教育改变人生
JIAOYU GAIBIAN RENSHENG
江西教育出版社

新高中课程
XIN GAOZHONG KECHENG

目标·素养·评价 丛书
MUBIAO SUYANG PINGJIA CONGSHU

数学
SHUXUE

新高中课程目标·素养·评价丛书编写组 编

一年级·下学期

江西教育出版社
JIANGXI EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

新高中课程目标·素养·评价.数学.一年级.下学期/《新高中课程目标·素养·评价》丛书编写组编.南昌:江西教育出版社,2005.12

ISBN 7－5392－3154－8

Ⅰ.新... Ⅱ.新... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 48913 号

新高中课程目标·素养·评价丛书

数　学

一年级·下学期

"新高中课程目标·素养·评价"丛书编写组编

江西教育出版社出版

(南昌市抚河北路 61 号　330008)

江西省新华书店发行

江西新华印刷厂印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　8.75 印张

2005 年 12 月第 1 版　2005 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7－5392－3154－8/G·3053　定价:9.75 元

出版说明

根据教育部2000年颁布的《全日制普通高级中学课程计划(试验修订稿)》和《全日制普通高级中学各科教学大纲(试验修订版)》的精神,《全日制普通高级中学教科书》已在逐步推广使用.新教材旨在体现素质教育,对学生"加强基础、培养能力、开发智力、发展个性、减轻负担、提高质量".新教学大纲、新教材在教学思想、教学目的要求、教学内容方法等方面比老教学大纲、老教材都有明显的改进.为了帮助广大高中师生更好地贯彻新教学大纲、掌握新教材,特别是配合新高中课程的试验工作,解决好新教材中的重点、难点和关键问题,以期达到预定的教学目的要求,特编写这套丛书.

这套丛书根据新教学大纲和新教材要求,参照教育目标分类理论、掌握学习理论和现代教育评价理论,紧密结合新高中课程教学实际,严格与课堂教学同步,着重加强学生的基础知识、基本技能和基本方法的训练.既考虑了大部分中等水平学生的学习需求,又考虑了一部分较高水平学生提高的愿望,抓住重点,突破难点,示范引路,开拓思维,举一反三,灵活运用,注重素质,培养能力.各册均按新教材中的课(单元)设课(单元),每课(单元)由"学习目标"、"学科素养"和"单元评价"等部分组成.

"学习目标"主要是使读者在每课(单元)开篇就有一个高屋建瓴的认识,明确为什么要学这课(单元),学什么,怎样学等,将大纲要求和教材要点具体化、细化,概述学习目的要求、内容结构体系,阐明本课(单元)的重点、难点和关键问题,帮助读者掌握知识要点,明确学习目标.

"学科素养"主要是针对本课(单元)的重点、难点和关键问题,对有关的知识、技能、注意事项、解题思路、解题技巧、学科素养等作出精要点评,有论述、有范例、有练习,帮助读者掌握学习方法,提高解题技巧.

"单元评价"是按新教学大纲要求、新教材内容编拟的检测本单元学习成效的

自测自评题，选择最新流行的各类题型，题目知识覆盖面大，应试性强，对各单元的基本点、重点、难点进行系统的全面的训练，帮助读者加深理解，巩固所学知识.

为了便于读者全面评价自己掌握知识的程度，期末配有“综合评价”，对全学期所学知识进行达标测验，同时书末配有参考答案与提示，对书中的自我检测、单元评价、综合评价均给出了提示或解答.

本书由江芳、邬思军、李金峰、陈述忠、林峰、曾建强、曾招萍、曾子斌、彭高贵、廖春兰、潘杰、颜鹏编写，曾建强统稿、修改，曾鹤鸣审定.

江西教育出版社

2005年11月

目　录

目标素养评价丛书

第四章　三角函数

一　任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广

学　习　目　标

$\left\{\begin{array}{l}\text{理解任意角的概念,学会在平面内建立适当的坐标系来讨论角}\\ \text{能熟练地表示与某角终边相同的角的集合,并能判断其为第几象限角}\\ \text{能在熟练掌握度、分、秒运算的基础上,准确地求出满足要求的角}\end{array}\right.$

学　科　素　养

1. 主要内容与方法

(1) 任意角的形成:角可以看作是由一条射线绕着它的端点旋转而成的.射线的端点叫做角的顶点,旋转开始时的射线叫做角的始边,终止时的射线叫做角的终边.

(2) 正角、负角和零角:按逆时针方向旋转所成的角叫做正角.按顺时针方向旋转所成的角叫做负角.当射线没有作任何旋转时,形成的角叫做零角.

(3) 象限角:角的顶点与坐标原点重合,角的始边与x轴的正半轴重合,角的终边落在第几象限,就把这个角称为第几象限的角.角的终边在坐标轴上,这个角不属于任何象限.第一、二、三、四象限的角的集合依次是:$\{x \mid k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid k\cdot360°-90°<x<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(4) 终边相同的角:所有与α角终边相同的角,连同α角在内(而且只有这样的角)可以用式子$k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}$表示,它们互称终边相同的角.与$\alpha$角终边相同的角的集合可记作:$\{\beta \mid \beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

(5) 轴线角:角的终边在坐标轴上的角.终边在x轴上,x轴的正半轴上,x轴的负半轴上的角的集合依次是$\{x \mid x=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid x=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid x=k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$.终边在$y$轴上,$y$轴的正半轴上,$y$轴的负半轴上的角的集合依次是$\{x \mid x=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid x=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$,$\{x \mid x=k\cdot360°-90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

典型范例

例 1:(1) 写出与$-1840°$终边相同的角的集合M;

(2) 若$\alpha\in M$,且$\alpha\in[-360°,360°]$,求α.

分析:本题重点考查$\alpha+k\cdot360°$的表示方法,其中,α是任意角,$k\in\mathbf{Z}$,并能根据题目要求,求出符合要求的角.

解:(1)$M=\{\alpha \mid \alpha=-1840°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 所求角$\alpha\in[-360°,360°]$,但$-1840°$小于$-360°$,所以应在$-1840°$上加$360°$的正

整数倍，使角变大，从而求出满足要求的角为 $-40°, 320°$，或利用 $k \in \mathbf{Z}$ 求解．过程如下：

$\because -360° \leqslant \alpha \leqslant 360°$，$\therefore -360° \leqslant -1840° + k \cdot 360° \leqslant 360°$，求出 $\frac{37}{9} \leqslant k \leqslant \frac{55}{9}$，又 $\because k \in \mathbf{Z}$，$\therefore k = 5, 6$，故 $\alpha = -40°, 320°$.

例 2　已知角 α 为第一象限角，确定角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限，并画出其变化区域．

解：首先写出角 α 的一般形式：$k \cdot 360° < \alpha < k \cdot 360° + 90° (k \in \mathbf{Z})$，两边同时除以 2 得：$k \cdot 180° < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180° + 45° (k \in \mathbf{Z})$.

(1) 当 k 为偶数时，设 $k = 2m (m \in \mathbf{Z})$，则 $m \cdot 360° < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360° + 45° (m \in \mathbf{Z})$，此时角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限的角；

(2) 当 k 为奇数时，设 $k = 2m + 1 (m \in \mathbf{Z})$，则 $m \cdot 360° + 180° < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360° + 225° (m \in \mathbf{Z})$，此时角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角．

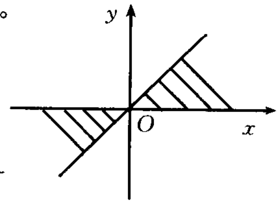


图 4－1

综上，角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限或第三象限的角．

其变化区域如图中阴影部分，这样的区域为一，三象限的前半区域．

点评：(1) 本题结论应熟记，类似地：① 当 α 为第二象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为一，三象限后半区域；② 当 α 为第三象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为二，四象限的前半区域；③ 当 α 为第四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为二，四象限的后半区域．

(2) 已知角 α 是第一象限角(或其他象限角)，问 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边位置．应就式 $\frac{k \cdot 360°}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{k \cdot 360°}{3} + 30° (k \in \mathbf{Z})$，讨论 k 的值，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边的位置．其他情况类似．

例 3　若角 α、β 的终边相同，则 $\alpha - \beta$ 的终边在(　　)上．

(A) x 轴正半轴　　(B) y 轴正半轴　　(C) x 轴负半轴　　(D) y 轴负半轴

分析：根据终边相同的角的形式，先写出 α、β 的关系式，然后就关系式进行讨论．

解：$\because$ 角 α、β 终边相同，$\therefore \alpha = k \cdot 360° + \beta (k \in \mathbf{Z})$，$\therefore \alpha - \beta = k \cdot 360° (k \in \mathbf{Z})$，$\therefore \alpha - \beta$ 的终边在 x 的正半轴上，故选(A).

易错分析

问题　设集合 $M = \{$第一象限角$\}$，$N = \{\alpha \mid 0° < \alpha < 90°\}$，$P = \{$锐角三角形的内角$\}$，$Q = \{$小于 $90°$ 的角$\}$，则 P, Q, M, N 的关系为__________.

错解：$M = Q \supsetneqq N \supsetneqq P$ 或 $M = P \subsetneqq N \subsetneqq P$.

分析：没有理解和区分象限角和区间角的区别，误认为第一象限的角就是 $0° \sim 90°$ 的角或小于 $90°$ 的角．

正解：$P = N \subsetneqq Q$ 或 $N = P \subsetneqq M$.

2. **重点难点**

(1) 本节重点：① 理解任意角、象限角的概念；② 能正确表达终边相同的角的集合．

(2) 本节难点：① 把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来；② 负角化正角的终边表示．

3. **高考点评**

本节作为三角函数的最基础的知识，高考中常以理解概念、正确表达作为考查的主要形式，内容尽管简单，却经常考查．

单　元　评　价

同步练习1

一、选择题：

1. 下面四个命题中正确的是(　　)．

(A) 第一象限的角必是锐角　　(B) 锐角必是第一象限的角

(C) 终边相同的角必相等　　(D) 第二象限的角必大于第一象限的角

2. 在直角坐标系中，若 α 与 β 的终边互相垂直，那么 α 与 β 的关系是(　　)．

(A) $\beta=\alpha+90^\circ$　　(B) $\beta=\alpha\pm 90^\circ$

(C) $\beta=k\cdot 360^\circ+(\alpha+90^\circ),k\in\mathbf{Z}$　　(D) $\beta=k\cdot 360^\circ+(\alpha\pm 90^\circ),k\in\mathbf{Z}$

3. 终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是(　　)．

(A) $\{\theta\mid\theta=k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　(B) $\{\theta\mid\theta=k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{\theta\mid\theta=k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$　　(D) $\{\theta\mid\theta=k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题：

4. 与角 -1560° 的终边相同的角的集合为____________，其中最小的正角是____ 最大的负角是______．

5. 角 α 的终边落在直线 $y=x$ 上，则 α 可以表示为______________．

6. 若 α 是第一象限角，则 $-\alpha$ 是第____ 象限的角，$180^\circ-\alpha$ 是第____ 象限的角，$k\cdot 360^\circ-\alpha$ 是第____ 象限的角，$(2k+1)180^\circ+\alpha$ 是第____ 象限的角．

7. 角 α 的终边与 -50° 角的终边互相垂直，则 α 可表示为______________．

三、解答题：

8. 已知角 α 的终边与 60° 的终边相同，在 $[0^\circ,360^\circ]$ 内找出与 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边相同的角．

9. θ 为小于 360° 的正角，这个角的 7 倍角的终边与这个角的终边重合，求 θ.

10. 已知角 α 的终边与 30° 的终边关于直线 $y=x$ 对称，且 $\alpha\in(-1140^\circ,1140^\circ)$，求 α.

11. 设 α,β 满足 $-90^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$，求 $\alpha-\beta$ 的范围．

12. 已知 $A=\{\alpha\mid k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+150^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta\mid -90^\circ+k\cdot 360^\circ<\beta<45^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

4.2 弧度制

学 习 目 标

$\begin{cases}\text{理解弧度的意义,能正确地进行弧度与角度的换算}\\ \text{熟记特殊角的弧度数}\\ \text{了解角的集合与实数集}\mathbf{R}\text{之间可以建立起一一对应的关系}\\ \text{掌握弧度制下的弧长公式,会利用弧度解决某些简单的实际问题}\end{cases}$

学 科 素 养

1. 主要内容与方法

(1)1 弧度的角:等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

(2) 正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零,任一已知角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \dfrac{l}{r}$,其中 l 为以角 α 作为圆心角时所对圆弧的长,r 为圆的半径.

(3) 角度与弧度数的换算:$180° = \pi$ 弧度,$1° = \dfrac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度,1 弧度 $= (\dfrac{180}{\pi})° \approx 57°18'$.

(4) 弧长公式:$l = \dfrac{n\pi r}{180}$(r 为半径,n 为圆心角的角度数);

$l = |\alpha| r$(r 为半径,α 为圆心角的弧度数).

扇形面积公式:$S = \dfrac{1}{2}lr$(r 为半径,l 为弧长);

$S = \dfrac{1}{2}\theta r^2$($\theta$ 为圆心角的弧度数,r 为半径).

典型范例

例 1 把 $21°45'$ 化为弧度,$\dfrac{13}{12}\pi$ 化为角度.

分析:考查角度和弧度之间的换算.

解:$21°45' = (21\dfrac{3}{4})° = \dfrac{87}{4} \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{87}{720}\pi$. $\dfrac{13}{12}\pi = \dfrac{13}{12} \cdot 180° = 195°$.

点评:角的分与度是 60 进制. $45' = (\dfrac{45}{60})° = (\dfrac{3}{4})°$.

例 2 一个扇形 OAB 的面积是 1cm^2,它的周长是 4cm,求中心角的弧度数.

分析:考查弧长及扇形的面积公式,要特别注意 $l = |\alpha| \cdot r$ 中,α 的单位是弧度,且求出的弧度是中心角的绝对值.

解:设扇形所在圆的半径为 R,中心角所对弧长为 l,由已知可得:

$\begin{cases}2R + l = 4\\ \dfrac{1}{2}lR = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R = 1\\ l = 2.\end{cases}$ 又 $\because \alpha = \dfrac{l}{R} = \dfrac{2}{1} = 2$(弧度),

$\therefore$ 中心角的弧度为 2.

例 3 已知扇形的周长为 20cm，问扇形的中心角为多大时，扇形的面积 S 最大，并求出 S 的最大值．

分析：本题运用扇形面积 $S=\frac{1}{2}lR$ 及 l 与 R 的关系，写出 S 用 R 表示的式子，然后就式子讨论 S 的最大值及此时 α 的值．

解：设扇形的半径为 Rcm，则依题意有：$l=20-2R$，$S=\frac{1}{2}lR$，由上面两个式子，得 $S=\frac{1}{2}(20-2R)R$，即 $S=-(R-5)^2+25$.

由上式可知，当 $R=5$cm 时，S 有最大值 25cm^2，此时有 $l=10$cm，再由公式 $|\alpha|=\frac{l}{R}=2$，得 $\alpha=\pm 2$（负值舍）.

综上，当 $\alpha=2$ 时，扇形的面积 S 最大，且最大值为 25cm^2.

易错分析

问题 1 试比较下列 4 个角的大小：-1，$-2°$，1，$2°$.

错解：$\because 1<2$，$-1>-2$，$\therefore -2°<-1<1<2°$.

分析：这里的 4 个角的度量，采用了两种不同的单位：度和弧度（弧度单位可以省略）. 不统一单位、不注意单位，势必出错．

正解：$\because 1$（弧度）$=57°18'$，$\therefore -1<-2°<2°<1$.

问题 2 α 是第三象限的角，$\frac{\alpha}{3}$ 是哪个象限的角？

错解：$\because \alpha$ 是第三象限的角，$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角．

分析：没从角的概念的本质出发解题，机械地不加思索地错认为第三象限的角是第一象限角的 3 倍．

正解：由 α 是第三象限的角可得：$2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

$\because \frac{k}{3}$ 的余数可为 0，1，2$(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$ 可设 $k=3n$，$k=3n+1$，$k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$.

当 $k=3n$ 时，有 $2n\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \frac{\alpha}{3}$ 的终边在第一象限．

同理，当 $k=3n+1$，$k=3n+2$ 时，$\frac{\alpha}{3}$ 的终边分别在第三、第四象限．

综上，$\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限，第三象限或第四象限的角．

2. 重点难点

(1) 本节重点：理解弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算．

(2) 本节难点：弧度的概念及其与角度的关系．

3. **高考点评**

高考中，角大多数是用弧度表示的，平时学习时要能熟练快捷地对角度制、弧度制进行转换．弧长公式在以后学习的立体几何中也要使用，高考偶尔也要利用此公式进行计算．

单　元　评　价

同步练习2

一、选择题：

1. 下列各式中成立的是(　　).

(A)$\pi = 180$　　(B)$\pi = 3.14$　　(C)$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ 弧度　　(D)1 弧度 $= \pi$

2. 已知集合 $A = \{\alpha \mid 2k\pi \leqslant \alpha \leqslant (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{\alpha \mid -4 \leqslant \alpha \leqslant 4\}$，则 $A \cap B =$ (　　).

(A) $\varnothing$　　(B)$\{\alpha \mid -4 \leqslant \alpha \leqslant \pi\}$

(C)$\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi\}$　　(D)$\{\alpha \mid -4 \leqslant \alpha \leqslant -\pi$ 或 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi\}$

3. 在以原点为圆心，半径为 1 的单位圆中，一条弦 AB 的长度为$\sqrt{3}$，AB 所对圆心角 α 的弧度数是(　　).

(A)$\sqrt{3}$　　(B)$\frac{2\pi}{3}$　　(C)120°　　(D)$\frac{\pi}{3}$

二、填空题：

4. 填写下表：

角度		30°	45°		90°	120°		270°	
弧度	0			$\frac{\pi}{3}$			π		2π

5. 若 2 弧度的圆心角所对的弧长是 4cm，则这个圆心角所在的扇形面积是________．

6. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 3:5:7$，则 A,B,C 的弧度数是________．

7. 现在时针、分针都指向 12，试用弧度制表示 15 分钟后，时针与分针夹角为________．

三、解答题：

8. 一个扇形周长等于它的弧所在圆的周长的一半，若圆的半径为 R，求扇形的面积．

9. 已知扇形的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，则扇形面积与其内切圆的面积之比是多少?

10. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转一圈时，小链轮转过的角度是多少?合多少弧度?

11. 已知扇形的周长为 6cm，面积为 2cm^2，求扇形圆心角的弧度数．

12. * 已知扇形的周长 q 为定值，问它的圆心角 θ 取何值时，扇形的面积 S 最大?这个最大值是多大?

4.3 任意角的三角函数

学 习 目 标

- 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义
- 了解任意角的正弦、余弦、正切函数值分别用正弦线、余弦线、正切线的表示
- 掌握正弦、余弦、正切函数这三种函数的值在各象限的符号
- 掌握公式一，会运用它们把求任意角的三角函数值分别转化为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的函数值

学 科 素 养

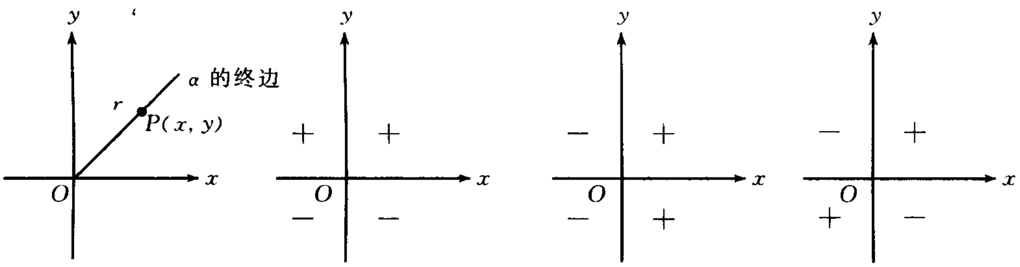
1. 主要内容与方法

(1) 任意角的三角函数的定义：设 α 是一个任意大小的角，角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是(x,y)，它与原点的距离是 $r(r>0)$，那么 α 的六个三角函数定义为：

正弦函数 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，余弦函数 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，正切函数 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$，余切函数 $\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$，正割函数 $\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$，余割函数 $\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$.

可见对 $\alpha\in\mathbf{R}$，有 $|\sin\alpha|\leqslant 1$，$|\cos\alpha|\leqslant 1$.

(2) 各三角函数值在每个象限的符号如图 ①、②、③ 所示：

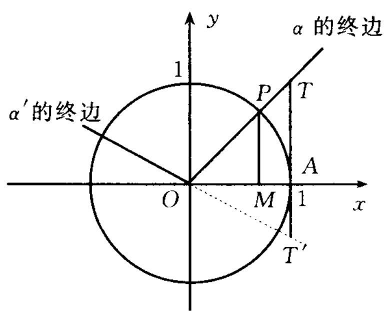


$\sin\alpha,\csc\alpha$ ①　　$\cos\alpha,\sec\alpha$ ②　　$\tan\alpha,\cot\alpha$ ③

(3) 公式一：$\sin(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$，

$\cos(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$，

$\tan(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.



(4) 三角函数线：用与单位圆有关的特定有向线段的数量表示正弦值、余弦值、正切值，这样的有向线段叫做正弦线、余弦线、正切线.

设任意角 α 的终边与单位圆交于点 P，过点 P 作 Ox 轴的垂线，垂足为 M. 过 $A(1,0)$ 作圆的切线，与 α 的终边或终边的反向延长线交于点 T.

有向线段 MP、OM、AT 分别称角 α 的正弦线、余弦线、正切线.

(5) 在任意角的三角函数中主要题型有：① 求定义域；② 求值；③ 化简；④ 证明. 关键在于

抓住三角函数的"定义,符号,特殊值".

(6) 在解题过程中,要注意分类讨论的数学思想和数形结合的数学方法.

典型范例

例 1 求 $5\sin90^\circ+2\cos0^\circ-3\sin270^\circ+10\cos180^\circ$ 的值.

解: 原式 $=5\times1+2\times1-3\times(-1)+10\times(-1)$

$=5+2+3-10=0.$

点评: 本题考查特殊角的三角函数值,要熟记特殊角的三角函数值.

例 2 已知角 α 的终边上有一点 $P(x,-\sqrt{2})(x\neq0)$,且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}x$,求 $\sin\alpha+\cot\alpha$ 的值.

解: 设 $|OP|=r$,则 $r=\sqrt{x^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{x^2+2}$.

又 $\because\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$,解之得 $x=-\sqrt{10}$ 或 $x=\sqrt{10}$.

由 $x=\sqrt{10}$ 时,P 点坐标为 $(\sqrt{10},-\sqrt{2})$,由三角函数定义有 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}$,$\cot\alpha=-\sqrt{5}$,

$\therefore\sin\alpha+\cot\alpha=-\frac{\sqrt{6}+6\sqrt{5}}{6}$.

同样可求得,当 $x=-\sqrt{10}$ 时,$\sin\alpha+\cot\alpha=\frac{6\sqrt{5}-\sqrt{6}}{6}$.

点评: 本题主要考查三角函数的定义,关键在于 P 点所在的象限是由 x 的符号确定,因此要对 x 进行讨论.

例 3 已知 $\cos(360^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}$,求 $2\cos(\alpha-4\pi)$ 的值.

解: $\because\cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$,$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

$\therefore2\cos(\alpha-4\pi)=2\cos[(-2)\cdot2\pi+\alpha]=2\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

点评: 充分利用诱导公式进行转化.

例 4 根据任意角的三角函数的定义证明:

$(\sin\alpha+\tan\alpha)(\cos\alpha+\cot\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

分析: 用三角函数的定义证明三角恒等式,前提条件是给定的式子都有意义,它所运用的数学思想是等价转化思想,即把三角恒等式证明问题转化为 x、y、r 的代数运算问题,本题从左往右证.

证明: 依三角函数的定义,有

左边 $=(\frac{y}{r}+\frac{y}{x})(\frac{x}{r}+\frac{x}{y})=y(\frac{1}{r}+\frac{1}{x})\cdot x(\frac{1}{r}+\frac{1}{y})$

$=[y(\frac{1}{y}+\frac{1}{r})][x(\frac{1}{x}+\frac{1}{r})]=(1+\frac{y}{r})(1+\frac{x}{r})=$ 右边.

$\therefore$ 原式得证.

点评: 证明三角恒等式,从方向上看有三种证法,即"左边 $\Rightarrow$ 右边,右边 $\Rightarrow$ 左边,左右归一";从繁简角度讲,一般采用由繁至简的方法.

易错分析

问题 1　化简 $\cot\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}$.

错解:$\cot\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{(\frac{r}{x})^2-1}=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{r^2-x^2}{x^2}}=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}$ $=1$.

分析:没有注意开方过程中的符号讨论.

正解:设 $P(x,y)$ 为角 α 的终边上任意一点,它与原点的距离是 $r(r>0)$,则 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,且 $xy\neq 0$(否则 $\cot\alpha,\sec\alpha$ 中至少有一个无意义).

$$\cot\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\frac{x}{y}\sqrt{(\frac{r}{x}^2)-1}=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{r^2-x^2}{x^2}}=\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{y}\cdot\left|\frac{y}{x}\right|$$

$$=\begin{cases}\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}(xy>0)\\ \frac{x}{y}\cdot(-\frac{y}{x})(xy<0)\end{cases}=\begin{cases}1(\alpha\text{ 是第一,三象限的角}),\\ -1(\alpha\text{ 是第二,四象限的角}).\end{cases}$$

问题 2　已知 $\sin\alpha>0$ 且 $\cos\alpha\leqslant 0$,确定角 α 是第几象限角或终边的位置.

错解:$\because\sin\alpha>0$,$\therefore$ 角 α 是第一象限的角或第二象限的角.

又 $\because\cos\alpha\leqslant 0$,$\therefore$ 角 α 是第二象限的角或第三象限的角,或 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

综上,角 α 是第二象限的角.

分析:当 α 是第一,二象限角时,$\sin\alpha>0$,反过来,$\sin\alpha>0$,α 还有可能是轴线角,即 $\sin\alpha=1>0$,α 终边在 y 轴正半轴上.

正解:$\because\sin\alpha>0$,$\therefore$ 角 α 是第一象限或第二象限的角,或 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\because\cos\alpha\leqslant 0$,$\therefore$ 角 α 是第二象限角或第三象限的角,或 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,或 $\alpha=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$.

综上,角 α 是第二象限的角,或 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

2. 重点难点

(1) 本节重点:① 任意角的正弦、余弦、正切的定义(包括这三种三角函数的定义域和函数值在各象限的符号);② 第一组诱导公式(即公式一).

(2) 本节难点:利用与单位圆有关的有向线段,将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用它们的几何形式表示出来.

3. 高考点评

求终边的三角函数值,判断象限角的三角函数值的符号,利用三角函数线快捷比较函数值的大小都是高考常考的基础知识.本节作为三角函数的基础,应全面熟练地掌握,在以后的学习和高考中才能游刃有余.

单 元 评 价

同步练习3

一、选择题：

1. $\sec\alpha$ 与 $\cot\alpha$ 同号，那么 α 在（　　）.

(A) 第一象限　　(B) 第一、三象限　　(C) 第三象限　　(D) 第三、四象限

2. 已知 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 α 与 β 的关系是（　　）.

(A) $\alpha=\beta$　　(B) $\alpha+\beta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$

(C) $\alpha-\beta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　(D) 以上都不对

3. 如果 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$，那么（　　）.

(A) $\sin\theta<\cos\theta<\cot\theta$　　(B) $\cos\theta<\sin\theta<\cot\theta$

(C) $\sin\theta<\cot\theta<\cos\theta$　　(D) $\cos\theta<\cot\theta<\sin\theta$

二、填空题：

4. 当 α 为第二象限角时，$\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$ 的值是________.

5. 已知：$\cos(2x-\frac{\pi}{2})=-1$，则 $x=$ ________.

6. 若角 α 的终边落在直线 $y=-3x$ 上，则 $\cos\alpha=$ ________.

7. $\sin750^\circ-\tan(\frac{\pi}{4}-2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 的值为________.

三、解答题：

8. 计算：$\frac{4}{3}m^2\cos^2\frac{13\pi}{6}+3n^2\tan^2\frac{\pi}{6}-\frac{n^2}{2\cos^2\frac{17\pi}{4}}-\frac{1}{3}m^2\sin^2\frac{\pi}{3}$.

9. 设 x,y 都是实数，且 $(x-6)^2+(y+2)^2=0$，求 $x\cos\frac{25\pi}{3}+y\tan\frac{9\pi}{4}$ 的值.

10. 已知 $6\sin3\alpha-\cos^2 2\beta=6$，求 α.

11. 设 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，函数 $f(x)=(\sin\alpha)^{x^2-2x+3}$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$，求 α.

12. 利用单位圆内的三角函数线证明：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $\sin x<x<\tan x$.

能 力 检 测 一

一、选择题：

1. 与 -1485° 终边相同的角的集合是（　　）.

(A) $\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　　(B) $\{x\mid x=2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x\mid x=2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　　(D) $\{x\mid x=2k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

2. （1989年上海高考题）若 α 是第四象限角，则 $\pi-\alpha$ 在（　　）.

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \tan 4$ 的值为(　　).

(A) 小于 0　　(B) 大于 0　　(C) 等于 0　　(D) 不存在

4.(2000 年全国高考题)已知 $\sin\alpha > \sin\beta$,那么下面命题成立的是(　　).

(A) 若 α,β 是第一象限角,则 $\cos\alpha > \cos\beta$

(B) 若 α,β 是第二象限角,则 $\tan\alpha > \tan\beta$

(C) 若 α,β 是第三象限角,则 $\cos\alpha > \cos\beta$

(D) 若 α,β 是第四象限角,则 $\tan\alpha > \tan\beta$

5.(2001 年春季高考题)若 A,B 是 $\triangle ABC$ 的两个内角,则点 $P(\cos B - \sin A, \sin B - \cos A)$ 在(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

二、填空题:

6. θ 为第二象限的角,则 $\sin(\cos\theta)\cos(\sin\theta)$ ______ 0(填不等号或等号).

7. 终边与坐标轴重合的角 θ 的集合是______.

8. 3.19 弧度角的终边在第____象限.

9. 集合 $A = \{\alpha \mid \alpha = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} U \{\alpha \mid \alpha = 2n\pi \pm \frac{2}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$,集合 $B = \{\beta \mid \beta = \frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\} U \{\beta \mid \beta = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$,则 A 与 B 的关系是__________.

10. 在 $\triangle ABC$ 中,$\sin A$,$\cot\frac{A}{2}$,$\cos\frac{B+C}{2}$,$\tan A$ 四个值中,可以是负值的是________.

三、解答题:

11. 已知 2 弧度的圆心角所对的弦长是 4cm,求:(1) 这个圆心角所对的弧长;(2) 圆心角所夹扇形的面积.

12. 角 α 终边上一点 $P(-4a, 3a)$,$a \neq 0$,求 $2\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值.

13.(1990 年全国高考题)求函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域.

14. 已知 α 角的终边上一点 $P(x, -2)$,且 $|OP| = 4$,求 $\tan\alpha$.

15. 求值:$\sin(-1320^\circ)\cos 1110^\circ + 3\cos(-1020^\circ)\sin 750^\circ + \tan 4860^\circ$.

4.4　同角三角函数的基本关系式

学　习　目　标

掌握同角三角函数的三个基本关系式

会用基本关系式进行求值、化简或证明简单的恒等式

学　科　素　养

1. 主要内容与方法

(1) 同角三角函数的三个基本关系式:

①$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;② $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$;③$\tan\alpha\cot\alpha = 1$.