面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

下册 第二版

宣立新 主 编
成和平 副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

下册 第二版

宣立新 主 编
成和平 副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书第一版是教育部面向21世纪课程教材，2002年获得教育部颁布的全国普通高等学校优秀教材一等奖。本次修订版是按宣立新教授主持的教育部《新世纪高职高专高等数学教学内容、体系改革的研究与实践》课题的研究成果，在原教材的基础上修订的全国通用教材。

本书汲取了全国高职高专教育十多年来高等数学教学改革的经验，突出以应用为目的，以高等职业教育为出发点，充分考虑高等教育大众化的新形势，采用必学与选学相结合的方式，兼顾高职高专不同类型的学校、不同程度的学生进行修订的。全书分上、下两册出版，上册内容为函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、定积分与不定积分、定积分的应用。书末附有一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、积分表和习题解答。

本书说理浅显，便于教、便于学，可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育理工类各专业的教材，也可作为科技、工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 宣立新主编. —2版. —北京：高等教育出版社，2005.12

ISBN 7-04-018127-4

Ⅰ. 高... Ⅱ. 宣... Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第136065号

策划编辑 罗德春 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 吴文信
版式设计 王艳红 **责任校对** 俞声佳 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　次	2001年1月第1版
开　本	787×1092 1/16		2005年12月第2版
印　张	10	**印　次**	2005年12月第1次印刷
字　数	240 000	**定　价**	16.90元

物料号 18127-00

郑重声明

目　录

第六章　常微分方程 …… 1
第一节　微分方程的基本概念 …… 1
一、实例 …… 1
二、有关概念 …… 2
习题 6 - 1 …… 3
第二节　一阶微分方程 …… 4
一、可分离变量的一阶微分方程 …… 4
二、一阶线性微分方程 …… 6
习题 6 - 2 …… 8
第三节　一阶微分方程的应用举例 …… 9
习题 6 - 3 …… 11
第四节　可降阶的高阶微分方程 …… 11
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 11
二、$y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 11
三、$y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 12
习题 6 - 4 …… 13
第五节　二阶线性微分方程解的结构 …… 14
一、二阶线性齐次微分方程解的结构 …… 14
二、二阶线性非齐次微分方程解的结构 …… 15
习题 6 - 5 …… 16
第六节　二阶常系数线性微分方程 …… 16
一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法 …… 16
二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 …… 18
习题 6 - 6 …… 21
第七节　二阶微分方程的应用举例 …… 21
习题 6 - 7 …… 24
*第八节　综合例题 …… 24
习题 6 - 8 …… 26
第七章　向量代数与空间解析几何 …… 27
第一节　空间直角坐标系和向量的基本知识 …… 27
一、空间直角坐标系 …… 27
二、空间两点间的距离公式 …… 28
三、向量的基础知识 …… 29
四、向量的坐标 …… 29
习题 7 - 1 …… 31
第二节　向量的数量积与向量积 …… 32
一、向量的数量积 …… 32
二、向量的向量积 …… 33
习题 7 - 2 …… 35
第三节　平面、空间直线的方程 …… 36
一、平面的方程 …… 36
二、空间直线的方程 …… 39
习题 7 - 3 …… 40
第四节　曲面、空间曲线的方程 …… 41
一、曲面及其方程 …… 41
二、空间曲线及其方程 …… 44
三、空间曲线在坐标面上的投影 …… 45
四、常见的二次曲面及其方程 …… 46
习题 7 - 4 …… 48
*第五节　综合例题 …… 49
习题 7 - 5 …… 50
第八章　多元函数微积分学 …… 51
第一节　多元函数的基本概念、极限和连续性 …… 51
一、多元函数的概念 …… 51
二、多元函数的极限 …… 54
三、多元函数的连续性 …… 55
习题 8 - 1 …… 56
第二节　偏导数 …… 56
一、偏导数的概念及其计算 …… 56
二、高阶偏导数 …… 58
习题 8 - 2 …… 60
第三节　全微分 …… 60
习题 8 - 3 …… 62
第四节　多元复合函数与隐函数的微分法 …… 62

一、多元复合函数的求导法则 …… 62
二、隐函数的求导公式 …… 64
习题 8－4 …… 65
*第五节　方向导数与梯度 …… 66
一、方向导数 …… 66
二、梯度 …… 67
习题 8－5 …… 67
第六节　偏导数的几何应用 …… 68
一、曲线的切线和法平面 …… 68
二、曲面的切平面与法线 …… 69
习题 8－6 …… 70
第七节　多元函数的极值和最值 …… 71
一、多元函数的极值 …… 71
二、多元函数的最值 …… 73
三、条件极值 …… 73
习题 8－7 …… 74
第八节　二重积分的概念与性质 …… 75
一、平面薄板的质量 …… 75
二、二重积分的概念 …… 75
三、二重积分的性质 …… 76
四、二重积分的几何意义 …… 77
第九节　二重积分的计算 …… 77
一、二重积分在直角坐标系下的计算 …… 77
二、二重积分在极坐标系下的计算 …… 81
习题 8－9 …… 83
第十节　二重积分的应用 …… 84
一、二重积分在几何上的应用 …… 84
二、二重积分在物理上的应用 …… 86
习题 8－10 …… 89
*第十一节　综合例题 …… 89
习题 8－11 …… 92
第九章　无穷级数 …… 94
第一节　数项级数 …… 94
一、数项级数的基本概念 …… 94
二、数项级数的基本性质 …… 96
习题 9－1 …… 97
第二节　数项级数的审敛法 …… 98
一、正项级数及其审敛法 …… 98
二、交错级数及其审敛法 …… 101
三、绝对收敛与条件收敛 …… 102
习题 9－2 …… 103
第三节　幂级数 …… 104
一、函数项级数的概念 …… 104
二、幂级数及其收敛性 …… 104
三、幂级数的运算 …… 107
习题 9－3 …… 107
第四节　函数展开成幂级数 …… 107
一、泰勒公式与泰勒级数 …… 107
二、函数展开成幂级数的方法 …… 109
习题 9－4 …… 113
*第五节　以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数 …… 113
一、三角函数系的正交性 …… 114
二、周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数 …… 114
三、定义在 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,\pi]$ 上的函数展开成傅里叶级数 …… 118
习题 9－5 …… 120
*第六节　以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数 …… 120
习题 9－6 …… 123
*第七节　综合例题 …… 123
习题 9－7 …… 125
*第十章　Mathematica 软件包在高等数学中的应用简介 …… 126
第一节　Mathematica 的基本知识 …… 126
一、Mathematica 的基本操作 …… 126
二、Mathematica 使用初步 …… 128
第二节　用 Mathematica 做高等数学 …… 131
一、极限运算 …… 131
二、导数、偏导数运算 …… 132
三、积分运算 …… 136
四、求微分方程的解 …… 138
五、级数运算 …… 138
习题 10－2 …… 139
习题答案 …… 141
参考书目 …… 152

第六章

常微分方程

在科学研究和生产实践中,常常需要寻求表示客观事物的变量之间的函数关系,但经常不能直接得到所求的函数关系,只能得到含有未知函数的导数或微分的关系式,即通常所说的微分方程.因此微分方程是描述客观事物数量关系的一种重要的数学模型.本章主要介绍微分方程的基本概念和几种常用的微分方程的解法.

第一节　微分方程的基本概念

一、实例

例 1　一曲线过点(0,1),曲线上各点处的切线斜率等于该点横坐标的平方,求此曲线方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=f(x)$,$M(x,y)$ 为曲线上的任意点,在该点曲线的切线的斜率为 y',依题意有:

$$y'=x^2, \tag{1}$$

两边积分,得

$$y=\frac{1}{3}x^3+C. \tag{2}$$

上式表示的是曲线上任意一点的切线的斜率为 x^2 的所有曲线.但要求的是过点(0,1)的曲线,即

$$x=0 \text{ 时}, y=1, \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式,得 $C=1$,所以

$$y=\frac{1}{3}x^3+1 \tag{4}$$

为所求的曲线方程.

例 2　以初速度 v_0 垂直下抛一物体,设该物体运动只受重力影响,试求物体下落距离 s 与时间 t 的函数关系.

解　如图 6-1,设物体的质量为 m,由于下抛后只受重力作用,故物体所受之力为

$$F=mg,$$

又根据牛顿第二定律 $F=ma$ 及加速度 $a=\frac{d^2s}{dt^2}$,所以

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg,$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g, \tag{5}$$

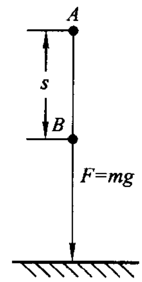

图 6－1

对(5)式两端积分得 $\frac{ds}{dt}=gt+C_1$, (6)

对(6)式两端再积分,得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{7}$$

这里 C_1,C_2 都是任意常数.

由题意知 $t=0$ 时,$s=0,v=\frac{ds}{dt}=v_0$. (8)

把(8)式分别代入(6)式,(7)式,得 $C_1=v_0,C_2=0$. 故(7)式为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t. \tag{9}$$

这就是初速度为 v_0 的物体垂直下抛时距离 s 与时间 t 之间的函数关系.

二、有关概念

定义 1 凡表示未知函数,未知函数的导数或微分之间的关系的方程称为微分方程.

由定义 1,(1)式、(5)式都是微分方程,此外 $y'+xy^2=0, x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$, $y''+2y'+y=3x^2+1$ 等等也都是微分方程.

未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程. 本书只讨论一些常微分方程及其解法.

微分方程中出现的未知函数各阶导数的最高阶数称为微分方程的阶. 如 $y'=x^2, y'+xy^2=0$, $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$ 都是一阶微分方程;$\frac{d^2s}{dt^2}=g, y''+2y'+y=3x^2+1$ 都是二阶微分方程;$y^{(4)}+4y'+4y=xe^x$ 是四阶微分方程,等等. 二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程.

定义 2 如果某个函数代入微分方程,能使该方程成为恒等式,则称这个函数为该微分方程的解.

例如,(2)式和(4)式表示的函数都是方程(1)的解,(7)式和(9)式表示的函数都是方程(5)的解.

在介绍微分方程的通解前,先给出独立的任意常数的概念. 含有几个任意常数的表达式,如果它们不能合并而使得任意常数的个数减少,则称这表达式中的几个任意常数相互独立. 如 $y=C_1x+C_2x+1$ 与 $y=Cx+1$(C_1,C_2,C 都是任意常数)表示的函数族是相同的,因此 $y=C_1x+C_2x+1$ 中的 C_1,C_2 是不独立的;而(7)式 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中的任意常数 C_1,C_2 是不能合并的,即 C_1,C_2 是相互独立的.

微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解

称为微分方程的通解或一般解. 由于方程(5)是二阶的,且(7)式中有两个独立的任意常数,因此(7)式是方程(5)的通解. 同理(2)式是方程(1)的通解.

由于通解中含有任意常数,它还不完全确定. 要完全确定地反映客观事物的规律,必须根据具体问题给定的条件,从通解中确定任意常数的值,得到微分方程不含任意常数的解. 这种不含任意常数的解称为微分方程的特解. 如(4)式是方程(1)的特解,(9)式是方程(5)的特解.

用来确定特解的条件称为定解条件,其中由未知函数或其导数取给定值的条件又称为初值条件. 如(3)式,(8)式分别为方程(1)和方程(5)的初值条件. 本章讨论的一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ ($f(x,y)$ 表示 x,y 的关系式),它的定解条件通常是 $x=x_0$ 时,$y=y_0$,或写成 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$;二阶微分方程 $y''=f(x,y,y')$ 的定解条件通常是 $x=x_0$ 时,$y=y_0$,$y'=y'_0$ 或写成 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$,$y'\Big|_{x=x_0}=y'_0$.

微分方程特解的图形是一条曲线,称为微分方程的积分曲线. 通解的图形是一族积分曲线.

如例 1 中(2)式的图形是以常数 C 为参数的立方抛物线族,如图 6-2 所示. 而特解(4)式的图形是表示过点(0,1)的一条立方抛物线.

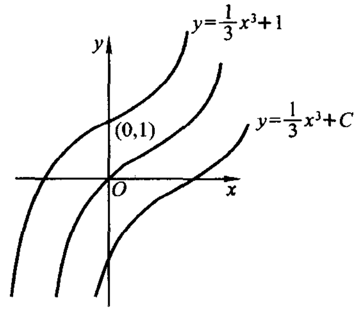

图 6-2

例 3　验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解　因为

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x,$$
$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x,$$

把 y 和 y'' 代入微分方程左端得

$$y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x\equiv 0,$$

又 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 中有两个独立的任意常数,方程 $y''+y=0$ 是二阶的,所以 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是该微分方程的通解.

习　题　6-1

1. 指出下列各微分方程的阶数:

(1) $x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$;　　(2) $(y')^2+y=0$;

(3) $xy'''-y'+x=0$;　　(4) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{t}=0$;

(5) $y''y'+x^2y'+y=1$.

2. 验证下列各题中所给的函数或隐函数是否为所给微分方程的解? 若是,指出是通解还是特解? 其中 C_1,C_2,均为任意常数:

(1) $y=\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{1}{3}$,　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=1$;

(2) $y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$,　$y''-2y'+y=0$;

(3) $x^2-xy+y^2=0$,　$(x-2y)y'=2x-y$;

(4) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{e}^{-2x}$,　$y''+3y'+2y=x\mathrm{e}^{-2x}$.

3. 验证函数 $y=Ce^{-x}+x-1$ 是微分方程 $y'+y=x$ 的通解,并求满足初值条件 $y\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

4. 验证 $e^y+C_1=(x+C_2)^2$ 是微分方程 $y''+(y')^2=2e^{-y}$ 的通解,并求满足初值条件 $y\Big|_{x=0}=0, y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解.

5. 设有一质量为 m 的质点作直线运动,假定有一个和时间成正比的拉力作用在它的上面,同时质点又受到与速度成正比的阻力,试求速度随时间变化的微分方程.

第二节 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$y'=F(x,y). \tag{1}$$

下面介绍几种常用的一阶微分方程的基本类型及其解法.

一、可分离变量的一阶微分方程

如果一阶微分方程(1)式可以化为形如

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

的形式,则称(1)式为可分离变量的微分方程.

这类方程的特点是:方程经过适当变形,可以将含有同一变量的函数与微分分离到等式的同一端.这类方程的具体解法为:

(1) 分离变量,将方程变形成(2)式的形式,

(2) 可以证明(2)式两边分别对各自的变量积分

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

得方程的通解 $$G(y)=F(x)+C,$$

其中 $G(y),F(x)$ 分别是 $g(y),f(x)$ 的一个原函数.

例 1 求微分方程 $y'-e^y\sin x=0$ 的通解.

解 将方程分离变量,得 $$e^{-y}\mathrm{d}y=\sin x\mathrm{d}x,$$

两边积分 $$\int e^{-y}\mathrm{d}y=\int \sin x\mathrm{d}x,$$

得方程的通解 $$\cos x-e^{-y}=C.$$

这个通解是以隐函数形式给出的,也可以显化为 $y=-\ln(\cos x-C)$.

例 2 求微分方程 $xy\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 将方程分离变量,有 $$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

两边积分得 $$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|x-1|+C_1,$$

$$|y^2-1|=(x-1)^2e^{2C_1},$$

$$y^2-1=\pm e^{2C_1}(x-1)^2,$$

因为 $\pm e^{2C_1}$ 是不为零的任意常数，把它记作 C，便得到方程的通解

$$y^2-1=C(x-1)^2. \tag{3}$$

可以验证 $C=0$ 时，$y=\pm 1$，它们也是原方程的解，因此(3)式中的 C 可设为任意常数.

解方程中，如果积分后出现对数，理应都需作类似上述的讨论. 为方便起见，例 2 可作如下简化处理：

分离变量后得，
$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x-1},$$
两边积分得
$$\ln(y^2-1)=\ln(x-1)^2+\ln C,$$
故通解为
$$y^2-1=C(x-1)^2,$$
其中 C 为任意常数.

例 3　求微分方程 $(1+e^x)yy'=e^x$ 满足初值条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解.

解　方程变形后分离变量得
$$y\mathrm{d}y=\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$$
两边积分得方程通解
$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C,$$
由初值条件 $y\big|_{x=0}=1$，得
$$C=\frac{1}{2}-\ln 2,$$
故所求特解为
$$y^2=2\ln(1+e^x)+1-2\ln 2.$$

有的微分方程不是可分离变量的，但通过适当的变换，使新变量是可分离变量的方程，然后再用以上的方法求解这些方程.

下面介绍一种可化为可分离变量的一阶微分方程.

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$
的微分方程称为齐次方程. 引进新的未知函数 u，令 $u=\frac{y}{x}$，

则
$$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$
代入方程(4)，得
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$
分离变量，得
$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$
两端分别积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得到方程(4)的通解.

例 4　求微分方程 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$ 的通解.

解　将方程变形为齐次方程的形式
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right),$$
令 $u=\frac{y}{x}$，则方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln u),$$

分离变量后,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\ln\ln u=\ln x+\ln C,$$

即
$$\ln u=Cx,\quad u=\mathrm{e}^{Cx}.$$

以 $u=\frac{y}{x}$ 代回,得通解
$$y=x\mathrm{e}^{Cx}.$$

二、一阶线性微分方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{5}$$
的方程(其中 $P(x)$,$Q(x)$是 x 的已知函数),称为一阶线性微分方程,$Q(x)$称为自由项.

如果 $Q(x)\equiv0$,方程(5)变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0. \tag{6}$$

方程(6)称为一阶线性齐次微分方程;如果 $Q(x)$不恒为零时,方程(5)称为一阶线性非齐次微分方程,并称方程(6)为对应于线性非齐次微分方程(5)的线性齐次微分方程.

一阶线性齐次微分方程(6)是可分离变量的方程,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

故
$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{7}$$

(7)式是线性齐次微分方程(6)的通解. 为了书写方便,约定以后不定积分符号只表示被积函数的一个原函数,如符号 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 是 $P(x)$的一个原函数.

比较(5)、(6)两个方程可以设想方程(5)的解具有

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{8}$$

的形式,其中 $C(x)$是待定的函数.

要使(8)式是方程(5)的解,将(8)式代入方程(5),得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即
$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分,得
$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

因此,线性非齐次微分方程(5)的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]. \tag{9}$$

这种把对应的齐次方程通解中的常数 C 变换为待定函数 $C(x)$，然后求得线性非齐次方程的通解(9)的方法，称为常数变易法.

将(9)式改写成两项之和

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

不难看出，上式右端第一项是对应的线性齐次方程(6)的通解，第二项是线性非齐次方程(5)的一个特解(在方程(5)的通解(9)中取 $C=0$，便得到这个特解). 由此可见，一阶线性非齐次方程的通解等于对应的线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和.

例 5　求微分方程 $(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$ 的通解.

解 1　原方程即

$$y' + (\tan x)y = \sec x.$$

用常数变易法.

先求 $y' + (\tan x)y = 0$ 的通解. 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = -\tan x dx,$$

两边积分，得

$$\ln y = \ln\cos x + \ln C_1,$$

故

$$y = C_1\cos x.$$

变换常数 C_1，令 $y = C(x)\cos x$，则

$$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x,$$

把 y, y' 代入原方程，得

$$[C'(x)\cos x - C(x)\sin x] + C(x)\cos x\tan x = \sec x,$$

整理得

$$C'(x) = \sec^2 x,$$

于是

$$C(x) = \tan x + C.$$

把 $C(x) = \tan x + C$ 代入 $y = C(x)\cos x$ 中，得到该非齐次方程的通解

$$y = (\tan x + C)\cos x.$$

解 2　利用通解公式(9)求解，这时必须把方程化成(5)式的形式. 有 $P(x) = \tan x$，$Q(x) = \sec x$，故

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] = e^{-\int\tan xdx}\left[\int\sec xe^{\int\tan xdx}dx + C\right]$$

$$= e^{\ln\cos x}\left[\int\sec xe^{-\ln\cos x}dx + C\right] = \cos x\left[\int\sec^2 xdx + C\right] = (\tan x + C)\cos x.$$

例 6　求微分方程 $x^2dy + (2xy - x + 1)dx = 0$ 满足初值条件 $y\Big|_{x=1} = 0$ 的特解.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{x-1}{x^2},$$

这是一个一阶线性非齐次方程，先求相应的齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$$

的通解,用分离变量法得
$$y=\frac{C}{x^2},$$
令 $y=\frac{C(x)}{x^2}$,有
$$y'=\frac{C'(x)}{x^2}-\frac{2C(x)}{x^3},$$
把 y 和 y' 代入原方程,并化简得
$$C'(x)=x-1,$$
两端积分得
$$C(x)=\frac{1}{2}x^2-x+C,$$
所以原方程的通解为
$$y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+C\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2},$$
把初值条件 $y\big|_{x=1}=0$,代入上式,得 $C=\frac{1}{2}$,

故所求方程的特解为
$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}.$$

习 题 6-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $(1+x^2)y'=\arctan x$;

(2) $(xy+x^3y)\mathrm{d}y=(1+y^2)\mathrm{d}x$;

(3) $yy'-\mathrm{e}^{y^2+3x}=0$;

(4) $\sin x\mathrm{d}y=2y\cos x\mathrm{d}x$;

(5) $(x+1)y'+1=2\mathrm{e}^{-y}$;

(6) $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$;

(7) $y^2\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y=0$.

2. 求满足下列初值条件的微分方程的特解:

(1) $y-xy'=b(1-x^2y')$, $y\big|_{x=1}=1$;

(2) $y\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{d}y$, $y\big|_{x=2}=1$;

(3) $\sec^2x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2y\tan x\mathrm{d}y=0$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

3. 求下列一阶线性微分方程的通解:

(1) $y'-2xy=\mathrm{e}^{x^2}\cos x$;

(2) $xy'=y+\frac{x}{\ln x}$;

(3) $xy'+y=\mathrm{e}^x$;

(4) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

(5) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

4. 求下列微分方程满足初值条件的特解:

(1) $2y'+y=3$, $y\big|_{x=0}=10$;

(2) $xy'-y=2$, $y\big|_{x=1}=3$;

(3) $(t+1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=2\mathrm{e}^{-t}$, $x\big|_{t=1}=0$;

(4) $\cos x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\sin x=\cos^2x$, $y\big|_{x=\pi}=1$;

(5) $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}$, $i\big|_{t=0}=0$.

第三节　一阶微分方程的应用举例

前两节讨论了几种常用的一阶微分方程的解法，本节举例说明一阶微分方程在几何、物理等方面的一些应用.

建立微分方程解决实际问题，首先要把语言描述的事物间的关系，通过建立坐标系，选择自变量和因变量，明确该问题中未知函数导数的实际意义，运用有关学科的基本知识（常借助于已知的几何、物理定律），转化为含有未知函数的导数的等量关系，即微分方程. 如果在实际问题中，还有一些特定的条件或具有初始状态，这是确定特解的定解条件. 这在建立微分方程时是不可缺少的一步，下面通过例题加以说明.

例 1　光滑曲线 L 上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线垂直于该点与原点的连线，求曲线 L 的方程.

解　设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，如图 6－3 所示，L 在点 $M(x,y)$ 处的切线 MT 的斜率为$\frac{dy}{dx}$，OM 的斜率为$\frac{y}{x}$，由于 $OM \perp MT$ 得微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

分离变量并积分得

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

化简得通解

$$x^2+y^2=C.$$

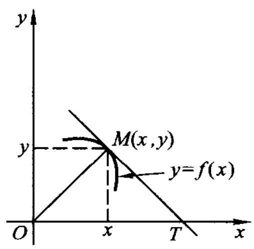

图 6－3

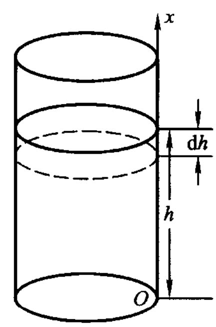

图 6－4

例 2　一直立圆柱形贮水器直径为 4 m，高为 6 m，里面装满水. 在容器的底部有一个半径为 $\frac{1}{12}$ m 的孔，已知水自小孔流出的速度为 $0.6\sqrt{2gh}$(m/s)，h 为小孔距水面的距离，问需要多少时间容器中的水经小孔流完（图 6－4）.

解　设在时刻 t 水面离容器底部的距离为 h，先求 h 和 t 的函数关系.

从 t 到 $t+dt$ 这小段时间里容器中水的体积的改变量为 $\pi 2^2 dh$（dh 为 dt 时间间隔内的水面高度微元）这段时间内经小孔流出的水的体积微元

$$\mathrm{d}V=0.6\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\sqrt{2gh}\mathrm{d}t,$$

从而

$$-\pi 2^2\mathrm{d}h=0.6\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\sqrt{2gh}\mathrm{d}t,$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-0.0046\sqrt{h},$$

分离变量积分得

$$2\sqrt{h}=-0.0046t+C,$$

由题意得 $h\Big|_{t=0}=6$，代入上式得 $C=4.9$，上式即

$$2\sqrt{h}=-0.0046t+4.9,$$

令 $h=0$ 得 $t=1\,065(\mathrm{s})=17.75(\mathrm{min})$，即水全部由容器流完需要 17.75min.

例 3 在串联电路中，设有电阻 R，电感 L 和电动势 $E=E_0\sin\omega t$（E_0、ω 为常数）. 在时刻 $t=0$ 时接通电路，求电流 i 与时间 t 的关系（图 6－5）.

解 由电学知，电阻 R 上的电压降 $U_R=Ri$，电感 L 上的电压降 $U_L=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. 由回路电压定律，闭合电路中电动势等于电路上电压降的总和

$$U_L+U_R=E,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t,$$

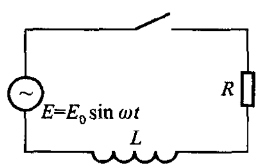

图 6－5

由一阶线性非齐次微分方程的通解公式

$$\begin{aligned}i(t)&=\mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\left(\int\frac{E_0}{L}\sin\omega t\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)\\&=\frac{E_0}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\mathrm{d}t\right)+C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},\end{aligned}$$

利用分部积分法，得

$$i(t)=\frac{E_0}{L}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t-\frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right)+C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

由初值条件 $i(0)=0$，有

$$C=\frac{E_0\omega L}{\omega^2L^2+R^2}.$$

故

$$i(t)=\frac{E_0}{\omega^2L^2+R^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega L\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}).$$

令 $\cos\varphi=\dfrac{R}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{\omega L}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}$，则

$$i(t)=\frac{E_0}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}}\sin(\omega t-\varphi)+\frac{E_0\omega L}{\omega^2L^2+R^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

当 t 增大时，上式第二项逐渐变小而趋于零（称为暂态电流），从而电流主要由第一项正弦电流（称为稳态电流）决定，它的周期和电源电动势相同而相位相差 φ，$i(t)$ 的这段变化过程称为过渡过程，是电子技术中常见的现象.

习 题 6－3

1. 一曲线通过点(2,3)，它在两坐标轴间的任意切线段均被切点所平分，求这条曲线的方程.

2. 降落伞张开后下降，设所受空气阻力与降落伞的下降速度成正比，且伞张开时（$t=0$）的速度为 0，求降落伞下降速度 v 与时间 t 的函数关系.

3. 有一条 $R-L$ 电路，由一个 $R=10\ \Omega$ 的电阻，一个 2 H 的电感和一个 E V 的电源连同开关 K 串联起来，如图 6－6，在 $t=0$ 时开关闭合，此时电流 $I=0$，若 $E=50\sin 5t$，求 $t>0$ 时的电流 $I(t)$.

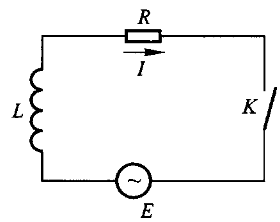

图 6－6

4. 质量为 1 g 的质点受外力作用作直线运动，这外力的大小和时间成正比，和质点运动的速度成反比，在 $t=10$ s 时，速度为 50 cm/s，外力为 4×10^{-5} N，问质点运动 1 min 后的速度是多少？

5. 一潜艇质量为 m，由静止开始沉入水中，下沉时的阻力与下沉的速度成正比，求潜艇下沉的深度与时间的函数关系.

第四节 可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程是指二阶及二阶以上的微分方程. 一般而言，高阶微分方程求解更为困难，而且没有普遍适用的解法. 本节介绍几种应用中较常见的可用降阶法求解的高阶微分方程.

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

微分方程
$$y^{(n)}=f(x) \tag{1}$$
的右端是仅含 x 的函数，方程(1)只要通过连续 n 次积分就可以得到通解.

例 1 求微分方程 $y'''=\sin x+x$ 的通解.

解 逐项积分，得
$$y''=-\cos x+\frac{x^2}{2}+C_1,$$
$$y'=-\sin x+\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2,$$
再积分，得通解
$$y=\cos x+\frac{x^4}{24}+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3.$$

二、$y''=f(x,y')$ 型的微分方程

微分方程
$$y''=f(x,y') \tag{2}$$
的特点是不明显含有未知函数 y 的二阶方程，方程(2)的解法是：

令 $y'=p(x)$（$p(x)$ 为新的未知函数），则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ 代入原方程得到一个关于变量 x 与 p 的一阶