数学同步分层导学

九年级用

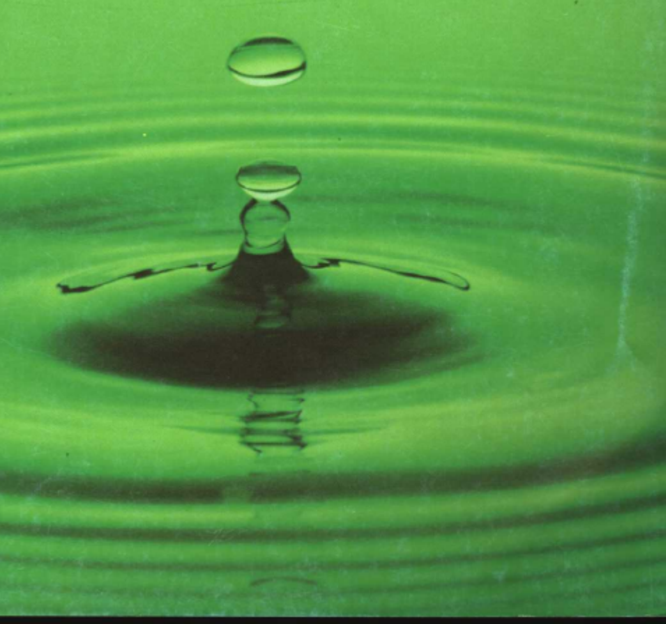
● 主编／梁志明

SHUXUE TONGBU FENCENG DAOXUE

循序渐进保持同步

先易后难合理分层

重点难点名师导学



上海科学技术出版社

主编 梁志明

数学

同步 分层 导学

（九年级用）

让你更出色

上海科学技术出版社

数学

内 容 提 要

同步分层导学丛书是与教材内容紧密配合的学生同步辅导读物，旨在同步地对课堂内容进行补充，并为学生提供训练机会. 本书是其中的一册.

本书按章编写，并将每一章内容分成若干单元，在每一单元提出学习目标，进行例题剖析并配以练习. 除个别章节外，练习分为基础型和提高型两类。书中设有章后小结及分层测试，还有阶段测试及期末测试。书末附有全部题目的参考答案。

责任编辑　卢峰　苏德敏

数学同步分层导学

（九年级用）

主编　梁志明

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行

（上海钦州南路71号　邮政编码：200235）

新华书店上海发行所经销　上海书刊印刷有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 8.25　字数 187 000

2001年6月第1版　2006年7月修订，第8次印刷

印数：50 451—51 950

ISBN 7-5323-6024-5/G·1356

定价：9.30元

出版说明

数学

这套同步分层导学丛书是以上海市现行教材为依据的学生同步辅导读物，内容紧密配合教材．各分册按年级编写，旨在同步地对课堂内容进行辅导，为学生提供训练机会，并成为课堂教学的有益的参考辅导读物．

根据数理化各学科的特点，将每章内容划分为若干单元，每一单元内设置不同的栏目，有学习目标、例题剖析、分层练习等．

学习目标　总结每单元需要掌握的知识及技巧．

例题剖析　精选了一些典型例题．通过分析、解答，使学生能够学会如何灵活运用各种解题技巧．

分层练习　对每一单元内容以试卷形式让学生进行自测训练．试卷分为基础型、提高型两级，适合不同层次的学生选用．

最后对每一章进行本章小结，旨在回顾重点、难点，解析一些侧重于整章知识的综合运用的例题，同时配有分层测试及阶段、期末测试，这些试卷增设了创新型题目，以满足部分学生的需要．

丛书紧扣教材，内容新颖；开阔学生思路，提高学生素质；让学生花最少的时间，获得最大的收益．

参加本书编写的有（按章节顺序排列）：梁志明、厉屏、施连俊、周文德、吴哲军等，本书由梁志明统稿．

上海科学技术出版社
2003 年 5 月

数学

目录

第二十八章 一元二次方程的应用

一、列出一元二次方程解应用题

学习目标

会根据题意列出一元二次方程解应用题.

明确列一元二次方程解应用题的步骤与列一元一次方程解应用题的步骤是相同的.

审题:要审清题意、明确问题中哪些是已知量、哪些是未知量,并能找出它们之间的关系.

设元:能从未知量中合理地选择一个未知量用字母表示,同时把其他未知量表示成含这一字母表示的代数式.

列方程:根据题意给出的条件找出这些量之间的等量关系、列出含有未知数的等式,即方程.

解方程:略.

检验并写答语:检验方程的解是否正确,检验方程的解是否符合应用题的实际意义.

例题剖析

例 1 一个直角三角形的三边长为三个连续整数,求这个三角形的三边长.

分析 解答此题,首先要正确理解"连续整数"这一概念,即是差为 1 的相邻的两个整数. 因本例是三个连续整数,若从小到大排列,则前后之差不仅相等,且都为 1,由此可设这三个数中任一个为 x,即有 x、$x+1$、$x+2$ 或 $x-1$、x、$x+1$ 或 $x-2$、$x-1$、x,又这三个数是一直角三角形的三边长,则满足勾股定理.

解 若设三边长为 x 和 $x+1$、$x+2$.

根据题意,得

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2.$$

整理,得

$$x^2-2x-3=0.$$

解方程,得 $x_1=3$, $x_2=-1$(不合题意,舍去).

因为 $x=3$,

所以 $x+1=4$, $x+2=5$.

则三个连续整数为 3、4、5.

答 此直角三角形三边的长分别为 3、4、5.

根据另两种设法,同学们不妨自己做一做.

例 2 某电讯器材厂生产电表. 一月份生产了 2000 个. 由于改进操作工序,第一季度共生产 7980 个,若每月增长的百分

率相同.求平均每月的增长率.

分析 请同学们思考下列问题：

(1) 此应用题属哪类类型？

(2) 第一季度三个月的月增长率是否相同？

(3) 每月的增长基数是否一样？每月的产量是否相同？

(4) 若设平均每月的增长率为 x.那么二月份和三月份的产量应如何用含 x 的代数式表示；

(5) 第一季度的总产量 7980 个可用怎样的含 x 的代数式来表示.

解 设平均每月的增长率为 x，则二月份的产量为 $2000(1+x)$，三月份的产量为 $2000(1+x)^2$，根据题意，得

$$2000+2000(1+x)+2000(1+x)^2=7980.$$

$$100x^2+300x-99=0.$$

$$(10x+33)(10x-3)=0.$$

解方程，得 $x_1=-3.3$(不合题意，舍去)， $x_2=0.3=30\%$.

答 平均每月增长率为 30%.

例 3 据调查，某地区 1997 年底人口约为 30 万，人均住房面积为 8 米^2，1998 年和 1999 年两年该地区平均每年自然减少人口 0.6 万，而 1999 年底该地区人均住房面积上升至 12 米^2，求该地区这两年住房面积的年平均增长率.

分析 根据题意，可得 1997 年底该地区的住房面积总共为 $8\times30=240$ 万米^2. 而 1999 年底该地区的住房面积总共为 $12\times(30-0.6\times2)=345.6$ 万米^2. 从 1997 年底到 1999 年底该地区住房面积呈上升趋势是由两个原因形成：一是人口自然减少，二是扩建住房.

解 设该地区这两年住房面积的年平均增长率为 x.

根据题意，得

$$30\times8\times(1+x)^2=(30-0.6\times2)\times12.$$

解方程，得 $x=0.2=20\%$.

答 该地区这两年住房面积的年平均增长率为 20%.

例 4 如图 28-1 所示，$ABCD$ 为矩形形状的拆迁地，现考虑在其内划出一矩形区域 $EFGH$ 作绿化园地．现请按下列要求和条件，设计一个可行方案．

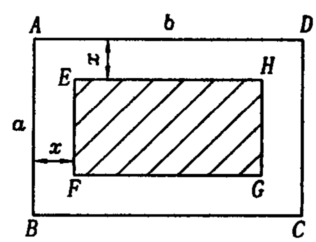


图 28-1

要求：矩形 $EFGH$ 放置在矩形 $ABCD$ 内，此两矩形四边等距离，且 $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

条件：无有刻度的尺和其他测量工具，但有足够长的绳子．

分析 本例关键确定 E、F、G、H 四点的位置，其必须符合的条件是在 $ABCD$ 四边形形内，这四点构成的图形是矩形，且其四边离 $ABCD$ 四边距离相等，又其面积是 $ABCD$ 面积的一半，困难的是无有刻度的尺和其他测量工具，仅有足够长的绳子可利用，由此可推测 E、F、G、H 四点位置的处置定与 $ABCD$ 边长有关(包括对角线)，这是唯一可利用的且用足够长的绳子可去度量的条件，问题是寻找到一种可操作的过程．

解 设 $AB=a$，$AD=b$，矩形 $ABCD$ 与 $EFGH$ 边间的距离为 x.

根据题意，有 $(a-2x)(b-2x)=\frac{1}{2}ab$.

去括号，整理成关于 x 的一元二次方程，得

$8x^2-4(a+b)x+ab=0.$

解方程，得

$$x_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{16}.$$

根据实际意义，$x=\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{4}$应舍去．(为什么？请读者思考)

$$\therefore\quad x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}.$$

x 是一个可操作的线段，即用足够长的绳子连续度量出 a、b 两边的长(即为 $a+b$)，然后减去一段 $ABCD$ 矩形的对角线 BD(或 AC)(即$\sqrt{a^2+b^2}$)，最后将余下的绳子(即 $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$)对折再对折$\left(\text{即}\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}\right)$，所得线段(绳子)为 x 的长度．这样就不难确定 E、F、G、H 的位置了．

二、二次三项式的因式分解

学习目标

会运用一元二次方程的求根公式，在实数范围内将二次三项式 ax^2+bx+c 分解因式.

若令二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的值为 0，则可得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$. 利用求根公式得两根为 x_1、x_2，则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

分解二次三项式时，应先考虑采用提取公因式法或十字相乘法、乘法公式法等方法，当使用以上方法有困难时，再用求根公式法.

若二次三项式的判别式 $\Delta<0$，则这个二次三项式在实数范围内不能分解. 一般应将各因式的首项系数化为 1，以便保持结果形式的唯一性.

本节涉及的二次三项式有三种类型：二次项系数等于 1、二次项系数不等于 1 和双字母的二次三项式.

例题剖析

例 1 分解因式：x^2-3x-1.

解 $\because$ 方程 $x^2-3x-1=0$ 的根是

$$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2},\quad x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore\quad x^2-3x-1=\left(x-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right).$$

例 2 分解因式：$4x^2+4x-1$.

解 $\because$ 方程 $4x^2+4x-1=0$ 的根是

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore\quad 4x^2+4x-1=4\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}\right).$

也可将结果写成$(2x+1+\sqrt{2})(2x+1-\sqrt{2})$.

说明　通过例1、例2可以看出利用求根公式法分解二次三项式ax^2+bx+c的步骤是：

(1) 设二次三项式ax^2+bx+c的值为0，即可得方程$ax^2+bx+c=0$；

(2) 解这个一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，得到两个根x_1、x_2；

(3) 将x_1和x_2代入$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，且又可看到：凡是二次三项式的判别式$\Delta\geqslant 0$，均可用求根公式法分解因式.

利用求根公式法分解二次三项式ax^2+bx+c时易犯的错误是：

(1) 漏写二次项系数. 如例2若写成$\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)$就错了；

(2) 易犯两次乘二次项系数. 如例2，若将4分别乘两个括号得$(4x+2+2\sqrt{2})(4x+2-2\sqrt{2})$也是错的；

(3) 若ax^2+bx+c中a、b、c有最大公约数，不可约去，不要与解一元二次方程混淆；

(4) 结果化简时，要注意符号的变化和运算正确.

例3　分解因式：$2x^2-8xy+5y^2$.

分析　这个二次三项式含有x、y两种字母，因此把它看作是关于字母x的二次三项式，或看作是关于字母y的二次三项式，前者把y看成是字母系数、后者把x看成是字母系数，然后用求根公式法进行因式分解.

解　把x看作主要字母，设$2x^2-8xy+5y^2=0$.

解方程，得

$$x_1=\frac{4+\sqrt{6}}{2}y,\quad x_2=\frac{4-\sqrt{6}}{2}y.$$

$\therefore\quad 2x^2-8xy+5y^2=2\left(x-\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}y\right)\left(x-\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}y\right).$

注意　含有两种字母的二次三项式的因式分解，要防止犯漏写字母的错误.

例4　如果关于x的方程$7x^2+px+q=0$的两个根为2和-3，分解二次三项式$7x^2+px+q$.

解　$\because\quad 7x^2+px+q=0$两根为2和$-3$.

由一元二次方程的根与系数关系知$\begin{cases}2+(-3)=-\dfrac{p}{7},\\ 2\cdot(-3)=\dfrac{q}{7}.\end{cases}$

$\therefore\quad p=7,\quad q=-42.$

$\therefore\quad 7x^2+px+q=7x^2+7x-42.$

分解二次三项式$7x^2+7x-42$，可用十字相乘法设$7x^2+7x-42=0$.

解方程，得

$$x_1=-3,\quad x_2=2.$$

$\therefore\quad 7x^2+7x-42=7(x+3)(x-2).$

分层练习

基础型

一、填空题

1. 有三个连续整数，它们的平方和为50，为求这三个数，若设这三个数分别为________，则

列出的方程是________.

2. 某矿产量平均每年增长率为 x,列出方程.

(1) 两年后产量翻一番________;

(2) 两年后的产量增加到原来的 150%________;

(3) 两年后的产量比原来增加了 150%________.

3. 等腰梯形的上底∶下底∶高=2∶4∶3,腰长 10 厘米,求上底、下底和高.设它的上底为____厘米,下底为____厘米,高为____厘米,可列出方程________.

4. 长方形铁片的四角各截去一个边长为 5 厘米的正方形,然后折起来做成一个没盖的盒子,铁片长是宽的 2 倍,做成的盒子的容积是 1.5 分米^3,若设铁片的宽为 x 厘米,则可列出方程________.

5. 某农场两年内粮食产量增加 21%,如果每年增长的百分率相同,那么每年增长的百分率为____.

6. 方程$\frac{8(x^2+2x)}{x^2-1}+\frac{3(x^2-1)}{x^2+2x}=11$,设____,则原方程可化为整式方程________.

7. 方程$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}=1$ 的解是________.

8. $x^2+\sqrt{x-8}=10$ 的解是________.

9. 方程$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-2}=4$ 的解是________.

10. 方程组$\begin{cases}x+y=-3,\\x\cdot y=-4\end{cases}$的解是________.

二、选择题

1. 已知下列四个无理方程:

$\sqrt{3x+2}=-4$, $\sqrt{x+3}+3=2$, $\sqrt{x+6}=-x$, $\sqrt{x+1}+7=0$,

有实数解的方程有( )

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

2. 若分式$\frac{x^2-2x-3}{|x|-1}$的值等于零,则 x 的取值等于( )

(A) $x=-1$. (B) $x=3$. (C) $x=3$ 或 $x=-1$. (D) $x=1$.

3. 若解分式方程$\frac{2x}{x+1}-\frac{m+1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x}$产生增根,则 m 的值是( )

(A) -1 或 -2. (B) -1 或 2. (C) 1 或 2. (D) 1 或 -2.

三、简答题

1. 解方程:$\frac{6}{x^2+x}=x^2+x+1$.

2. $\sqrt{x-3}$与 $x+1$ 互为相反数,求 x.

3. 解方程:$12x^3-7x^2-12x=0$.

4. 在实数范围内分解因式:x^4+x^2-72.

四、解方程组:$\begin{cases}2x-y=1,\\x^2+4y^2+x+3y=1.\end{cases}$

数学

五、一种球鞋，原价每双200元，经过两次降价，清仓处理价为每双112.5元，平均每次降价率是多少？

六、列方程解应用题：

正方形的铁片截去3厘米宽的一个长方形，剩下的面积是10厘米^2，求原来这块正方形铁片的面积.

数学

提高型

一、填空题

1. 利用墙的一边，再用长为13米的竹篱作三边，围成一个面积为20米^{2}的长方形，求此长方形的长和宽，则可设________，列出方程________.
2. 甲、乙两人同时同向从A地出发，步行30千米到B地，甲每小时比乙多走2千米，结果甲比乙早到30分，求甲、乙两人的速度，设甲每小时走x千米，乙每小时走________千米，列出方程是________.
3. 甲、乙两船同时从A地出发，甲以每小时35千米的速度向正南方向航行，乙以每小时比甲慢7千米的速度向正西方向航行，设x时后，两船相距90千米，则可列出方程________.
4. 一段方钢长为62.8厘米，截面是边长为12厘米的正方形，把它锻造成长为45厘米的圆柱形零件，这零件的截面半径是x厘米，则列出方程为________.
5. 方程$\frac{x+1}{x^2+2x-3}-\frac{2-2x}{x^2+x-6}+\frac{6x}{x^2-3x+2}=0$去分母后，得到的一元二次方程是________.
6. 某商品售价为7.20元，利润是成本的20%，如果把利润提高到30%，那么再要提高售价________元.
7. 当$x=$______时，$\frac{x+1}{x+2}$与$\frac{x+5}{x+3}$互为倒数.
8. 当$k=$______时，方程$\frac{x}{x-3}-4=\frac{k}{x-3}$会产生增根.
9. 方程$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x^2-4x-5}=0$的解是________.
10. 方程组$\begin{cases}\frac{1}{x}=1,\\ \frac{2}{x-y}=1\end{cases}$的解是________.

二、解下列方程

1. 解分式方程：$\frac{x-1}{x^2-8x+15}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-5}+1$.
2. 解无理方程：$4x^2-10x+\sqrt{2x^2-5x+2}-17=0$.
3. 解高次方程：$(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$.

三、简答题

1. 在实数范围内分解因式：$2x^2-2\sqrt{3}xy+y^2$.

2. m 为何值时，方程组$\begin{cases}y^2=12x,\\ y=3x+m\end{cases}$有两组相同的实数解，并求出这个方程组的解.

3. 已知：关于 x 的方程$\dfrac{(a+1)(x^2-x)}{(x^2-1)(x-4)}-\dfrac{a-1}{x^2-1}=0$的两根互为相反数，求 a 的值，并解这个方程.

四、解应用题

1. 三个连续正偶数，前两个数的平方和比后两个数的积多 4，求这三个数.
2. 某工人加工 1500 个零件后，改进了操作方法，结果工作效率提高到原来的 $2\frac{1}{2}$倍，再加工 1500 个零件，此时加工完 3000 个零件所花的时间比用改进前的方法加工(也是 3000 个零件)所花的时间提早 18 时，则前、后两种操作方法每小时分别加工多少个零件？
3. 某校组织学生去离开上海市区 64 千米的甲地旅游，旅游车上午八点正出发，在甲地停留 7 时 4 分，且于下午六点正回到学校，已知旅游车开往甲地的速度比返回学校的速度每小时快 8 千米，求汽车开往甲地的速度和返回学校的速度.
4. 某工厂今年第一季度的产值是 3365 万元．已知二月份的产值比一月份增加 10%，三月份的产值比二月份增加 15%，求这个工厂一月份的产值.

三、可以化为一元二次方程的分式方程和无理方程

学习目标

正确理解什么是分式方程：分母中含有未知数的方程叫做分式方程. 初中阶段主要要求掌握可以化为一元一次方程的分式方程和可以化为一元二次方程的分式方程. 如果去掉分母后得到的整式方程是一元二次方程，像这样的分式方程叫做可以化为一元二次方程的分式方程. 这是本单元学习和研究的重点.

分式方程的解法：

一般方法：去分母法，即化分式方程为整式方程时，可以在分式方程的两边同乘以各分母的最简公分母.

特殊方法：换元法.

解分式方程时必须验根.

正确理解什么是无理方程：根号内含有未知数的方程叫做无理方程. 初中阶段无理方程中含有未知数的二次根式不超过两个.

会用在方程两边平方的方法，解可以化为一元一次方程或一元二次方程的无理方程，并会验根. 会用换元法，把某些较特殊的无理方程化为有理方程(整式方程和分式方程统称为有理方程).

会列出分式方程解应用题.

* 简单的高次方程

例题剖析

例 1 解方程：$\frac{x}{x-2}-\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2}{x-3}$.

分析 这个分式方程有三个分式.因此需要准确地找到代数式 $x-2$、x^2-5x+6、$x-3$ 的最小公倍式（即最简公分母），这个最小公倍式是 $(x-3)(x-2)$.

解 方程两边同乘以 $(x-3)(x-2)$，得

$$(x-3)x-(x-1)=(x-2)\cdot 2,$$

即 $$x^2-6x+5=0.$$

解方程，得 $x_1=5$，$x_2=1$.

检验：当 $x_1=5$ 时，$x-2=3\neq 0$，$x^2-5x+6=6\neq 0$，$x-3=2\neq 0$；

当 $x_2=1$ 时，$x-2=-1\neq 0$，$x^2-5x+6=2\neq 0$，$x-3=-2\neq 0$.

所以，原方程的根是 $x_1=5$，$x_2=1$.

说明 如果分式方程只含有一个分母，那么只需方程两边同乘以作分母的那个代数式，即可将分式方程转化为整式方程.如果分式方程有两个分式，那么须找出分母的最小公倍式.

例 2 解方程：(1) $\frac{x^2+2}{x}+\frac{6x}{x^2+2}=5$；

(2) $2x^2+4x+5+\frac{1}{x^2+2x+2}=4$.

分析 本例方程虽然只含有一个或两个分式，倘若采用两边同乘以一个最小公倍式的方法去分母转化为整式方程，则会出现一元四次方程，求解不便或麻烦.若仔细观察方程的结构，可发现前者两个分式有互为倒数的形式，后者的整式部分可转化为与分式的分母相同的形式，因此可采用换元法解这两个方程较为简便.

解 (1) $\frac{x^2+2}{x}+\frac{6x}{x^2+2}=5$，

设 $\frac{x^2+2}{x}=y$，则 $\frac{6x}{x^2+2}=6\cdot\frac{1}{y}$.原方程可化为

$$y+6\cdot\frac{1}{y}=5.$$

整理，得

$y^2-5y+6=0$.

解方程，得

$y_1=2$，$y_2=3$.

当 $y=2$ 时，$\frac{x^2+2}{x}=2$.

整理，得 $x^2-2x+2=0$.

因为 $\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4<0$，所以此方程无实数根.

当 $y=3$ 时，$\frac{x^2+2}{x}=3$.

整理，得 $x^2-3x+2=0$.

解方程，得

$x_1=1,\quad x_2=2.$

经检验：$x=1$、$x=2$ 都是原方程的根；

(2) $2x^2+4x+5+\dfrac{1}{x^2+2x+2}=4.$

先将原方程整理成 $2x^2+4x+1+\dfrac{1}{x^2+2x+2}=0$. 由方程结构的特点，作适当变形：

$2(x^2+2x+2)+\dfrac{1}{x^2+2x+2}-3=0.$

设 $x^2+2x+2=y$. 上述方程可化为

$$2y+\frac{1}{y}-3=0.$$

整理，得

$$2y^2-3y+1=0.$$

解方程，得

$$y_1=\frac{1}{2},\quad y_2=1.$$

当 $y=\dfrac{1}{2}$时，$x^2+2x+2=\dfrac{1}{2}$，整理，得 $2x^2+4x+3=0.$

因为 $\Delta=4^2-4\times2\times3=-8<0$，所以此方程无实数根.

当 $y=1$ 时，$x^2+2x+2=1$，整理，得 $x^2+2x+1=0.$

解方程，得

$$x_1=x_2=-1.$$

经检验：$x_1=x_2=-1$ 是原方程的根.

想一想：解方程：$2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$. 这个方程有什么特点？如何利用这个特点？若利用换元法. 设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，那么 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$能否表示成 y^2？应怎样将 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$转化成用 $x+\dfrac{1}{x}$表示的式子？

例 3 解方程：$\dfrac{2x^2+3x+2}{2x^2-3x-2}=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+5x-3}$.

分析 本题可用解分式方程的一般方法，即去分母转化整式方程解，但过程较烦．通过观察，从方程的结构看不仅是一个比例形式，且左右两端的分子分母的后两项分别成相反数关系，则可考虑或用“合比”性质或用参数法解．

解 利用“比例”中的合比性质，得

$$\frac{(2x^2+3x+2)+(2x^2-3x-2)}{2x^2-3x-2}=\frac{(2x^2-5x+3)+(2x^2+5x-3)}{2x^2+5x-3},$$

化简，得$\dfrac{4x^2}{2x^2-3x-2}=\dfrac{4x^2}{2x^2+5x-3}$，

解方程，得 $4x^2=0$，$2x^2-3x-2=2x^2+5x-3$，

得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{1}{8}$.

检验：把 $x_1=0$ 代入原方程左右两端，得左右两端相等．

把 $x_2=\dfrac{1}{8}$也有同上结果．

所以 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{1}{8}$是方程的根．

说明 本例也可设$\dfrac{2x^2+3x+2}{2x^2-3x-2}=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+5x-3}=k$得方程组$\begin{cases}2x^2+3x+2=2kx^2-3kx-2k,\\2x^2-5x+3=2kx^2+5kx-3k.\end{cases}$这是一个以 x、k 为未知数的二元二次方程组，此方程组的解法在以后学了二元二次方程组的解法后即可解决．

例 4 解方程：$\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$.

分析 含有一个根式的无理方程，则将这个根式留在等号的一边，把不含根式的其他项全部移到等号的另一边，再将方程两边同时平方．如 $\sqrt{x-5}+x=2$，可转化为：$\sqrt{x-5}=2-x$，再两边同时平方，即可解得 x 的值. 同样，这种思想方法也适用于含有两个根式的方程. 如本例，只要将 $-\sqrt{x+3}$移到等号的右边，经过方程两边同时平方运算，即可化去一个根式，然后再按只含一个根式的无理方程解法继续运算.

解 $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$.

移项，得 $\sqrt{5x+4}=1+\sqrt{x+3}$.

两边平方，得

$$5x+4=1+x+3+2\sqrt{x+3}.$$

化简，得

$$4x=2\sqrt{x+3},\quad 2x=\sqrt{x+3}.$$

两边平方，得

$$4x^2=x+3,$$

解方程，得 $x_1=-\dfrac{3}{4}$， $x_2=1$.

检验：把 $x_1=-\dfrac{3}{4}$代入原方程左端，得

$$\sqrt{5\times\left(-\frac{3}{4}\right)+4}-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)+3}.$$

通过运算得-1，因方程右端的值为 1，所以$-\dfrac{3}{4}$不是方程的根，应舍去.

把 $x_2=1$，代入原方程左端，得

$$\sqrt{5\times1+4}-\sqrt{1+3}=-1.$$

所以等号左右两边的值相等，则 $x=1$ 是方程的根.

说明 解无理方程时，一般采用在方程两边同次乘方的方法，这样可能会扩大方程中的未知数的取值范围，有可能产生增根，所以解得的根必须代入原方程加以检验.

解无理方程时，也可采用列辅助方程法，如本例可设 $\sqrt{5x+4}+\sqrt{x+3}=y$，与原方程联立求出 y，从而得解，即

$$\begin{cases}\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1, & ①\\ \sqrt{5x+4}+\sqrt{x+3}=y. & ②\end{cases}$$

①×②，得 $5x+4-x-3=y$.

所以 $4x+1=y$， 则

$$\begin{cases}\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1, & ①\\ \sqrt{5x+4}+\sqrt{x+3}=4x+1. & ③\end{cases}$$

③－①，得

$2\sqrt{x+3}=4x$，　$\sqrt{x+3}=2x$.

两边平方，得　$x+3=4x^2$，　$4x^2-x-3=0$. 以下解法同上. 这种列辅助方程法较为简单.

例 5　解方程：$4x^2-10x+\sqrt{2x^2-5x+2}=17$.

分析　方程虽然只含一个根式. 但若用两边平方的方法来转化，则会出现一个一元四次方程. 观察方程结构特征，可用换元法来解.

解　原方程可表示成：$4x^2-10x+\sqrt{2x^2-5x+2}-17=0$. 我们可注意到"$\sqrt{\quad}$"下的被开方式 $2x^2-5x+2$ 中 x^2 与 x 的系数与 $4x^2-10x$ 的系数对应成比例，故可令 $\sqrt{2x^2-5x+2}=y$，则原方程转化成 $2y^2+y-21=0$.

解方程，得　$y_1=-\dfrac{7}{2}$，　$y_2=3$.

显然，当 $y=-\dfrac{7}{2}$ 时，　$\sqrt{2x^2-5x+2}=-\dfrac{7}{2}$，方程无实数根.

当 $y=3$ 时，有 $\sqrt{2x^2-5x+2}=3$.

两边平方，得

$$2x^2-5x+2=9,\quad 2x^2-5x-7=0.$$

解方程，得　$x_1=\dfrac{7}{2}$，　$x_2=-1$.

检验：把 $x_1=\dfrac{7}{2}$、$x_2=-1$ 代入原方程，左、右两端值相等，因此　$x_1=\dfrac{7}{2}$，　$x_2=-1$ 是原方程的根.

说明　解无理方程过程中，因采用了化去根号的方法，有时会产生不适合原方程的根，即为增根，必须舍去.

换元法的基本思路是通过"变换"，实现"转化"的思想，使问题化繁为简、化难为易，以实现从未知向已知的转化从而达到解决问题的目的.

换元法的关键是构造"元"，要注意选取新元的正确性、合理性.

学习、研究"简单的高次方程"应掌握以下两个方面：

(1) 会正确理解"一元高次方程"的定义：方程中只含有一个未知数，且未知数的最高次数大于 2，这样的方程为限于初中阶段学习的高次方程；

(2) 掌握解一元高次方程的基本思想是降次，而降次的基本方法是因式分解法或换元法.

例 6　解方程：$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

分析　显然，这个方程是以 x 为未知数的最高次数为 4 次的一元四次方程，将两个二次三项式相乘、展开不是解题的上策. 由题目特点，可设 $y=x^2+x+1$，则 $x^2+x+2=y+1$.

解　设 $y=x^2+x+1$，　$y+1=x^2+x+2$.

原方程化为　$y(y+1)=12$，　即 $y^2+y-12=0$.

解方程，得

$$y_1=-4,\quad y_2=3.$$

当 $y=-4$ 时，得以 x 为未知数的一元二次方程

$$x^2+x+1=-4,\quad x^2+x+5=0. \qquad ①$$

因 $\Delta=1^2-4\times1\times5=-19<0$，原方程无实数根.

当 $y=3$ 时，得以 x 为未知数的一元二次方程