\sin 2x$.

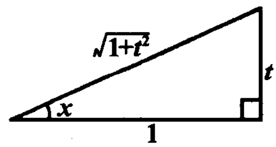


图1.1

7. 设单值函数$f(x)$满足关系式$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0(0<x\leqslant e)$，且$f(0)=0$，求$f(x)$.

解 令$\ln x=t$则$x=e^t$，故由原式得$f^2(t)-2e^tf(t)+te^{2t}=0$；$f(t)=\frac{2e^t\pm\sqrt{4e^{2t}-4te^{2t}}}{2}$

$=e^t(1\pm\sqrt{1-t})$. 由$f(0)=0$，得$f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t})$，故$f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x})$.

8. 判断下列函数的奇偶性

(1)$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$　　(2)$f(x)=x\frac{2^x-1}{2^x+1}$

(3)$f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & 0<x<+\infty\\ x^2-1 & -\infty<x<0\end{cases}$　　(4)$f(x)=(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

解 (1)$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，且$f(-x)=\ln(\sqrt{1+(-x)^2}+x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$，故$f(x)$为奇函数.

(2)$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，且$f(-x)=(-x)\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=(-x)\frac{1-2^x}{1+2^x}=x\frac{2^x-1}{2^x+1}=$

$f(x)$，故$f(x)$为偶函数.

(3) ＜解法1＞

任取$x>0$，则$-x<0$，于是$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=-(-x^2+1)=-f(x)$.

再任取$x<0$，则$-x>0$，于是$f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1=-(x^2-1)=-f(x)$.

故对任意的$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，都有$f(-x)=f(x)$. 因此，$f(x)$为奇函数.

＜解法2＞

将$f(x)$变形，$f(x)=|x|(-x+\frac{1}{x})$，$(x\neq0)$. 于是　$f(-x)=|-x|\left[-(-x)+\frac{1}{-x}\right]$

$=-|x|(-x+\frac{1}{x})=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数.

(4) 因函数的定义域为$(-1,1]$，由于此区间关于原点不对称，所以此函数为非奇非偶函数.

9. 求下列函数的反函数

(1)$y=1-\sqrt{1-x^2}$，　$(-1\leqslant x\leqslant 0)$　　　(2)$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，　$(x\geqslant 1)$

(3)$y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$

解　(1) 由$-1\leqslant x\leqslant 0$得$0\leqslant x^2\leqslant 1$，于是$0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$，因此$0\leqslant y\leqslant 1$.
由$y=1-\sqrt{1-x^2}$解得$x=-\sqrt{2y-y^2}$，所以所求函数的反函数为：$y=-\sqrt{2x-x^2}$，　$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) 由已知$x+\sqrt{x^2-1}=e^y$，所以$e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=x-\sqrt{x^2-1}$，故$x=\dfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})$.

因为$x\geqslant 1$，有$x^2-1\geqslant 0$，于是$x+\sqrt{x^2-1}\geqslant 1$，有$y\geqslant 0$. 因此所求函数的反函数为：

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),x\geqslant 0.$$

(3) 令$t=\sqrt{1+4x}$，则$y=\dfrac{1-t}{1+t}$. 所以$t=\dfrac{1-y}{1+y}$，即$\sqrt{1+4x}=\dfrac{1-y}{1+y}$，故

$$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}.$$

由于$t\geqslant 0$，故$-1<y\leqslant 1$. 因此所求函数的反函数为：$y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$，$-1<x\leqslant 1$.

四、应用和证明题

1. 设$f(x)$满足方程$2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$，试证明：$f(-x)=-f(x)$.

证　令$x=\dfrac{1}{t}$得$2f(\frac{1}{t})+f(t)=t$，即$f(x)+2f(\frac{1}{x})=x$.

于是得方程组：$\begin{cases}2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}\\ f(x)+2f(\frac{1}{x})=x\end{cases}$，解此方程组得$f(x)=\dfrac{2-x^2}{3x}$.

所以
$$f(-x)=\frac{2-(-x)^2}{3(-x)}=-\frac{2-x^2}{3x}=-f(x).$$

练习题一

一、填空题

1. 函数$f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$的定义域是________.
2. 若$f(x)$的定义域为$[0,2a]$，则$f(x+a)$的定义域为________.
3. 函数$y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$的反函数是________.
4. 设$f(x)=\begin{cases}2 & |x|\leqslant 2\\ 1 & |x|>2\end{cases}$，则$f[f(x)]$________.
5. 设$f(x)=\arcsin x,\varphi(x)=2x$，则$f[\varphi(x)]$的定义域为________.

6. 设$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$与$\varphi(x)$的图形关于直线$y=x$对称,则$\varphi(x)=$ ________.

7. 如果$f(x)=3^{-x}$,则$f(-f(0))=$ ________.

8. 设$f(\sin x)=3-\cos 2x$,则$f(\cos x)=$ ________.

二、单项选择题

1. 两个函数相同是指这两个函数

(A) 定义域相同　　(B) 值域相同

(C) 定义域相同且值域相同　　(D) 定义域相同且对应法则相同　　【　】

2. 设$f(x)=1/(1+e^{-x})$、$\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x}$,则下列等式中成立的是

(A)$f(x)=\varphi(e^{-x})$　　(B)$f(e^{-x})=\varphi(e^{-x})$

(C)$f(x)=\varphi(e^{x})$　　(D)$f(e^{x})=\varphi(e^{x})$　　【　】

3. 在$(-\infty,+\infty)$内,$y=\dfrac{1}{2}e^{1-x}$是

(A) 单调增的无界函数　　(B) 单调减的无界函数

(C) 单调增的有界函数　　(D) 单调减的有界函数　　【　】

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}x & |x|\leqslant 1\\ \sin x & 1<|x|\leqslant 4\end{cases}$,则$f(x^2)$的定义域是

(A)$[-2,2]$　　(B)$[-4,4]$　　(C)$[-1,1]$　　(D)$[1,4]$　　【　】

5. 函数$f(x)=\begin{cases}2x & |x|\leqslant 1\\ 1+x & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$为

(A) 基本初等函数　(B) 分段函数　　(C) 初等函数　　(D) 复合函数　【　】

6. 设函数$f(x)=\dfrac{x(e^x-1)}{e^x+1}$,则该函数是

(A) 奇函数　　(B) 单调函数　　(C) 非奇非偶函数　　(D) 偶函数　　【　】

7. 若$f(x)$是以4为周期的奇函数,且$f(-1)=-2$,则$f(5)=$

(A)2　　(B)-2　　(C)1　　(D)-1　　【　】

8. 设$f(x)=\begin{cases}x^2 & 当x\leqslant 0\\ -x^2 & 当x>0\end{cases}$的反函数是$\varphi(x)$,则$\varphi(-4)=$

(A)-2　　(B)2　　(C)16　　(D)-16　　【　】

9. 函数$f(x)=\pi+\arctan x$是

(A) 有界函数　　(B) 无界函数　　(C) 单调减函数　　(D) 周期函数　【　】

10. 下面说法正确的是

(A) 函数$y=f(x)$与$y=-f(x)$关于原点对称

(B) 函数$y=f(x)$与$y=|f(x)|$关于x轴对称

(C) 函数$y=3^x$与$y=3^{-x}$关于y轴对称

(D) 函数$y=|f(x)|$与$y=-|f(x)|$关于y轴对称　　【　】

11. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义且为奇函数,若当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)=x(x-1)$,则当$x\in(-\infty,0)$时,$f(x)=$

(A)$x(x-1)$　　(B)$x(x+1)$　　(C)$-x(x+1)$　　(D)$-x(x-1)$【　】

12. 函数 $y=\ln\tan\sqrt{1+x^2}$ 是

(A) 分段函数　　(B) 复合函数

(C) 单调函数　　(D) 基本初等函数　　【　】

自测题一

一、填空题

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则 $f\{f[f(x)]\}=$ ________.

2. 若 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，则 $f(x)=$ ________.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,3]$，则 $f(x-1)+f(x+1)$ 的定义域是________.

4. 函数 $y=\arctan(x^3)$ 的图形关于________对称.

5. 已知函数 $y=\varphi(x)$ 与函数 $y=3^{x-1}-1$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，则 $\varphi(x)=$ ________.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x & x<0\\ 2 & x\geq 0\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ________.

7. 设函数 $y=f(2^x)$ 的定义域是 $[1,2]$，则函数 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是________.

8. 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的偶函数，且 $f(-1)=7$，则 $f(7)=$ ________.

9. 函数 $y=3+\sin(\pi x)$ 的周期是________.

10. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ 1-2^x & x>0\end{cases}$ 的反函数是________.

二、单项选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ 3-x & x>1\end{cases}$，则 $f[f(\dfrac{5}{2})]=$

(A) $\dfrac{9}{2}$　　(B) $\dfrac{5}{2}$　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$　　【　】

2. 设 $g(x)=x-1$ 且 $f[g(x)]=\dfrac{x-1}{x+1}$，则 $f(\dfrac{1}{2})=$

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $-\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $-\dfrac{3}{5}$　　【　】

3. 函数 $y=\ln x^2$ 与函数 $y=2\ln x$ 表示同一个函数，则 x 应满足

(A) $-\infty<x<+\infty$　(B) $x>0$　　(C) $x\geq 0$　　(D) $x\geq 1$　　【　】

4. 下列各组函数中表示同一函数的是

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$　　(B) $f(x)=e^{\ln x}, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

(C) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$　　(D) $f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}, g(x)=\sqrt{x^2}$　　【　】

5. 下列函数中为偶函数的是

(A) $\dfrac{1}{3}(3^x-3^{-x})\sin(3x)$　　(B) $x^2+|f(x)|$，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义

(C)$\arcsin(\tan x)$　　(D)$f^2(\sin x)$　　【　】

6. 函数$f(x)=x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$的图形

(A)关于原点对称　　(B)关于y轴对称

(C)关于直线$y=x$对称　　(D)关于直线$y=0$对称　　【　】

7. 函数$f(x)=x\cos x, x\in[-\frac{\pi}{2},\pi]$是

(A)奇函数　　(B)偶函数　　(C)有界函数　　(D)单调函数　　【　】

8. 设$y=\ln x$,函数$g(x)$的反函数$g^{-1}(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$,则$f[g(x)]=$

(A)$\ln\frac{x+2}{x-2}$　　(B)$\ln\frac{x-2}{x+2}$　　(C)$\ln\frac{x+1}{x-1}$　　(D)$\ln\frac{x-1}{x+1}$　　【　】

9. 设$f(\sin\frac{x}{2})=2+\cos x$,则$f(\cos\frac{x}{2})=$

(A)$2+\cos x$　　(B)$2-\cos x$　　(C)$2+\sin x$　　(D)$2-\sin x$　　【　】

10. 函数$y=\log_4\sqrt{x}-\log_4 2$的反函数是

(A)$y=4^{x-1}$　　(B)$y=4x-1$　　(C)$y=4^{x+1}$　　(D)$y=4^{2x+1}$　　【　】

11. 函数$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$的值域是

(A)$[-1,1]$　　(B)$[-1,1)$　　(C)$(-1,1]$　　(D)$[0,1]$　　【　】

12. 已知$f(x)=\frac{6x+5}{x-1}$,则$f^{-1}(1)=$

(A)$\frac{1}{11}$　　(B)$-\frac{6}{5}$　　(C)$-\frac{5}{6}$　　(D)$\frac{6}{5}$　　【　】

13. 函数$f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)}+\arccos\frac{x-2}{3}$的连续区间是

(A)$(1,5]$　　(B)$(2,5]$　　(C)$(1,2)\cup(2,5]$　　(D)$(1,+\infty)$　　【　】

14. 设$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1-x & x\geq 0\end{cases}$,则$f(x-1)=$

(A)$\begin{cases}x & x<0\\ 2-x & x\geq 0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}1-x & x<0\\ 1+x & x\geq 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}x & x<1\\ 2-x & x\geq 1\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}1-x & x<1\\ 1+x & x\geq 1\end{cases}$　　【　】

15. 函数$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期是

(A)$\frac{\pi}{4}$　　(B)$\frac{\pi}{2}$　　(C)π　　(D)2π　　【　】

练习题一参考答案

一、填空题

1. $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$　　2. $[-a,a]$　　3. $y=4^{2x-1}$　　4. 2

5. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　　6. $\frac{1+x}{2-x}$　　7. 3　　8. $3+\cos 2x$