全日制普通高级中学教科书（必修）同步辅导

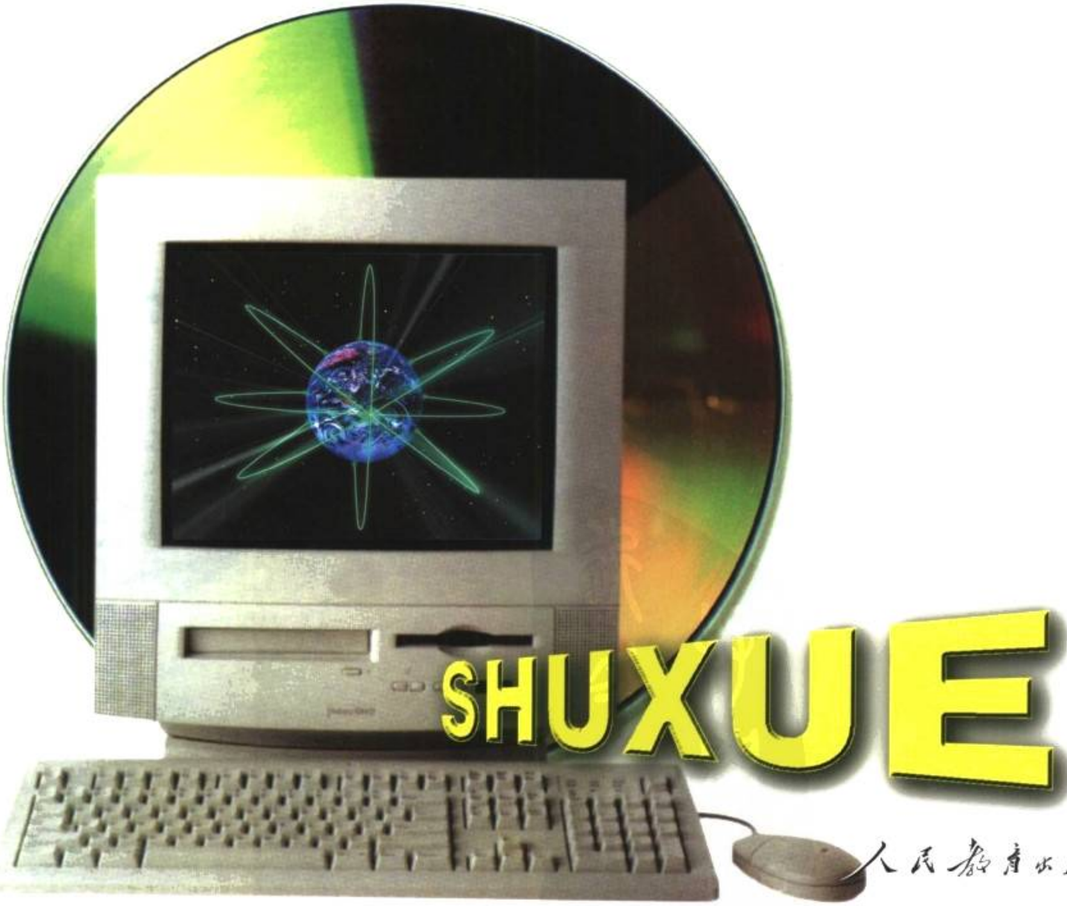
能力培养与测试

修订版

高二数学

第二册（上）

人民教育出版社　组编



人民教育出版社

ISBN 7-107-18894-1

9 787107 188947 >

ISBN7-107-18894-1
G·11984(课)
定价：13.70元

全日制普通高级中学教科书（必修）同步辅导

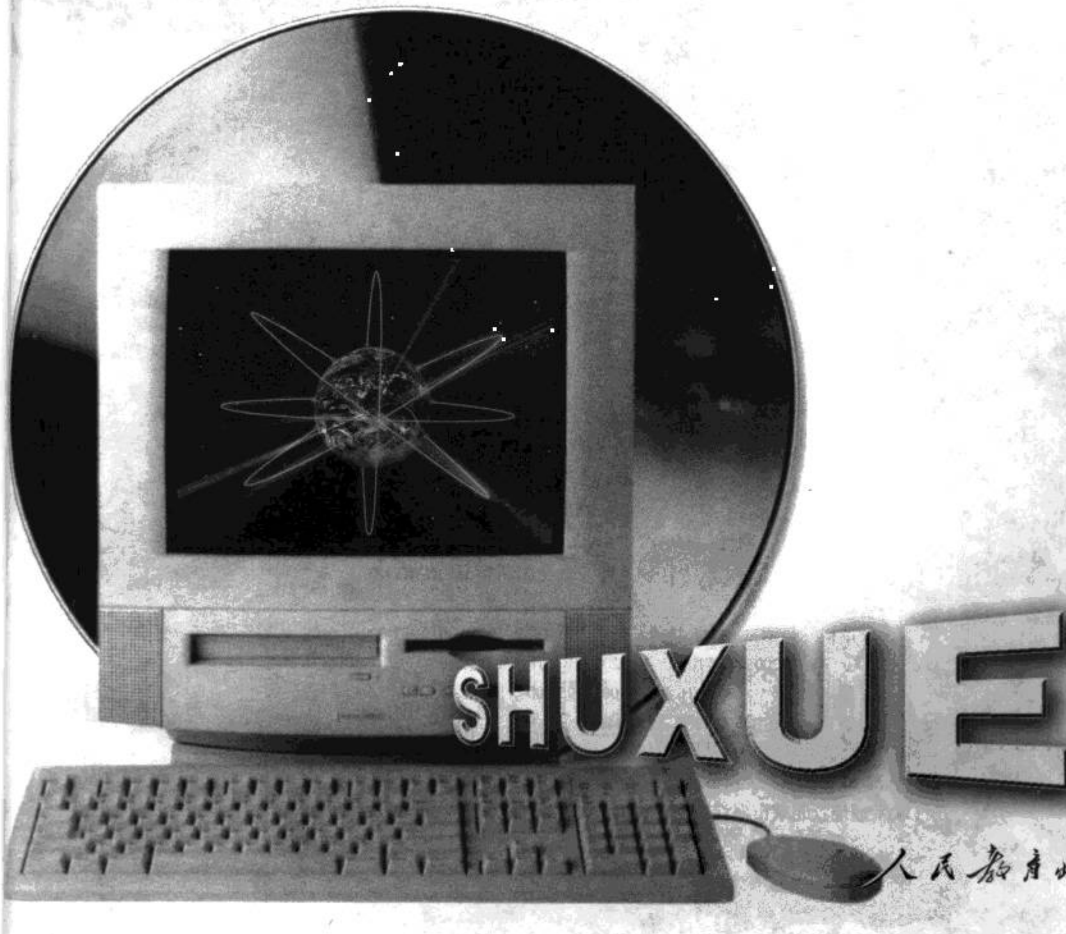
能力培养与测试

修订版

高二数学

第二册（上）

人民教育出版社 组编



人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（必修）同步辅导
能力培养与测试（修订版）
高二数学（第二册上）
人民教育出版社 组编
*
人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销
*
开本：890 毫米 ×1 240 毫米 1/16 印张：9.75 字数：372 000
2005 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 3 次印刷
印数：83 001～95 000
ISBN 7－107－18894－1 / G・11984（课） 定价：13.70 元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

编写说明

1996年，原国家教委基础教育司制订并印发了《全日制普通高级中学课程计划（试验)》和供试验用的全日制普通高级中学语文、数学、外语（英、日、俄)、物理、化学、生物、历史、地理、政治等9个学科的教学大纲。同年，人民教育出版社接受原国家教委的委托，根据各学科教学大纲，编写了全日制普通高级中学试验教材。这套教材于1997年出版并开始在江西、山西、天津进行试验。经过试验，这套课程方案和教材受到了专家的肯定和广泛的好评。2000年，人民教育出版社又根据教育部修订后的各科教学大纲对这套教材进行了修订。同时，为了更好地配合这套教材的推广使用，人民教育出版社约请了国内部分一线教师，组织成立了《能力培养与测试》丛书编写组，编写了一套与人教版各科全日制普通高级中学教科书（试验修订本）配套的同步辅导读物。2002年，全日制普通高级中学语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理等学科教学大纲经再一次修订后正式印发。人民教育出版社组编的《能力培养与测试》这套丛书也根据各科教学大纲的变化和教材的修订不断地进行着调整和修订。经过几年的使用，根据使用中的反馈意见和课程改革的发展情况，2005年，人民教育出版社再次组织力量对这套丛书进行了修订，希望这套丛书更加贴近学生的实际需要，能够有效提高学生自主学习的能力和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。

《能力培养与测试》编写组

2005年7月

目录

第六章

不等式

6.1 不等式的性质

学海导航

两实数a与b之间的性质，是比较两实数大小的依据.应用不等式的五个性质及推论时，首先应注意条件，不可盲目套用(其中相乘，相除，乘方，开方等性质都有附加条件).其次不等式的性质包括"单向性"和"双向性"两个方面，单向性主要用于证明不等式，双向性是解不等式的基础，因为解不等式要求的是同解变形.

精彩视点

1.两个实数a与b之间有如下性质：

(1)$\begin{cases}a-b>0\Leftrightarrow a>b\\a-b=0\Leftrightarrow a=b\\a-b<0\Leftrightarrow a<b\end{cases}$

(2)$\begin{cases}\dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b(b>0)\\\dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b(b\neq0)\\\dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b(b>0)\end{cases}$

上述性质是比较两数大小，比较法证明不等式及解不等式的重要依据.

2.不等式的乘法法则：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$及$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$，应用时应特别注意c的符号.对于$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd>0$应特别注意是同向正值不等式相乘.

3.$ab>0,a>b\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$在课本中作为习题出现，因其应用的广泛性，做选择填空时可直接应用，所以要牢记此性质.

4.性质$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$

可推广为$a>b\Rightarrow a^{2n-1}>b^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$

性质$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*)$

可推广为$a>b\Rightarrow\sqrt[2n-1]{a}>\sqrt[2n-1]{b}(n\in\mathbf{N}^*)$

典例精析

1.学科综合　思维激活

例1　(2004·全贴近冲刺卷)对于实数a、b、c判断下列命题真假.

(1)若$a>b$,则$ac>bc$;

(2)若$a>b$,则$ac^2>bc^2$;

(3)若$ac^2>bc^2$,则$a>b$;

(4)若$a<b<0$,则$a^2>ab>b^2$;

(5)若$a<b<0$,则$\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$;

(6)若$a<b<0$,则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

(7)若$c>a>b>0$,则$\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$;

(8)若$a>b,\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$,则$a>0,b<0$.

解:(1)因c的正负或是否为零未知，无法判断ac与bc的大小，所以是假命题.

(2)因$c^2\geqslant0$，所以$c=0$时，有$ac^2=bc^2$，故为假命题.

(3)由$ac^2>bc^2$，知$c\neq0$且$c^2>0$，所以为真命题.

(4)由$\begin{cases}a<b,\\a<0\end{cases}\Rightarrow a^2>ab$，又$\begin{cases}a<b,\\b<0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$，所以为真命题.

(5)由$a<b<0\Rightarrow\begin{cases}-a>-b>0,\\-\dfrac{1}{b}>-\dfrac{1}{a}>0\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}\Rightarrow\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$，所以为真命题.

(6)例如$-3<-2<0$，但$-\dfrac{1}{3}>-\dfrac{1}{2}$，所以为假命题.

事实上，由$a<b<0\Rightarrow\begin{cases}a<b\\ab>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

(7)由$c>a>b>0\Rightarrow c-a>0,c-b>0$且$c-a<c-b$且$a>b>0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{c-b}>0,\\a>b>0\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$，所以为真命题.

(8)由$\begin{cases}a>b,\\\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-a<0,\\\dfrac{b-a}{ab}>0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a>b,\\ab<0\end{cases}\Rightarrow a>0,b<0$，所以为真命题.

事实上，$a>0,b<0\Rightarrow a>b$且$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，

所以$a>b,\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow a>0,b<0$.

温馨提示:本例共8小题，均围绕着不等式的性质这一知识点展开学习，训练，特别注意性质的使用条件，在解

答问题时，恰当地使用反例和特例是思维灵活的体现.

变式题1：(2004·高中新课程模拟卷·烟台卷)

1.已知 $a>b$，$a+b<0$，那么(　　)

A. $|a|>|b|$　　　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. $|a|<|b|$　　　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

答案：C.

变式题2：设实数 a,b 满足 $ab<0$，那么(　　)

A. $|a+b|>|a-b|$　　B. $|a+b|<|a-b|$

C. $|a-b|<||a|-|b||$　D. $|a-b|<|a|+|b|$

答案：B.

例2　(2005·红太阳单元测试卷)已知 a 是实数，试比较 $\frac{1}{1-a}$ 与 $1+a$ 的大小.

解：∵ $\frac{1}{1-a}-(1+a)=\frac{a^2}{1-a}$，

∴ 当 $a=0$ 时，$\frac{a^2}{1-a}=0$. ∴ $\frac{1}{1-a}=1+a$.

当 $1-a>0$ 但 $a\neq0$，即 $a<1$ 但 $a\neq0$ 时，

$\frac{a^2}{1-a}>0$，∴ $\frac{1}{1-a}>1+a$.

当 $1-a<0$ 但 $a\neq0$，即 $a>1$ 时，$\frac{a^2}{1-a}<0$，

∴ $\frac{1}{1-a}<1+a$.

温馨提示：(1)比较两数大小常用：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$，$a-b=0\Leftrightarrow a=b$，$a-b<0\Leftrightarrow a<b$. 若 $a>0$，$b>0$ 时，也可用：$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$，$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$，$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

(2)对于两数差的表达式含有参数的，需依据表达式本身形式特点及差的正负对参数进行讨论，注意分类讨论的数学思想的应用.

变式题：(2005·江西金太阳)比较 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 与 $2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 的大小.

解：$2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$

$=2-2\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]$

$=2-2\left(1+\frac{6}{a^2}\right)=-\frac{12}{a^2}<0$，

∴ $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$.

例3　(2005·全国大联考四)设 $x,y\in\mathbf{R}$，判定下列各题中，命题 A 与命题 B 的充分必要关系：

(1)命题A：$\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$　命题B：$\begin{cases}a+b>0\\ab>0\end{cases}$

(2)命题A：$\begin{cases}x>2\\y>2\end{cases}$　命题B：$\begin{cases}x+y>4\\xy>4\end{cases}$

解：(1)若 $a>0$ 且 $b>0$，由实数的性质知：$a+b>0$ 且 $ab>0$；若 $ab>0\Rightarrow a,b$ 同号，又 $a+b>0\Rightarrow a,b$ 同正，即 $a>0,b>0$.

所以命题 A 是命题 B 的充要条件.

(2)∵ $\begin{cases}x>2>0,\\y>2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y>4,\\xy>4\end{cases}$(不等式的性质)

反之不然，如反例，当 $x=6$，$y=1$ 时，有 $x+y=6+1=7>4$，$xy=6>4$，但 $x>2$，$y<2$，即 $x>2$ 且 $y>2$ 不成立.

所以 A 是 B 的充分不必要条件.

温馨提示：利用不等式的性质及充分必要条件的定义来判断命题中条件与结论之间的逻辑关系是常见的基本题型.

变式题：(2005·江西金太阳)若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则(　　)

A. $a^2>b^2$　　　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

解析：若 $a=0,b=-1$ 则 $a^2<b^2$ 故A错.

若 $a=-1,b=-2$ 则 $\frac{b}{a}>1$ 故B错.

若 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4}$ 满足 $a>b$ 但 $\lg(a-b)=\lg\frac{1}{4}<0$ 故C错.

由 $a<b$ 及指数函数单调性知 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$.

答案：D.

温馨提示：本题可理解为 $a>b$，不是 $a^2>b^2$，$\frac{b}{a}<1$，$\lg(a-b)>0$ 的充分条件，而 $a>b$ 是 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$ 的充要条件.

例4　(2005·黄冈)若 $2^x=3^y=5^z$，且 x、y、z 均为正数，则 $2x,3y,5z$ 的大小关系为________.

解析：设 $2^x=3^y=5^z=t>1$，

则 $x=\frac{\lg t}{\lg 2}$，$y=\frac{\lg t}{\lg 3}$，$z=\frac{\lg t}{\lg 5}$，

又 $2x-3y=\frac{2\lg t}{\lg 2}-\frac{3\lg t}{\lg 3}=\frac{2\lg 3-3\lg 2}{\lg 2\cdot\lg 3}\cdot\lg t$

$=\frac{\lg 9-\lg 8}{\lg 2\cdot\lg 3}\cdot\lg t>0$，

∴ $2x>3y$，同理 $5z>2x$. ∴ $5z>2x>3y$.

答案：$5z>2x>3y$.

温馨提示：将指数式变对数式从而得 $2x,3y,5z$ 的表达式，然后用作差法比较两数的大小.

变式题：(2005·全贴近冲刺卷四)

设 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2$，其中 $x>0$ 且 $x\neq1$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

解：$f(x)-g(x)=\log_x\frac{3}{4}x$，

(1)当 $\frac{3}{4}x=1$，即 $x=\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x=0$，

∴ $f(x)=g(x)$.

(2)当 $0<x<1$ 且 $0<\frac{3}{4}x<1$ 或 $x>1$ 且 $\frac{3}{4}x>1$，

即 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x>0$，

∴ $f(x)>g(x)$.

(3)当 $1<x<\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x<0$，

$\therefore f(x)<g(x)$.

2. 创新应用　思维激活

例 5　(2005·高考备考全真模拟试卷二)

设 $a>0,b>0$，则 $\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}$ ______ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

(在横线上填上$>,<,\geqslant,\leqslant$符号).

解：设 $A=\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\frac{1}{a^nb^n}(a^{2n-1}+b^{2n-1}-a^{n-1}b^n-a^nb^{n-1})$

$=\frac{1}{a^nb^n}(a^{n-1}-b^{n-1})(a^n-b^n)$，

$\because a>0,b>0,\therefore \frac{1}{a^nb^n}>0$.

当 $a=b$ 时，$a^{n-1}=b^{n-1},a^n=b^n$，

$\therefore (a^{n-1}-b^{n-1})(a^n-b^n)=0.\therefore A=0$.

当 $a>b>0$ 时，$a^{n-1}>b^{n-1},a^n>b^n$.

$\therefore a^{n-1}-b^{n-1}>0,a^n-b^n>0$.

$\therefore (a^{n-1}-b^{n-1})(a^n-b^n)>0.\therefore A>0$.

当 $0<a<b$ 时，$a^{n-1}<b^{n-1},a^n<b^n$.

$\therefore (a^{n-1}-b^{n-1})(a^n-b^n)>0.\therefore A>0$.

综上 $A\geqslant 0,\therefore \frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

温馨提示：实数大小比较常采用作差法或作商法比较大小，根据题目的结构特点常常需要分类讨论，比较法的关键是第二步的变形，一般来说变形越彻底，越有利于下一步的判断.

变式题：(临沂市一轮统考题)

若 $x<y<0$，试比较$(x^2+y^2)(x-y)$与$(x^2-y^2)(x+y)$的大小.

解：$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)=(x-y)[x^2+y^2-(x+y)^2]=-2xy(x-y)$，$\because x<y<0$，

$\therefore xy>0,x-y<0.\therefore -2xy(x-y)>0$.

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

例 6　(2005·全真贴近冲刺卷六)已知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，且 $f(1)=0,f(xy)=f(x)+f(y)$.

求证：当 $0<x<y<1$ 时，有$|f(x)|>|f(y)|$.

证明：$\because 0<x<y$ 由题意得 $f(x)<f(y)$，

即 $f(x)-f(y)<0$.　①

$\because 0<x<y<1,\therefore 0<xy<1$.

$\therefore f(xy)<f(1)=0$. 即 $f(x)+f(y)<0$.　②

由①②得 $f^2(x)-f^2(y)>0$，即

$|f(x)|>|f(y)|$.

温馨提示：(1)关于抽象函数要特别注意题目中给定性质的应用. (2)$a<b<0,c<d<0$ 则 $ac>bd>0$ 也可作为性质应用.

变式题：(2005·金太阳模拟卷三)已知 $60<x<84$，$28<y<33$，则$\frac{x}{y}$可取得的整数值是______.

解：$28<y<33\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{33}<\frac{1}{y}<\frac{1}{28},\\ 60<x<84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{60}{33}<\frac{x}{y}<3,\\ \frac{x}{y}\in\mathbf{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x}{y}=2.$$

例 7　(2005·红太阳单元测试卷)证明：若 a,b,c 为一个三角形的三边，则$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$也可以作为一个三角形的三边.

证明：不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，则$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}\geqslant\sqrt{c}$.

若$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$可以作为一个三角形的三边，只需证明：$\sqrt{c}+\sqrt{b}>\sqrt{a}$即可.

$\because a,b,c$ 为一个三角形的三边，

$\therefore b+c>a.\therefore b+c+2\sqrt{bc}>a$.

$\therefore (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2>a.\therefore \sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$成立.

即$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$也可以作为一个三角形的三边.

温馨提示：(1)要证明$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$也可以作为一个三角形的三边，只要证明任两边之和大于第三边. (2)如果题目a,b,c三量大，中，小机会均等，则可设一种情况代替所有可能的情况. (3)注意 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*)$的应用.

变式题：(2005·江西金太阳模拟卷)已知：实数 x,y,z 满足 $x+y+z=0$，且 $xyz>0$，设 $T=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，则(　　)

A. $T>0$　B. $T<0$　C. $T=0$　D. 以上都不对

解析：$\because x+y+z=0,\therefore (x+y+z)^2=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\therefore x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=0,\\ xyz>0,\therefore x\neq 0,y\neq 0,z\neq 0\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow xy+yz+xz<0$，

又$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+xz}{xyz}$且$\frac{xy+yz+xz}{xyz}<0$.

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<0$.

答案：B.

温馨提示：也可用特例法.

例 8　(2005·红太阳单元测试卷)某厂使用两种零件 A、B 装配两种产品 X、Y，该厂的生产能力是月产 X 最多 2 500 件，月产 Y 最多 1 200 件，而组装一个 X 需要 4 个 A，2 个 B；组装一件 Y 需要 6 个 A，8 个 B. 某个月，该厂能用的 A 最多有 14 000 个，B 最多有 12 000 个，已知产品 X 每件利润 1 000 元，Y 每件利润 2 000 元，欲使该月利润最高，需组装 X、Y 产品各多少？最高利润多少万元？

解：设分别生产 X、Y 产品 x 件，y 件，

则 $0\leqslant x\leqslant 2\,500,0\leqslant y\leqslant 1\,200$.

由题意 $4x+6y\leqslant 14\,000,2x+8y\leqslant 12\,000$，

即 $2x+3y\leqslant 7\,000,x+4y\leqslant 6\,000$.

则该月产品的利润为 $1\,000x+2\,000y=1\,000(x+2y)$.

设 $x+2y=\lambda(2x+3y)+k(x+4y)$，

则$\begin{cases}2\lambda+k=1,\\ 3\lambda+4k=2.\end{cases}$解得：$\begin{cases}\lambda=\frac{2}{5},\\ k=\frac{1}{5}.\end{cases}$

于是 $x+2y=\frac{2}{5}(2x+3y)+\frac{1}{5}(x+4y)$，

$\therefore x+2y\leqslant\frac{2}{5}\times 7\,000+\frac{1}{5}\times 6\,000=4\,000$.

当且仅当$\begin{cases}2x+3y=7\,000,\\ x+4y=6\,000.\end{cases}$

即$\begin{cases}x=2\ 000,\\ y=1\ 000\end{cases}$时上式取等号.

此时最高利润为 $1\ 000(x+2y)=400$(万元).

温馨提示:(1)不等式性质的应用.(2)也可用线性规划来做.

变式题:(2005·日照市一轮统考题)有一批影碟机(VCD)原销售价为每台 800 元,在甲、乙两家家电商场均有销售.甲商场用如下的方法促销:买一台单价为 780 元,买两台单价为 760 元,依次类推,每多买一台则所买各台单价均再减少 20 元,但每台最低不能低于 440 元;乙商场一律都按原价的 75%销售,某单位需购买一批此类影碟机,问去哪家商场购买花费较少?

解:设某单位购买 x 台影碟机,甲,乙两商场的购货款的差价为 y,则去甲商场购买共花费$(800-20x)x$,由题意知 $800-20x\geqslant 440$,∴ $1\leqslant x\leqslant 18$.

去乙商场购买共花费 $600x$,$x\in \mathbf{N}^*$.

$$\therefore\ y=\begin{cases}(800-20x)x-600x, & 1\leqslant x\leqslant 18,\\ 440x-600x, & x>18,\end{cases}(x\in\mathbf{N}^*)$$

$$\therefore\ y=\begin{cases}200x-20x^2, & 1\leqslant x\leqslant 18,\\ -160x, & x>18,\end{cases}(x\in\mathbf{N}^*)$$

$$\therefore\ \begin{cases}y>0\text{ 时}, & 1\leqslant x\leqslant 10,\\ y=0\text{ 时}, & x=10,\\ y<0\text{ 时}, & x>10.\end{cases}$$

故若买少于 10 台,去乙商场花费较少;若买 10 台去甲、乙商场花费一样;若买超过 10 台,去甲商场花费较少.

3.诱思探究 思维激活

例 9 (2005·烟台市一轮统考题)已知 $f(x)=ax^2+bx$,且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,$3\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$的范围.

解:由$\begin{cases}f(-1)=a-b,\\ f(1)=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)],\\ b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

又 $f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$得:

$6\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

温馨提示:此类问题的求解,容易把不等式条件放宽,或非等价转化,从而出现解题错误,下列求解的过程是错误的:

由 $f(1)=a+b$,$f(-1)=a-b$,

解得$\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2, & ①\\ 3\leqslant a+b\leqslant 4. & ②\end{cases}$

①+②得:$2\leqslant a\leqslant 3$. ③

①+(-1)②,得$\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant\frac{3}{2}$. ④

又 $f(-2)=4a-2b$,$4\times$③$+(-2)\times$④得:$5\leqslant 4a-2b\leqslant 11$,即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 11$.

出现错误的原因是:由①②可推出③④,而③④不一定能使①②成立,即③④是①②的必要而不充分条件,是非等价转化,扩大了 a,b 的取值范围.

变式题:(2005·潍坊市一轮统考题)已知:$f(x)=ax^2-c$,且$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,试求 $f(3)$的取值范围.

解:由$\begin{cases}a-c=f(1),\\ 4a-c=f(2).\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\\ -c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2).\end{cases}$

∴ $f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

又$\begin{cases}-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3},\\ \frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}.\end{cases}$ ∴ $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

例 10 (2005·高考备考全真模拟卷七)已知$a<b<c$,$x<y<z$,则 $ax+by+cz$,$ax+cy+bz$,$bx+ay+cz$,$bx+cy+az$ 中最大是哪一个?

解:$(ax+by+cz)-(ax+cy+bz)=(b-c)(y-z)>0$,

$(bx+ay+cz)-(bx+cy+az)=(a-c)(y-z)>0$,

$(ax+by+cz)-(bx+ay+cz)=(a-b)(x-y)>0$,

∴ 最大的是 $ax+by+cz$.

温馨提示:可先用特殊值法对 a、b、c、d、x、y、z 取值初步判断大小,再用比较法论证.

变式题:(2005·全国大联考二)已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$,当 p,q 满足 $p+q=1$ 时,试证明:$pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$对于任意实数 x,y 都成立的充要条件是 $0\leqslant p\leqslant 1$.

证明:$pf(x)+qf(y)-f(px+qy)=p(x^2+ax+b)+q(y^2+ay+b)-(px+qy)^2-a(px+qy)-b=p(1-p)x^2+q(1-q)y^2-2pqxy=pq(x-y)^2$,

①若 $0\leqslant p\leqslant 1$,$q=1-p\in[0,1]$,

∵ $pq\geqslant 0$,∴ $pq\cdot(x-y)^2\geqslant 0$.

∴ $pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$.

②当 $pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$时,

$pq(x-y)^2\geqslant 0$,∵ $(x-y)^2\geqslant 0$,

∴ $pq\geqslant 0$.即 $p(1-p)\geqslant 0$.

∴ $0\leqslant p\leqslant 1$.∴ 原命题成立.

例 11 (2005·红太阳单元测试卷)船在流水中在甲地和乙地间来回行驶一次的平均速度和船在静水中的速度是否相等,为什么?

解:设甲地至乙地的距离为 s,船在静水中的速度为 u,水流速度为 $v(u>v>0)$,则船在流水中在甲乙间来回行驶一次的时间为:

$t=\frac{s}{u+v}+\frac{s}{u-v}=\frac{2us}{u^2-v^2}$,

平均速度:$\bar{u}=\frac{2s}{t}=\frac{u^2-v^2}{u}$.

∵ $\bar{u}-u=\frac{u^2-v^2}{u}-u=-\frac{v^2}{u}<0$,

∴ $\bar{u}<u$.∴ 不相等.

温馨提示:注意作差法比较大小的应用.

变式题:(2005·临沂市二轮统考题)设 $a>0$ 且 $a\neq 1$,$t>0$,比较$\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$的大小,并证明你的结论.

解:$\log_a\frac{t+1}{2}-\frac{1}{2}\log_a t=\log_a\frac{t+1}{2}-\log_a\sqrt{t}=\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}$,

$\because t>0, t+1-2\sqrt{t}=(\sqrt{t}-1)^2\geqslant 0$,

$\therefore t+1\geqslant 2\sqrt{t}$($t=1$时取等号).

$\therefore \frac{t+1}{2\sqrt{t}}\geqslant 1$. $\therefore t=1$时 $\log_a\frac{t+1}{2}=\frac{1}{2}\log_a t$.

$a>1$时,$\log_a\frac{t+1}{2}>\frac{1}{2}\log_a t\ (t\neq 1)$.

$0<a<1$时,$\log_a\frac{t+1}{2}<\frac{1}{2}\log_a t$.

例 12 我们知道,在$\triangle ABC$中,若$c^2=a^2+b^2$,则$\triangle ABC$是直角三角形.现在请你研究:若$c^n=a^n+b^n\ (n>2)$,问$\triangle ABC$是何种三角形?为什么?

解:令$n=3,a=1,b=1$,则$c=\sqrt[3]{2}\approx 1.26$.

画以(1,1,1.26)为三边的三角形草图,易观察知是锐角三角形.

上述用特殊值试验的结论具有一般性,请看如下的分析证法.

$\because c^n=a^n+b^n(n>2)$,

$\therefore c>a,c>b$,由c是$\triangle ABC$的最大边,

所以要证$\triangle ABC$是锐角三角形,只需证C为锐角,

即证$\cos C>0$就行了.

$\because \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$\therefore$ 要证$\cos C>0$,只要证$a^2+b^2>c^2$(1).

要注意条件$a^n+b^n=c^n$,于是将(1)等价变形为:

$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$,

$\because c>a,c>b,n>2$,$\therefore c^{n-2}>a^{n-2},c^{n-2}>b^{n-2}$,

即:$c^{n-2}-a^{n-2}>0,c^{n-2}-b^{n-2}>0$.

从而$(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n$

$=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$,

说明(1)式成立.

故$\cos C>0$,C是锐角,$\triangle ABC$是锐角三角形.

温馨提示:本题是一道难得的好题.条件较为抽象,可先取一些特殊值试探一下.由特殊到一般的探究方法是一种重要解题思维方法横跨几何,三角,代数三学科,显示了其综合性.

4.高考经典 思维激活

例 13 (2003·北京春季高考)设$a,b,c,d\in\mathbf{R}$且$a>b$,$c>d$,则下列结论中正确的是( )

A. $a+c>b+d$　　B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$　　D. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

解析:$\because a>b,c>d$,$\therefore a+c>b+d$.

答案:A.

温馨提示:本题主要考查不等式的基本性质—同向可加性.

例 14 (2001·上海春季高考题)若a、b为实数,则$a>b>0$是$a^2>b^2$的( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析:由$a>b>0$得$a^2>b^2$,反过来若$a^2>b^2$,则可能$a<b<0$,故$a>b>0$是$a^2>b^2$的充分不必要条件.

答案:A.

温馨提示:主要考查不等式的基本性质及充要条件.明确充分性与必要性的判定方法,注意不等式性质的双向性与单向性.

例 15 (1999·上海理)若$a<b<0$,则下列结论中正确的是( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

C. 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立

D. 不等式$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立

解析:$\because b<0$,$\therefore -b>0$.$\therefore a-b>a$.

又$\because a-b<0,a<0$,$\therefore \frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$.故$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$不成立.

$\because a<b<0$,$\therefore |a|>|b|$.

$\therefore \frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$,故$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$不成立.

由此可选B.另外,A中$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立,C与D中$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$成立,证明如下:

$\because a<b<0,\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$,$\therefore a+\frac{1}{b}<b+\frac{1}{a}<0$.

$\therefore \left|a+\frac{1}{b}\right|>\left|b+\frac{1}{a}\right|$,故$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$.

答案:B.

温馨提示:主要考查不等式的基本性质,敏锐的判断力,灵活运用知识解决问题的能力,解决该题,除利用不等式的基本性质正面推导外,还可利用举例验证排除错误答案.

学习探究

1.不等式的性质是解证不等式的基础,对任意两实数a,b,有$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.这是比较两数大小的理论依据,也是学习不等式的基石.

2.对不等式两边乘方,开方,同乘以一个数(或式子)时,根据不等式的性质定理,要考虑到值的符号,有时需进行讨论或改变不等号的方向.

3.基本题型:(1)利用性质判断命题真假.(2)两数大小比较.(3)利用不等式求范围.(4)不等式性质的综合应用.

潜能开发

轻松学习 夯实基础

1.(2005·高考冲刺卷)已知真命题:"$a\geqslant b\Rightarrow c>d$"和"$a<b\Leftrightarrow e\leqslant f$",那么"$c\leqslant d$"是"$e\leqslant f$"的( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2.(2005·江西金太阳卷)若α,β满足$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则$2\alpha-\beta$的取值范围为( )

A. $-\pi<2\alpha-\beta<0$　　B. $-\pi<2\alpha-\beta<\pi$

C. $-\frac{3}{2}\pi<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$　　D. $0<2\alpha-\beta<\pi$

3.(2005·临沂市一轮统考)以下四个不等式①$a<0<b$;②$b<a<0$;③$b<0<a$;④$0<b<a$.其中使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的充分条件有______.

4.(2005·全国大联考三)

已知三个不等式①$ab>0$;②$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$;③$bc>ad$.以其中两个做条件,余下一个做结论,则可以组成____个正确命题.

快乐延伸　提升能力

5.(日照市一轮统考)$20<a<34$,$24<b<60$,求$a+b$,$a-b$,及$\frac{a}{b}$的范围.

6.(2005·高考备考全真模拟题)

已知$a,b,c\in\mathbf{R}^+$且$a>b>c$,则$\sqrt{ab}$,$\sqrt{bc}$,$\sqrt{ac}$,c从小到大的排列顺序是________.

7.(2005·潍坊市一轮统考题)已知$|a+b|<-c(a,b\in\mathbf{R})$,给出下列不等式:①$a<-b-c$;②$a>-b+c$;③$a<b-c$;④$|a|<|b|-c$;⑤$|a|<-|b|-c$.其中一定成立的不等式是______.

8.(2005·江西金太阳模拟卷)设$0<x<1$,$a>0$,$a\neq\frac{1}{3}$,试比较:$|\log_{3a}(1-x)^3|$与$|\log_{3a}(1+x)^3|$的大小.

思维拓展　综合创新

9.(2004·全国大联考六)

已知:x,y是非零实数,试比较$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$与$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的大小.

10.(2005·全贴近冲刺卷一)

已知$a,b\in\mathbf{R}^+$,且$a>b$,求证:$a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

11.(2004·江西金太阳卷五)

已知:$0<x<1$,$a>0$,$a\neq1$,试比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

6.2　算术平均数与几何平均数

学海导航

均值不等式是不等式中的重要内容,也是历年高考重点考查的知识点之一,它的应用范围几乎涉及高中数学的所有章节,且常考常新,但是它在高考中却不外乎于大小判断,求最大(小)值、求取值范围以及最值时刻,证明不等式等五方面的应用.

精彩观点

1.均值不等式:

①$a,b\in\mathbf{R}$,则$a^2+b^2\geqslant2ab$;

②$a>0,b>0$则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$;

③$a>0,b>0,c>0$,则$a^3+b^3+c^3\geqslant3abc$;

④$a>0,b>0,c>0$,则$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

2.几个常用基本变形:

①设$a,b\in\mathbf{R}$,则$a^2\geqslant0$,$(a-b)^2\geqslant0$(分别当且仅当$a=0$,$a=b$时取等号);

②$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$也可记作:$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$ $(a,b\in\mathbf{R})$;

③$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2(a,b,c\in\mathbf{R})$;

④$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R}^+)$.

3.课本上只有二元基本不等式,但三元基本不等式有时用起来较方便,所以最好记住并了解其简单应用.

4.均值不等式的功能在于"和与积"的互化.若所证不等式可变形成一边为和,另一边为积的形式,则可以考虑使用上述均值不等式.构造运用均值不等式解题的常用技巧是拆添项或配凑因式.

5."和定积最大,积定和最小"即$n(n=2,3)$个正数和为定值,可求其积的最大值,积为定值,则可求其和的最小值,用均值不等式求函数的最大(小)值是高中教学的一个重点,也是近几年高考的一个热点.三个必要条件——即一正(各项的值为正),二定(各项的和或积为定值),三相等(取等号的条件)更是相关考题的瞄准的焦点.在具体题目中,"正数"条件往往易从题设中获得解决,"相等"条件也易验证确定,而要获得"定值"条件却常常被设计为一个难点,它需要一定的灵活性和变形技巧.因此,"定值"条件决定着均值不等式应用的可行性,这是解题成败的关键.

典例精析

1.学科综合　思维激活

例1　(2005·黄冈模拟)若$a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg\frac{a+b}{2}$,则(　　)

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

解法1:(应用二元均值不等式)

$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}<\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$

$=Q=\lg\sqrt{ab}<\lg\frac{a+b}{2}=R.$

解法2:(特殊值法)

取 $a=100,b=10$ 则 $P=\sqrt{2},Q=1.5$,

$R=\lg\frac{110}{2}>\lg\frac{100}{2}=2-\lg 2>Q>P.$

答案:B.

温馨提示:$\because a>b>1,\lg a>0,\lg b>0,\lg\frac{a+b}{2}>0$, $\therefore P,Q,R$ 均为正数,且呈现二元均值不等式形式,考虑用二元均值不等式解题.本题解法2,使用特殊值法,凡类似此类不等式的选择,填空题使用特殊值法,常能得到快捷的解法.

变式题:(2005·烟台市一轮统考)设 $a、b、x、y$ 都是正数且 $a\neq b,x+y=1,P=\frac{1}{ax+by},Q=(2-a)x+(2-b)y$,比较 $P、Q$ 的大小.

解:$P-Q=\frac{1}{ax+by}-[(2-a)x+(2-b)y]=\frac{1}{ax+by}-[2(x+y)-(ax+by)]=\frac{1}{ax+by}+(ax+by)-2$

由于 a,b,x,y 均大于0,$\therefore ax+by>0$.

于是由均值定理有:$P-Q\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ax+by}\cdot(ax+by)}-2=0$,

$\therefore P\geqslant Q$,其中 $\frac{1}{ax+by}=ax+by$,即 $ax+by=1$ 时等号成立.

例2　(2005·临沂市一轮统考题)

已知 $x<\frac{5}{4}$,求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

解:$\because x<\frac{5}{4},\therefore 5-4x>0$.

$\therefore y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3$

$\leqslant -2+3=1$,

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$ 即 $x=1$ 时,上式等号成立.

故当 $x=1$ 时,$y_{\max}=1$.

温馨提示:因为 $4x-5<0$,所以首先要"调整"符号;又 $(4x-2)\cdot\frac{1}{4x-5}$ 不是常数,所以对 $4x-2$ 要进行拆添项"配凑".

变式题:(2005·高考模拟开天卷)下列命题中正确的是(　　)

A. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ 成立,当且仅当 $a,b\in(0,+\infty)$

B. $\tan\theta+\cot\theta\geqslant 2$,当且仅当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时成立

C. $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$,当且仅当 $a,b\in(1,+\infty)$ 时成立

D. $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2$,当且仅当 $a\neq 0$ 时成立

答案:D.

例3　(2004·临沂市二轮统考题)已知 $x>0,y>0$,且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,求 $x+y$ 的最小值

解法1:$\because x>0,y>0,\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,

$\therefore (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=x+y$.

即 $x+y=\frac{y}{x}+9\cdot\frac{x}{y}+10\geqslant 6+10=16$,当且仅当 $\frac{y}{x}=9\cdot\frac{x}{y}$,又 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,

即 $x=4,y=12$,上式等号成立.

故当 $x=4,y=12$ 时,$(x+y)_{\min}=16$.

解法2:由 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,得 $(x-1)(y-9)=9$(定值)又知 $x>1,y>9$,所以当且仅当 $x-1=y-9=3$ 即 $x=4,y=12$ 时,$(x+y)_{\min}=16$.

温馨提示:本题的困难在于如何使用条件 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,如果从中解出 x 或 y,再代入 $x+y$ 转化为一元函数的最值问题,显然是比较复杂的.这时我们可没法整体地使用条件.此题还可以利用三角换元法,判别式法,数形结合法等求解.请读者自己去探索.此外,请读者分析下面的解法错在何处?

$\because x>0,y>0$,且 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,

$\therefore (x+y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)(x+y)\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{xy}}\cdot 2\sqrt{xy}=12$.

故 $(x+y)_{\min}=12$.

变式题:(2005·潍坊市一轮统考题)已知正数 x,y 满足 $x+2y=1$,求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值

解:因为 $x+2y=1$,

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}$,

因为 x,y 为正数,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$,

即当 $x=\sqrt{2}-1,y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

温馨提示:本题若由 $1=x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$,得 $\frac{1}{\sqrt{xy}}\geqslant 2\sqrt{2}$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2}{\sqrt{xy}}\geqslant 4\sqrt{2}$ 是错误的,因为等号取不到,因此,列出等号成立的条件不但是解题的主要步骤,也是检验转换是否有误的一种方法.

2. 创新应用　思维激活

例4　(2004·高考启天卷)在某两个正数 $x、y$ 之间,若插入一个正数 a,使 $x、a、y$ 成等比数列;若另插入两个正数 $b、c$,使 $x、b、c、y$ 成等差数列.求证:$(a+1)^2\leqslant(b+1)(c+1)$.

证明:由题设得:

$$\begin{cases}a^2=xy,\\2b=x+c,\\2c=b+y.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=\sqrt{xy},\\b=\dfrac{2x+y}{3},\\c=\dfrac{x+2y}{3}.\end{cases}$$

$\therefore (b+1)(c+1)=bc+b+c+1$

$=\frac{1}{9}(2x+y)(x+2y)+x+y+1$

$=\frac{1}{9}[2(x^2+y^2)+5xy]+(x+y)+1$

$\geqslant\frac{1}{9}(4xy+5xy)+2\sqrt{xy}+1=(\sqrt{xy}+1)^2=(a+1)^2.$

$\therefore (a+1)^2\leqslant(b+1)(c+1).$

温馨提示:本题中的两个数列是通过 x,y 联系在一起,因此我们可设法把 a、b、c 用 x、y 表示出来,以达到减元的目的.

变式题:在某两个正数 x、y 之间,若插入一个数 a,使 x、a、y 成等差数列;若另插入两个数 b、c,使 x、b、c、y 成等比数列.求证:$(a+1)^2\geqslant(b+1)(c+1)$.

证明:由题设得:

$$\begin{cases}2a=x+y,\\b^2=xc,\\c^2=by.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=\dfrac{x+y}{2},\\b=\sqrt[3]{x^2y},\\c=\sqrt[3]{xy^2}.\end{cases}$$

$\therefore (b+1)(c+1)=(\sqrt[3]{x^2y}+1)(\sqrt[3]{xy^2}+1)$

$=xy+\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}+1$

$\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\frac{2x+y}{3}+\frac{x+2y}{3}+1$

$=\frac{1}{4}(x^2+y^2+2xy)+x+y+1$

$=\frac{1}{4}(x^2+y^2+4+2xy+4x+4y)$

$=\frac{1}{4}(x+y+2)^2=\left(\frac{x+y}{2}+1\right)^2=(a+1)^2.$

$\therefore (a+1)^2\geqslant(b+1)(c+1).$

例 5 (2005·高考开元卷)设 $a>0,b>0,a^2+\frac{b^2}{2}=1$,则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是______.

解:由已知 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$,得 $2a^2+b^2=2$.

$a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{a^2(1+b^2)}=\sqrt{2a^2\cdot\frac{(1+b^2)}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2a^2\cdot(1+b)^2}$

$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2a^2+1+b^2}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

当且仅当 $2a^2=1+b^2$ 时等号成立.

温馨提示:此题用到开平方方法做题技巧,转化为求积的最大值,可用基本不等式来求.注意此题虽不能直接用基本不等式,但通过转化后可用,"转化"是我们解此类题的常用技巧.

变式题:(2005·南昌市一轮统考题)已知:$2b+ab+a=30(a>0,b>0)$,求 ab 的最大值.

解:$30=ab+a+2b\geqslant ab+2\sqrt{2ab}$,

$$\therefore\begin{cases}ab+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}-30\leqslant0,\\ab>0.\end{cases}$$

$\therefore 0<\sqrt{ab}\leqslant3\sqrt{2}$. $\therefore ab\leqslant18$.

当且仅当 $a=2b$ 时取等号.

$\therefore ab$ 的最大值为 18.

例 6 (2005·高考启天卷)某商店经销某商品,年销售量为 D 件,每件商品库存费用为 I 元,每批进货量为 Q 件,每次进货所需费用为 S 元,现假定商店在卖完该货物时立即进货,使库存量为平均 $\frac{Q}{2}$ 件,问每批进货量 Q 多大时,整个费用最省?

解:设整个费用 y 元,则 y 含有两部分,一部分是库存费用 $\frac{Q}{2}\cdot I$;另一部分是进货费用 $\frac{D}{Q}\cdot S$,因此,$y=\frac{Q}{2}\cdot I+\frac{D}{Q}\cdot S$,其中 D,I,S 均为定值,Q 为变量.

$\because D,I,S,Q>0$,

$\therefore y=\frac{Q}{2}\cdot I+\frac{D}{Q}\cdot S\geqslant2\sqrt{\frac{QI}{2}\cdot\frac{DS}{Q}}=\sqrt{2DIS}.$

当且仅当 $\frac{IQ}{2}=\frac{DS}{Q}$,即 $Q=\sqrt{\frac{2DS}{I}}$ 时,整个费用 y 最省.

温馨提示:近年来,平均不等式在高考试题中的实际应用题中频频使用,是高考试题的热点内容.

变式题:(2005·黄冈模拟卷)某食品厂定期购买面粉,已知该厂每天需用面粉 6 吨,每吨面粉的价格为 1 800 元,面粉的保管等其他费用为平均每吨每天 3 元,购面粉每次需支付运费 900 元.

(1)求该厂多少天购买一次面粉,才能使平均每天所支付的总费用最少?

(2)若提供面粉的公司规定:当一次购买面粉不少于 210 吨时,其价格可享受 9 折优惠(即原价的 90%),问该厂是否考虑利用此优惠条件?请说明理由.

解:(1)设该厂应每隔 x 天购买一次面粉,其购买量为 $6x$ 吨,

由题意知,面粉的保管等其他费用为:

$3[6x+6(x-1)+\cdots+6\times2+6\times1]=9x(x+1)$,

设平均每天所支付的总费用为 y_1 元,则

$y_1=\frac{1}{x}[9x(x+1)+900]+6\times1\,800$

$=\frac{900}{x}+9x+10\,809\geqslant2\sqrt{\frac{900}{x}\cdot9x}+10\,809=10\,989$,

当且仅当 $9x=\frac{900}{x}$,即 $x=10$ 时取等号.

即该厂每隔 10 天购买一次面粉,才能使平均每天所支付的总费用最少.

(2)若厂家利用此优惠条件,则至少每隔 35 天购买一次面粉设该厂利用此优惠条件后,每隔 $x(x\geqslant35)$ 天,购买一次面粉,平均每天支付的总费用为 y_2 元,则

$y_2=\frac{1}{x}[9x(x+1)+900]+6\times1\,800\times0.90$

$=\frac{900}{x}+9x+9\ 729\ (x\geqslant 35)$,

令 $f(x)=x+\frac{100}{x}$,

$f'(x)=1-\frac{100}{x^2}\geqslant 1-\frac{100}{35^2}>0\ (x\geqslant 35)$,

$\therefore$ $f(x)=x+\frac{100}{x}$,当 $x\geqslant 35$ 时为增函数.

$\therefore$ 当 $x=35$ 时,$f(x)$有最小值,此时 $y_2<10\ 989$.

$\therefore$ 该厂应接受此优惠条件.

例 7 (2005·全国大联考二)已知:a、b、c 为正数,求证:$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geqslant 3$.

证法 1:利用基本不等式.

$\because$ a、b、c 为正数,

$\therefore$ 左边$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-3\geqslant 2+2+2-3=3$ (当且仅当 $a=c=b$ 时取等号),

即 $\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geqslant 3$.

证法 2:

左边$=\left(\frac{b+c-a}{a}+1-1\right)+\left(\frac{c+a-b}{b}+1-1\right)$

$+\left(\frac{a+b-c}{c}+1-1\right)$

$=\left(\frac{a+b+c}{a}-2\right)+\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)+\left(\frac{a+b+c}{c}-2\right)$

$=(a+b+c)\frac{1}{a}+(a+b+c)\frac{1}{b}+(a+b+c)\frac{1}{c}-6$

$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-6$

$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}-6=3$

(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

温馨提示:本组例题中先在不等式的一端进行恒等变形,使之具备基本不等式的结构与条件,然后再利用基本不等式给予证明.

变式题:(2005·青岛市一轮统考题)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

证明:$\because$ $a^2+b^2\geqslant 2ab$,

$\therefore$ $2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$,

即 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$.

$\because$ $a,b\in\mathbf{R}^+$,$\therefore$ $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

同理,$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{b+c}{\sqrt{2}}$,$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{a+c}{\sqrt{2}}$.

三式相加得:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

温馨提示:$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$,从而 $a^2+b^2\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.可推广到 $a,b\in\mathbf{R}^+$,所以可以证明 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 时不等式 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$仍成立.

例 8 (2005·江西金太阳模拟卷)(1)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a+b+c=1$,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

(2)已知:$a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 且 $a^2+b^2=1,c^2+d^2=1$,

求证:$|ac+bd|\leqslant 1$.

证明:(1)由不等式的次数特点.

$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2+a^2+b^2+c^2)$

$\geqslant\frac{1}{3}(2ab+2bc+2ac+a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$.

(2)**证法 1:**(平方法)

$\because$ $(ac+bd)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$,

$\therefore$ $|ac+bd|\leqslant 1$.

证法 2:用平均值不等式及绝对值不等式性质.

$1=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\geqslant|ac|+|bd|\geqslant|ac+bd|$.

温馨提示:利用综合法证明不等式,揭示已知条件和结论之间的因果关系是关键,对于条件不等式的证明,还要合理应用已知条件.

变式题:(2004·临沂市二轮模拟题)

已知:a、b、c 为互不相等的正数,且 $abc=1$,求证:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

证明:$\because$ $abc=1$,且 a、b、c 为互不相等的正数,

$\therefore$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=bc+ac+ab=\frac{bc+ac}{2}+\frac{ac+ab}{2}+\frac{ab+bc}{2}>\sqrt{abc^2}+\sqrt{a^2bc}+\sqrt{ab^2c}=\sqrt{c}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

$\therefore$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

3. 诱思探究 思维激活

例 9 (2005·全贴近冲刺)过点(1,4)作直线,使它在两坐标轴上的截距为正,且它们的和最小,求该直线的方程.

解:设所求直线方程为 $y-4=k(x-1)$,

由题意知 $k<0$,则直线在 x 轴,y 轴上的截距分别为

$a=1-\frac{4}{k}>0,b=4-k>0$,

$a+b=\left(1-\frac{4}{k}\right)+(4-k)=5+\left(-\frac{4}{k}\right)+(-k)$

$\geqslant 5+2\sqrt{\left(-\frac{4}{k}\right)(-k)}=9$

(当且仅当$-\frac{4}{k}=-k$ 且 $k<0$,即 $k=-2$ 时取等号).

$\therefore$ 当 $k=-2$ 时,$(a+b)_{\min}=9$.

故所求直线方程为 $2x+y-6=0$.

温馨提示:(1)错解:$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{\left(1-\frac{4}{k}\right)(4-k)}$

($1-\frac{4}{k}=4-k,k<0$ 即 $k=-1$ 时取等号)①

$=2\sqrt{8+\left(-\frac{16}{k}\right)+(-k)}\geqslant 2\sqrt{8+2\left(-\frac{16}{k}\right)(-k)}$

$=2\sqrt{8+8}=8$

$\left(-\frac{16}{k}=-k, k<0\text{ 即 }k=-4\text{ 时取等号}\right)$②

错在①和②两次利用均值不等式,把两次取等号的不同条件误认为同一个.

(2)若在同一题中两次利用均值不等式求最值,两次取等号的条件必须相同才能用.

变式题:(2005·济南市模拟卷)设直角三角形三边之和为P,试求这个直角三角形的最大面积.

解:设直角三角形的两直角边长分别为x、y,则斜边长为$\sqrt{x^2+y^2}$,根据题意有$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=P$,

$\because x,y\in\mathbf{R}^+$,$\therefore x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$.

$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\sqrt{2xy}$.

(当且仅当$x=y$时取等号)

$\therefore x+y+\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 2\sqrt{xy}+\sqrt{2xy}$.

即$P\geqslant(2+\sqrt{2})\sqrt{xy}$.

$\therefore xy\leqslant\frac{P^2}{(2+\sqrt{2})^2}$.

$\therefore$ 当$x=y=\frac{P}{2+\sqrt{2}}$时,面积有最大值$\frac{P^2}{2(2+\sqrt{2})^2}$.

例 10 设在三棱锥P-ABC中,$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$,且其所有棱长之和为$l$,求该三棱锥体积的最大值.

解:设$PA=a$,$PB=b$,$PC=c$,

则$AB=\sqrt{a^2+b^2}$,$BC=\sqrt{b^2+c^2}$,$CA=\sqrt{c^2+a^2}$,

$\therefore l=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$.

由题设知$PA\perp PC$,$PA\perp PB$,

$\therefore PA\perp$面PBC.

$\therefore$ 三棱锥P-ABC的体积为:

$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}bc\right)\cdot a=\frac{1}{6}abc$.

$\because a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{6V}$(当且仅当$a=b=c$时取等号),

又$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$

$\geqslant\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}\geqslant 3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{6V}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{6V}$

$=3\sqrt{2}\sqrt[3]{6V}$(当且仅当$a=b=c$时取等号).

$\therefore l=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{6V}+3\sqrt{2}\sqrt[3]{6V}=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$,

$V\leqslant\frac{1}{6}\left[\frac{l}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}l\right)^3$.

温馨提示:本题解法中关键之处是运用"方程"的思想,先把体积V当作已知数,用V"表示"$(a+b+c)$和$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$,从而"表示"$l$,然后从不等式中仅解出$V\leqslant f(l)$.

变式题:(2004·黄冈模拟卷)三个数x、y、z成等比数列,$x+y+z=k(k>0)$,则y的取值范围是( )

A. $\left(0,\frac{k}{3}\right]$　　B. $[-k,0)$

C. $\left[-k,-\frac{k}{3}\right]$　　D. $[-k,0)\cup\left(0,\frac{k}{3}\right]$

解析:设三数为x、y、z组成的等比数列的公比为q,则三数为$\frac{y}{q}$,y,yq,又$x+y+z=k$,

$\therefore y\left(\frac{1}{q}+q+1\right)=k$. 当$q>0$时,$q+\frac{1}{q}\geqslant 2$,

$\therefore 0<y=\frac{k}{q+\frac{1}{q}+1}\leqslant\frac{k}{3}$. $\therefore 0<y\leqslant\frac{k}{3}$.

当$q<0$时,$q+\frac{1}{q}\leqslant-2$,$\therefore 0>y=\frac{k}{q+\frac{1}{q}+1}\geqslant -k$.

$\therefore y\in[-k,0)\cup\left(0,\frac{k}{3}\right]$.

答案:D.

例 11 (2005·济宁市一轮统考题)

(1)函数$y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}(x>1)$的最小值是______.

(2)函数$y=\sin^2\theta\cdot\cos\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$的最大值是____.

(3)已知:$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$($\alpha$、$\beta$、$\gamma$均为锐角),则$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$的最大值是______.

解:(1)$y=\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\geqslant 2$,

当且仅当$\sqrt{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$,即$x=2$时,$y$取最小值.

(2)$y^2=\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta$

$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot 2\cos^2\theta\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{3}\right)^3$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$.

当且仅当$\sin^2\theta=2\cos^2\theta$,即$\tan^2\theta=2$,$\tan\theta=\sqrt{2}$时,

$y^2_{\max}=\frac{4}{27}$,故$y_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}(y>0)$.

(3)$\because\alpha,\beta,\gamma$均为锐角,

$\therefore\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma}$

$\leqslant\sqrt{\left(\frac{1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta+1-\sin^2\gamma}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$,

当且仅当$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=\frac{1}{3}$时,上式取等号.

即$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$的最大值为$\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

温馨提示:利用两个正数或三个正数的平均值不等式求函数的最大值或最小值,应注意三个必备条件:"一正二定三相等"缺一不可.若三个条件不完全符合,可通过凑配使之符合应用基本不等式的条件.

变式题:(2005·全国100所名校示范卷四)

(1)函数$y=\frac{(a-b)x}{x^2+ab}(x>0,a>0,b>0)$的最大值是_______.

(2)已知:$x>0$,$y>0$且$3x+4y=12$,则$\lg x+\lg y$的最大值是_______.

解:(1)$y=\frac{(a-b)x}{x^2+ab}=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ $(a>0,b>0,x>0)$,

当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$ 即 $x=\sqrt{ab}$ 时，$y_{\max}=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

(2) ∵ $x>0, y>0, 3x+4y=12$,

∴ $xy=\frac{1}{12}\cdot 3x\cdot 4y\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{3x+4y}{2}\right)^2=3$.

当且仅当 $3x=4y=6$，即 $x=2, y=\frac{3}{2}$ 时，$\lg x+\lg y$ 取最大值 $\lg 3$.

例 12 (2005·全国100所名校示范卷六)

已知 $a^2+b^2+c^2=1, x^2+y^2+z^2=9$，且 $a、b、c、x、y、z$ 均为非零实数，求 $ax+by+cz$ 的最大值.

解：∵ $\frac{ax+by+cz}{3}=a\cdot\frac{x}{3}+b\cdot\frac{y}{3}+c\cdot\frac{z}{3}$

$\leqslant\frac{a^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2}+\frac{b^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2}{2}+\frac{c^2+\left(\frac{z}{3}\right)^2}{2}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{18}=1$,

∴ $ax+by+cz\leqslant 3$.

当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{1}{3}$ 时取等号.

温馨提示：(1) 错解：∵ $ax+by+cz\leqslant\frac{a^2+x^2}{2}+\frac{b^2+y^2}{2}+\frac{c^2+z^2}{2}=\frac{1+9}{2}=5$，∴ $ax+by+cz$ 的最大值为 5.

(2) 认为 $ax+by+cz$ 的最大值为 5，就是忽略了"等号成立的条件"的制约作用，因为上面的不等式等号成立的条件是 $a=x, b=y, c=z$，即 $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$，从而 $1=9$，矛盾. 所以要调使 $k^2(a^2+b^2+c^2)=x^2+y^2+z^2=9$ 即 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{1}{3}$.

变式题：已知 $a, b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求

$y=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$ 的最小值.

解：$y=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant ab+\frac{1}{ab}+2=\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2=\left(4\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}-3\sqrt{ab}\right)^2\geqslant\left(4-3\cdot\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(4-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，y 的最小值为 $\frac{25}{4}$.

温馨提示：(1) 错解：$y=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $ab=\frac{1}{ab}, \frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ 时，即 $a=1, b=1$ 时，y 的最小值为 4.

(2) 上述解法显然是错误的，因为当 $a=1, b=1$ 时，$a+b=2$，而不是 $a+b=1$，照这样的解法，似乎无论 $a+b$ 等于多少，$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$ 的最小值总是 4，错误主要在于两次利用均值不等式，等号不能同时成立，故 y 的值不可能为 4，事实上当 $\begin{cases}ab=\frac{1}{ab},\\ a+b=1\end{cases}$ 时是无解的.

4. 高考经典 思维激活

例 13 (1999·全国) 若正数 $a、b$ 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是________.

解析：令 $\sqrt{ab}=t(t>0)$，由 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，得 $t^2\geqslant 2t+3$.

解得 $t\geqslant 3$，即 $\sqrt{ab}\geqslant 3$，故 $ab\geqslant 9$.

答案：$ab\geqslant 9$.

温馨提示：本题主要考查均值不等式及一元二次不等式的解法.

例 14 若实数 a, b 满足 $a+b=2$，则 3^a+3^b 的最小值是____.

解析：$3^a+3^b\geqslant 2\sqrt{3^a\cdot 3^b}=2\sqrt{3^{a+b}}=6$.

当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，故 3^a+3^b 的最小值是 6.

答案：6.

温馨提示：此题主要考查均值不等式的应用.

例 15 (2000·全国高考) 若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\frac{a+b}{2}$，则 (　　)

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

解析：∵ $a>b>1$，∴ $\lg a\neq\lg b$.

则 $\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)>\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,

即 $Q>P$.

又 $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)=\lg\sqrt{ab}$，$R=\lg\frac{a+b}{2}$,

又 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，∴ $R>Q$.

故 $R>Q>P$.

答案：B.

温馨提示：(1) 本题主要考查对数函数的性质，运算法则，及均值不等式的应用.

(2) 比较大小时，对代数式适当变形有利于问题解决. 其次掌握一些常见结论：若 $a>b>0$，则 $a>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 可迅速解题.

例 16 (2000·高考新课程卷) 用总长 14.8 m 的钢条制作一个长方体容器的框架，如果所制作容器的底面一边比另一边长 0.5 m，那么高为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积.

解：设容器的底面短边长为 x m，有另一边长 $(x+0.5)$ m，并设容积为 y m³，则高为

$\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=3.2-2x$,

从而 $y=x(x+0.5)(3.2-2x)\ (0<x<1.6)$

$=\frac{1}{15}\cdot 3x(2x+1)(8-5x)$

$\leqslant\frac{1}{15}\left(\frac{3x+2x+9-5x}{3}\right)^3=1.8$,

上式等号当且仅当 $3x=2x+1=8-5x$,

即 $x=1$ 时成立. 这时，高为 $3.2-2\times 1=1.2$.

所以，容器的高为 1.2 m 时容积最大. 最大容积为 1.8 m³.