希望
Beijing Hope Electronic Press
www.bhp.com.cn

21世纪高等院校计算机科学与工程系列教材

北京希望电子出版社　总策划
陆玲　杨勇　主编

计算机图形学

科学出版社
www.sciencep.com

希望
Beijing Hope Electronic Press
www.bhp.com.cn

21世纪高等院校计算机科学与工程系列教材

北京希望电子出版社 总策划
陆玲 杨勇 主编

计算机图形学

科学出版社
www.sciencep.com

内容简介

本书是作者根据多年的教学经验并参考国内外最新版本的著作编写而成的。书中附有一定例题可以帮助读者理解算法。对主要算法，书中列出了程序源代码，有利于读者进行程序设计。

全书共分 10 章。第 1 章介绍与图形学相关的基本知识；第 2 章介绍图形系统；第 3 章介绍二维图形生成算法；第 4 章介绍结构和层次建模；第 5 章介绍图形用户界面和交互输入方法；第 6 章介绍图形变换；第 7 章介绍图形裁剪；第 8 章介绍曲面的生成；第 9 章介绍消除隐藏线和隐藏面；第 10 章介绍真实感图形技术。

本书是一本通俗易懂、集理论与实践为一体的具有一定特色的专业教材。它可以作为计算机专业及相关专业本科生的教材，也可以作为研究生的参考书，还适用于计算机图形学的初学者。

本书附带的部分教学课件及演示程序，请登录 www.b-xr.com 网站下载。

需要本书或技术支持的读者，请与北京清河 6 号信箱（邮编 100085）发行部联系。电话：010-82702660 010-82702658，010-62978181 转 103 或者 238，传真：010-82702698，E-mail：tbd@bhp.com.cn。

图书在版编目（CIP）数据

计算机图形学 / 陆玲，杨勇主编. —北京：科学出版社，2006.8

（21 世纪高等院校计算机科学与工程系列教材）

ISBN 7-03-016855-0

Ⅰ. 计… Ⅱ. ①陆…②杨… Ⅲ. 计算机形学—高等学校—教材 Ⅳ. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 008366 号

责任编辑：曾　华　　/责任校对：张月岭
责任印刷：双　青　　/封面设计：梁运丽

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2006 年 8 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2006 年 8 月第一次印刷　印张：14 3/4
印数：1 - 3 000　字数：3287 522

定价：22.00 元

21世纪高等院校计算机教材编委会名单

（排名不分先后）

总　　序

21 世纪挑战与机遇并存，没有足够的知识储备必将被时代所抛弃。中国 IT 教育产业竞争日趋激烈，用户需求凸现个性，行业发展更需要理性。未来 5 年 IT 行业将以 18％的速度连续增长，将引发 IT 产业新的发展高潮。实现信息产业大国的目标，应该依赖教育，要圆信息产业强国的梦想，依然要寄托于教育，IT 教育事业任重道远，其产业也正面临着机遇与挑战。

我国的计算机教学长久以来一直重原理、轻应用。高等院校的计算机教学机制和教材对计算机本身的认识都存在误区。要改革高校计算机教学，教材改革是重要方面，用计算机教材的改革促进基础教育的改革势在必行。

一本好书，是人生前进的阶梯；一套好教材，是教学成功的保证。为缓解计算机技术飞速发展与计算机教材滞后落伍的矛盾，我们通过调查多所院校的师生，并多次研讨，根据读者认识规律，开创出一种全新的方式，打破过去介绍原理——理论推导——举例说明的模式，增加实用操作性，通过上机实验与课上内容结合来增强可读性，用通俗易懂的语言和例子说明复杂的概念。

本套教材的特点一是“精”，精选教学内容；二是“新”，捕捉最新资讯；三是“特”，配备电子课件，力争达到基础性、先进性、全面性、典型性和可操作性的最大统一。

为保证教材质量，我们同时聘请了一批学术水平较高的知名专家、教授作为本套教材的主审和编委。全套教材包括必修课教材 20 多种，选修课教材和学习配套用书 10 余种，基本上涵盖了目前高等院校（含高等职业技术学院、高等专科学校、成人高等学校）计算机科学与技术专业所必修或选修的内容。各种教材编写时既注意到了内容上的连贯性，又保证了教学上的相对独立性。

本套教材在内容的组织上，大胆汲取当今计算机领域最新技术，摒弃了传统教材中陈旧过时的内容。这些变化在各本教材中都得到了不同程度的体现。本套教材编写时既参照了教育部有关计算机科学与技术专业的教学要求，又参考了“程序员考试大纲”和“全国计算机水平等级考试大纲”的内容，因此既适合作为高等学校计算机科学与技术专业教材，也可作为计算机等级考试学习用书。

考虑到各校教学特点和计算机设备条件，我们本着“学以致用”的理念，在本套教材编写中自始至终贯彻“由浅入深，理论联系实际”的原则，以阐明要义为主，辅之以必要的例题、习题和上机实习，能够使学生尽快领悟和掌握。

在本套教材编写过程中，作者们付出了艰辛的劳动，教材编委会的各位专家、教授对本套教材进行了认真的审定和悉心的指导。书中参考、借鉴了国内外同类教材和专著，在此一并表示感谢。

我们希望更多的优秀教师参与到教材建设中来，真诚希望广大教师、学生与读者朋友在使用本套教材过程中提出宝贵意见和建议。

若有投稿或建议，请发至本丛书出版者电子邮件：textbook@bhp.com.cn

21 世纪高等院校计算机教材编委会

前　言

科技是第一生产力。在社会发展及市场需求下，计算机图形学这门新兴学科从20世纪60年代诞生至今，得到了飞速发展，已经成为计算机应用的主要研究方向。

计算机图形学主要研究计算机及其图形设备输入、表示、变换、运算和输出图形的原理、算法及系统。随着计算机系统的软、硬件性能的迅速发展和图形功能的迅速提高，计算机图形学得到了广泛应用。由于图形是最直观的人们最易接受的形式，并且具有一定的引导力，所以计算机图形学成为用户界面、数据可视化、电视广告、动画和其他许多应用中的重要内容。

全国各大院校的计算机及相关专业大都开设了计算机图形学这门课程，以满足市场的需求。计算机图形学的教材在国内外较多，而且教材的内容也日益充实，逐渐从纯学术性的、侧重于理论推导和分析的，发展到增加了许多编程指导及程序代码。由于大多数计算机图形学教材专业程度较高，各类图形生成的详细算法及程序代码较少，初学者对此难以理解，所以，编者根据多年教学经验并参考国内外最新版本的著作编写了本教材。

本书有以下特点和创新：

（1）重点介绍计算机图形学中各类基本图形的生成算法及程序设计，使学生学完本课程后能编程实现基本二维图形到三维真实感图形的交换。

（2）详细介绍了三维真实感图形的数据结构、生成算法及程序设计。

（3）提出了二维图形的改进算法，给出了多种图形生成算法的实例。

（4）强调理论与实践相结合，动脑与动手相结合。

全书共分10章，内容包括：第1章，基本知识；第2章，图形系统；第3章，二维图形生成算法；第4章，结构和层次建模；第5章，图形用户界面和交互输入方法；第6章，图形变换；第7章，图形裁剪；第8章，曲面的生成；第9章，消除隐藏线和隐藏面；第10章，真实感图形技术。其中，重点内容是第3章、第6章、第7章、第8章、第9章和第10章。

本书可以作为计算机专业及相关专业本科生的教材，也可以作为研究生的参考书或作为学生的上机指导书，还适用于计算机图形学的初学者。

本书还附带了部分教学课件及演示程序，请登录www.b-xr.com网站下载。

由于编者水平有限，书中的不足之处在所难免，恳请广大读者和专家批评指正。

编　者

目　录

第1章 基 本 知 识

本章介绍在学习计算机图形学之前应该了解的基本数学知识，如所使用的数学方法、几种方程表示形式以及坐标系的分类。

1.1 所用数学方法

在研究计算机图形学特别是几何造型时，将要使用几种重要的数学方法，它们是线性代数、矢量、矩阵方法、行列式、集合论、多项式插值和数值逼近。

矢量是其中最重要的数学手段。与解析几何相比，矢量对特殊坐标系的依赖性可减少到最低程度。矢量运算可使工程技术人员容易确定正交性和平行性。这些运算是代数运算，但保留了矢量长度和方向等内在的几何意义。矢量方程是同时处理几个分量的方程，这也是它的独特优点之一。

矩阵方法也是有力的数学工具。构成矩阵的数组能够简单地表示某个问题所存储的有序的一组数，或多项式的一组系数。矩阵代数法则定义了对这些数组所允许的运算。作为算子是矩阵的另一用途。矩阵通过定义一组点的位置矢量作运算以实施这组点的几何运算，矩阵作为算子是大多数几何造型计算的基础。

因为许多运算和表达式中常遇到行列式，对其特殊性也应有所了解。

研究表明，大量实际的数值分析依赖于称为数值插值的方法。例如：一条直线能够用它所通过的两个点来定义，一条二次曲线通过 3 个点、一条三次曲线通过 4 个点来定义。它们的方程都可用多项式表示。因为多项式的求值、微分都很容易，而且只要应用有限次加、减和乘的基本算术运算就可实现。因此，多项式插值是很有用的。n 次多项式函数形如

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

多项式插值对于插值点的选取极为灵敏，我们可用一系列多项式曲线来拟合一条组合曲线，这种分段多项式可避免对局部性质的全局依赖性。

考虑到所用的算法都是在计算机上进行处理的，因此数值分析也是必要的。

1.1.1 矢量及其运算

矢量是有方向和长度的量。在记号上常用小写黑体字母表示一个矢量，在图形上用箭头表示。矢量遵从下面的法则。

（1）零矢量：长度为 0 的矢量，记作 $\mathbf{0}$（它的方向不确定）。

（2）相等：长度和方向相同的两个矢量。

（3）加法：两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在图形上使用连接 $\boldsymbol{a}$ 的箭头与 $\boldsymbol{b}$ 的箭尾的矢量来定义，从 $\boldsymbol{a}$ 的箭尾到 $\boldsymbol{b}$ 的箭头的线段就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

（4）负矢量：矢量 $-\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度相同，但方向相反。

（5）减法：根据法则 3 和 4，定义 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

（6）数乘：矢量 $k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向，而长度是 $\boldsymbol{a}$ 的 k 倍。k 为大于 0 的实数。

（7）矢量的长度：已知 p_x、p_y 和 p_z 是矢量 $\boldsymbol{p}$ 的数量分量，则矢量 $\boldsymbol{p}$ 的长度是

$$|p|=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}$$

（8）单位矢量：矢量 $\boldsymbol{p}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 是 $n=\dfrac{p}{|p|}$，$\boldsymbol{n}$ 的分量也是矢量 $\boldsymbol{p}$ 的几个方向的余弦。

（9）数量积（又叫点积）。两矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$，它们的数量积具有以下性质：

①$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}=p_xr_x+p_yr_y+p_zr_z=|p||r|\cos\theta$

矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的夹角 θ 可由下式计算：

$$\cos\theta=\frac{p\cdot r}{|p||r|}$$

②$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=|\boldsymbol{p}|^2$

③$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$

④$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$

⑤$(k\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}\cdot(k\boldsymbol{r})=k(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})$

⑥若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 垂直，则 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}=0$

（10）矢量积（又叫叉积）。两矢量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的矢量积式：

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=(p_yr_z-p_zr_y)\boldsymbol{i}+(p_zr_x-p_xr_z)\boldsymbol{j}+(p_xr_y-p_yr_x)\boldsymbol{k}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是 x、y、z 轴方向上的单位矢量。矢量积具有以下性质：

①$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}$ 垂直 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$。

②$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$

③$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=|\mathrm{p}||\mathrm{r}|\sin\theta$，其中 $\boldsymbol{n}$ 是与 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 张开的平面垂直的单位矢量。

④$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$

⑤$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s}$

⑥$(k\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}\times(k\boldsymbol{r})=k(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})$

⑦$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

⑧若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 平行，则 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=0$。

⑨点 p 的位置矢量是 $\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k}=(p_x\,p_y\,p_z)(i\,j\,k)^T$，为方便起见，常省略$(i\,j\,k)^T$，而简单地用 $\boldsymbol{p}=(p_x\,p_y\,p_z)$来表示。

⑩点 p_0 和 p_1 之间的线段是：

$$p(u)=p_0+u(p_1\text{-}p_0) \qquad \forall u \in [0,1]$$

⑪过点 p_0、方向为 $\boldsymbol{p_1}$ (或与 $\boldsymbol{p_1}$ 平行)的直线是：

$$p(u)=p_0+up_1 \qquad \forall u \in [-\infty,+\infty]$$

⑫包含点 p_0、且与矢量 $\boldsymbol{p_1}\times\boldsymbol{p_2}$ 垂直的平面是：

$$p(u,\ w)=p_0+up_1+wp_2 \quad \forall u,w \in [-\infty,+\infty]$$

任意 3 个线性无关的矢量构成一个基（Basic）。线性无关性要求这 3 个矢量不共线，并且不在同一个平面上。于是，在每一个主坐标轴方向上有其中一个矢量，这 3 个矢量构成一个基。任意一个矢量都能够表示成基矢量的线性组合。

1.1.2　矩阵方法

排列成 m 行、n 列的一组数或一组其他的数学元素称为矩阵（Matrix）。我们用大写字母表示矩阵，如 $\boldsymbol{A}$，或用带标记的字母来表示，如 $\boldsymbol{A}_{m}\times_{n}$。用标记法时，第一个下标表示行，第二个下标表示列。例如：一个 m 行 n 列的矩阵写成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_m\times_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素。

（1）如果 $m=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 简称为方阵或 n 阶矩阵。

（2）当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}=(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})$称为行矢量或行矩阵。

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$称为列矢量或列矩阵。

（3）两个矩阵只有当其行数、列数都相等，且其所有对应位置的元素都相等时，才称这两个矩阵相等。

（4）两个 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，它由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素之和组成。不同容量的矩阵不能相加。类似地，我们能够求两矩阵之差。

（5）数乘矩阵：用一个数或一个函数乘以一个矩阵时，矩阵的每一个元素都要乘以这个数或这个函数，即

$$CA=Ca_{ij}$$

这一运算称为数乘。

（6）矩阵的乘积：两个矩阵 $A_{m}\times_{n}$ 和 $B_{n}\times_{p}$ 的乘积是一个新的矩阵 $C_{m}\times_{p}$。注意 $A_{m}\times_{n}$ 的列数必须与 $B_{n\times p}$ 的行数相同。设矩阵 A 的元素为 a_{ik}，矩阵 B 的元素为 b_{kj}，则矩阵 C 的元素 c_{ij} 为：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad (i=1，2，…，m；j=1，2，…，p)$$

乘积可写成

$$C=AB$$

注意：矩阵的乘法通常不满足交换率。

（7）单位矩阵。把单位矩阵（又称恒等矩阵）定义为 $n\times n$ 方阵，它的元素满足以下方程：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若 i=j\\ 0 & 若 i\neq j\end{cases}$$

单位矩阵常用 I 来表示，如 n 阶单位矩阵为：

$$I_n=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

（8）转置矩阵：矩阵 A 的转置记为 A^{T}，它是将 A 的行、列互换得到。转置矩阵遵从下列规律：

①$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

②$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$

③$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

我们看到单位矩阵是它自身的转置。

（9）逆矩阵：对于方阵 A，若满足条件

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

则称 A^{-1} 为 A 的逆矩阵。

方阵的逆矩阵满足下述规律：

①若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$。

②若 A 可逆，数 $k\neq 0$，则 kA 可逆，且 $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$。

③若 A、B 为同阶方阵且均可逆，则 AB 也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

④若 A 可逆，则 A^{T} 亦可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

1.1.3 行列式

行列式是由元素组成的一个方形阵列，并能由此导出惟一的一个数值。矩阵可看作一

个二维的表格，一个矩阵必须是方阵才有其行列式。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式记作$|\boldsymbol{A}|$。例如：2×2方阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$的行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

并且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

对于3×3行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

行列式有以下一些性质：

（1）一个矩阵的行列式等于它的转置矩阵的行列式，即

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$$

（2）交换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行（或任意两列），则它的行列式要变号。如果把变化后的矩阵记作 $\boldsymbol{B}$，则

$$|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$$

（3）若将 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列乘以常数 C 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则

$$|\boldsymbol{B}|=C|\boldsymbol{A}|$$

（4）若将 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列的倍数加到另一行或另一列上得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则其行列式的值不变，即

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$$

（5）若 $\boldsymbol{A}$ 的两行或两列是相同的，则其行列式的值为0，即

$$|\boldsymbol{A}|=0$$

（6）若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个 $n\times n$ 矩阵，则它们乘积的行列式是

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

（7）对于行列式的每一个元素 a_{ij}，我们把划去该元素所在行（第 i 行）和列（第 j 列）后，剩下的元素组成的行列式定义为元素 a_{ij} 的子式。每一个元素具有一个代数符号，对于元素 a_{ij}，它的符号式为$(-1)^{i+j}$。该子式与相应符号的乘积给出了元素 a_{ij} 的因子，记作 A_{ij}。

（8）可以得到这样一个结论，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 为

$$c_{ij} = \frac{A_{ij}}{|A|}$$

式中，A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 ij 个元素的余因子。若$|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 是一个奇异矩阵，它的逆矩阵不存在。

1.2 显式方程和隐式方程

数学上，可以用参数方程或非参数方程表示几何元素。非参数方程的表示又可分为显式方程和隐式方程两种。

1. 显式方程

对于一条平面曲线，显式非参数方程的一般形式为

$$y=f(x)$$

采用这种形式，对于 x 的每一个值只对应一个 y 值。因此，显式方程不能表示闭曲线或多值曲线。例如：$y=kx+b$ 是一条直线的显式表示，而 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 是上半圆的显式表示。显然，不能用显式方程表示一个圆。

2. 隐式方程

用隐式的非参数方程可克服显式方程受到的限制，隐式方程的一般形式为

$$f(x，y)=0$$

显式和隐式的非参数方程的表示都与坐标系有关，因为坐标系的选取影响了使用这些元素及计算它们的难易程度。把一般的二次隐式方程写成

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

这是一条圆锥曲线。通过指定系数 a、b、c、d、e 和 f 的值，可得到若干种类型的平面曲线。通常，利用边界条件来建立通过指定点的一条特定的曲线。

若 $f=0$，则该曲线通过坐标原点。

若在一般的二次隐式方程中令 $c=1$，为了确定一条过两端点的曲线段，则必须指定 5 个独立条件，或称 5 个自由度，以便决定其余 5 个系数的值。一种选择是指定两个端点的位置，曲线段在每一端点处的斜率，以及曲线段必须经过的一个中间点。

若令 $a=1$，$b=0$，$c=1$，则可定义一条更简单的曲线，其形式为

$$x^2+y^2+2dx+2ey+f=0$$

若令 $a=b=c=0$，该方程退化为

$$dx+ey+f/2=0$$

它表示一条直线。

如果想在曲线段中产生一个拐点，则必须用高次曲线，如三次曲线，才能做到。

在使用与坐标系有关的非参数曲线时，在端点处可能出现垂直斜率的情况。我们不能把所得的无穷大斜率用作数值边界条件。解决的办法是通过变换坐标系或者用一个很大的正数或负数来近似表示无穷大斜率。

如果不考虑上述的一些限制，对于某些应用来说，用非参数方程是简单的。

1.3 参数方程

$y=f(x)$的单值函数无法表示几何造型所要求的形状。这是因为几何造型的形状内在地与任何坐标系无关；并且任何封闭的物体相对于任意选取的坐标系都会有垂直的切线和切平面，这将导致无穷大的斜率或其他病态的数学性质。在几何造型中所用的曲线和曲面在某种意义下常是非平面的和有界的，通常的非参数表示对这些无能为力。

由于上述原因以及许多与编制程序和计算的难易程度有关的其他因素的考虑，在几何造型中表示形状最有力的手段是参数方程。

在二维曲线的参数表示中，曲线上的每一点用参数 u 的两个函数表示为

$$x=x(u)$$
$$y=y(u)$$

该曲线上的一点写成矢量形式是

$$p(u)=(x(u)\ y(u))$$

同样，空间曲线上的一点表示成矢量是

$$p(u)=(x(u)\ y(u)\ z(u))$$

曲面上的一点表示成矢量是

$$p(u,\ w)=(x(u,\ w)\ y(u,\ w)\ z(u,\ w))$$

我们看到曲面的参数表示有两个参数 u 和 w。

参数表示不仅可避免非参数表示存在的有关问题，而且它也是用绘图仪或在图形显示屏上画曲线方法的最适宜的描述。这时，把时间 t 作为参数的函数 $x(t)$，$y(t)$作为显示器 CRT 的电子束偏转系统的驱动函数，使电子束按适当的曲线移动。

点通常是参数几何和几何造型的基本元素，它是空间中给定位置的坐标值，可用一组有序的实数来定义。点和矢量是可互换的，产生用以定义曲线、曲面和其他几何元素的点集的数学函数是参数方程。

我们不可能，也没有必要去研究 u 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有值，而只需选取有意义的一个区间。通常对参数变量规范化，是 u 限制在闭区间[0，1]之内变化，用符号 $u\in[0,\ 1]$表示。实际上这种限制给出了曲线和曲面的边界。

在曲线、曲面的表示上，参数方程与非参数方程相比有很多优越性，除了我们已讨论过的某些内容，现在再来考察一些新的问题。

（1）可提供更多的控制曲线和曲面形状的自由度。形如

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

的二维显式三次曲线只有 4 个系数可用来控制此曲线的形状，而形如

$$x=au^3+bu^2+cu+d$$
$$y=eu^3+fu^2+gu+h$$

的二维参数三次曲线有 8 个可运用的系数。

（2）可对参数方程直接进行平移、比例和旋转等几何变换。

（3）便于处理斜率为无穷大的情形，不至于使计算中断。因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/du}{dx/du}$$

引入记号 $y^x=dy/dx$，$x^u=dx/du$，若 $x^u=0$，表示 $y^x=\infty$。

（4）参数方程允许有任意多个变量，因为它无论在代数还是几何上完全分离了因变量和自变量的作用。这样，可以把一条二维空间的曲线扩展到高维空间中去，而不损害它在二维空间中的形状和几何性质。这种分离性能用几何形式去处理几何元素。后面将介绍的调和函数提供了对曲线、曲面的控制和对形状的更深入的了解。

（5）规范化的参变量，使得用参数定义的几何元素是有界的。

（6）易于用矢量形式和矩阵形式表示几何元素，简化了计算并便于在计算机上实现。

（7）参数三次多项式函数是用来表示在空间中扭曲并有拐点的曲线的最简单形式。

（8）参数双三次多项式能够表示其边界和内部是参数三次曲线网格定义的曲面片的最简单形式。

综上所述，容易用几何造型的形式表示曲线和曲面的数学方法就是参数几何。基于这些考虑，以后将用参数几何来解决曲线和曲面问题。

1.4 坐 标 系

形体的定义和图形的输入输出在一定的坐标系下进行，对于不同类型的形体、图形和图样，在其输入输出的不同阶段需要采用不同的坐标系以提高图形处理的效率和便于用户理解。常用的坐标系的分类如图 1-1 所示。

- 坐标系
  - 造型坐标系
  - 用户坐标系
    - 直角坐标系
    - 仿射坐标系
    - 图柱坐标系
    - 球坐标系
    - 极坐标系
  - 观察坐标系
  - 规格化设备坐标系
  - 设备坐标系

图 1-1 坐标系的分类

1. 造型坐标系（MC，Modeling Coordinate System）

它用于定义基本形体或图素，对于定义的每一个形体和图素，它们都有各自的坐标系原点和长度单位。这里定义的形体和图素经调用可放在用户坐标系中的指定位置，因此造型坐标系又可看作是局部坐标系，而用户坐标系可看是作整体坐标系（全局坐标系）。

2. 用户坐标系（WC，World Coordinate System）

它又被称为世界坐标系，用于定义用户整图和最高层图形结构，一般与用户定义形体