国家教育部
规划教材

中等师范学校数学教科书（试用本）

# 代数与初等函数

## 第二册

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

中等师范学校数学教科书

（试用本）

# 代数与初等函数

## 第 二 册

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

中等师范学校数学教科书（试用本）

**代数与初等函数**

第二册

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人民教育出版社出版发行

**网址**：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：14　字数：220 000

1999 年 12 月第 1 版　2006 年 3 月第 7 次印刷

印数：497 001 ~ 518 000

ISBN 7-107-13250-4 / G·6359（课）　定价：11.50 元



如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

主　　编　方明一

编 写 者　邵之泉　方明一　章善根

　　　　　周华辅　颜其鹏

责任编辑　方明一

# 第一版说明

中等师范学校数学教科书（试用本）是受国家教委委托，根据国家教育委员会1992年制定的《三年制中等师范学校数学教学大纲（试行）》编写的必修课教材.

这套数学教科书共分六册，包括《代数与初等函数》第一、二册，《几何》第一、二册，《小学数学教材教法》第一、二册.

各地在使用这套数学教科书时，可以根据具体情况，参照下表安排数学课教学：

| 学　年 | 周课时数 | 科　　目 |
|---|---|---|
| 一年级 | 3 | 代数与初等函数第一册 |
| | 2 | 几何第一册 |
| 二年级 | 3 | 代数与初等函数第二册 |
| 三年级 | 2 | 几何第二册 |
| | 3 | 小学数学教材教法第一、二册 |

本书是中等师范学校数学教科书（试用本）《代数与初等函数》第二册，内容包括数列和数学归纳法，极限和导数，排列、组合与二项式定理，概率和统计等四章. 供三年制中等师范学校数学课二年级《代数与初等函数》课全学年使用.

本书由我室组织编写. 初稿完成后在北京召开会议，对书稿进行了审查. 由于时间仓促，书中难免有错误和疏漏，欢迎广大师生和其他读者批评指正.

人民教育出版社中学数学室

1994年12月

# 第二版说明

本版是在1994年12月第一版的基础上修订而成的．修订主要包括两个方面：

1．按照国家技术监督局颁发的《量和单位》国家标准GB 3100～3102—93，规范使用了有关的单位和符号．

2．为了与九年义务教育全日制初级中学《数学教学大纲（试用）》（1995年6月第2版）的内容相衔接，对部分章节做了补充和调整，并根据教师使用中的意见，对个别地方的不足进行了修正．

参加此次修订的有薛彬、方明一、饶汉昌、颜其鹏，责任编辑是田载今、颜其鹏．

人民教育出版社中学数学室

1999年12月

# 目　录

# 第八章 数列和数学归纳法

数列是初等数学的重要内容之一，在科学技术与日常生活中有着广泛的应用. 这部分内容是进一步学习极限和高等数学的基础；由于它与初等数学的许多内容有着密切联系，学习它将有助于加强对初等数学内容的整体认识与知识的综合运用. 数学归纳法是证明与正整数 $n$ 有关的数学命题的一种重要方法.

本章将首先学习有关数列、等差数列和等比数列的概念、公式及其实际应用，然后介绍数学归纳法及其应用举例.

## 一　等差数列

### 8.1　数列

我们看下面的例子.

图 8-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层，自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4,5,6,7,8,9,10. \tag{1}$$

正整数 1,2,3,4,5,… 的倒数排列成一列数：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots. \tag{2}$$

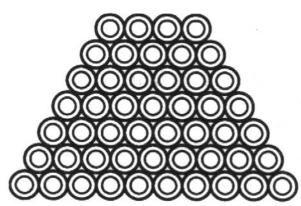


图 8-1

一个细胞在一昼夜内分裂八次（一个分裂成两个），记录每次分裂后所得到的细胞的个数，并按其先后次序排列成一列数：

$$2,4,8,16,32,64,128,256. \qquad (3)$$

《庄子·天下篇》有一段话:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."我们可将每日所剩下的棰的长度记录为:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots. \qquad (4)$$

将 $\pi$ 的不足近似值按所保留的位数自少到多排列起来,也得到一列数:

$$3,3.1,3.14,3.141,\cdots. \qquad (5)$$

无穷多个 1 排列成一列数:

$$1,1,1,1,\cdots. \qquad (6)$$

像上面例子中,按一定次序排列的一列数叫做**数列**.数列中的每一个数叫做这个数列的**项**,在第一个位置上的数叫做数列的第 1 项(首项),在第二个位置上的数叫做数列的第 2 项,…,在第 $n$ 个位置上的数($n\in \mathbf{N}^*$)叫做数列的第 $n$ 项,….

对于上面的数列(1),每一项的序号与这一项有下面的对应关系:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 序号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 项 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

这就告诉我们:数列可看作一个定义域是正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时相应的一系列函数值.如数列(3)就是定义域为集合$\{1,2,\cdots,8\}$的函数 $y=2^x$ 当自变量依次取 1,2,…,8 时所对应的函数值.

数列的一般形式可以写成:

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots,$$

其中 $a_n$ 是数列的第 $n$ 项.有时我们把上面的数列简记作$\{a_n\}$.[1]

例如,把数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2n},\cdots$$

[1] 本章里的 $n$ 都表示正整数.

简记作$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$.

如果一个数列的第 $n$ 项 $a_n$ 与 $n$ 之间的对应关系可以用一个公式来表示，则这个公式叫做这个数列的**通项公式**. 例如数列(1) 的通项公式是 $a_n = n + 3(n \leqslant 7)$；数列(2) 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$；数列(3) 的通项公式是 $a_n = 2^n(n = 1,2,3,\cdots,8)$；数列(4) 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$；数列(6) 的通项公式是 $a_n = 1$. 像数列(6) 这样，数列的项是同一个常数的数列叫做**常数列**. 但是，并非所有的数列都能写出它的通项公式的，例如，数列(5) 就难以写出通项公式.

如果知道了一个数列的通项公式，那么只要依次用 1,2,3,…，去代替公式中的 $n$，就可以求得数列的相应的项.

一个数列中，如果在某一项的后面不再有任何项，这个数列叫做**有穷数列**；如果在任何一项的后面还有跟随着的项，这个数列叫做**无穷数列**.

前面的数列(1)、(3) 是有穷数列，(2)、(4)、(5)、(6) 是无穷数列. 无穷数列没有末项，在依次写出各项时，末尾要用省略号.

数列可以用图形来表示，图 8-2 给出了数列(1) 的一个图形，由于 $n$ 只能取正整数，因此数列的图形是一列孤立的点.

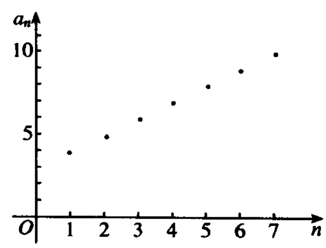


图 8-2

**例 1** 根据通项公式，求出下面各数列的前 5 项：

(1) $a_n = \frac{n}{n+1}$； (2) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

**解**：(1) 在通项公式中依次取 $n = 1,2,3,4,5$，得到数列的前 5 项为：

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n = 1,2,3,4,5$，得到数列的前 5 项为：

$$-1,2,-3,4,-5.$$

**例 2** 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $1,3,5,7$；

(2) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$；

(3) $-\frac{1}{1\times 2},\frac{1}{2\times 3},-\frac{1}{3\times 4},\frac{1}{4\times 5}$.

分析：为了推测通项公式，我们研究数列的每一项(或每一项的各个组成部分)，并把它们与序号比较，找出相互联系的规律.

**解**：(1) 数列的前 4 项 $1,3,5,7$ 都是序号的 2 倍减去 1，所以这个数列的一个通项公式是：

$$a_n=2n-1;$$

(2) 数列的前 4 项 $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$ 的分母都等于序号加上 1，分子都等于分母的平方减去 1，所以这个数列的一个通项公式是：

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项 $-\frac{1}{1\times 2},\frac{1}{2\times 3},-\frac{1}{3\times 4},\frac{1}{4\times 5}$ 的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以这个数列的一个通项公式是：

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

我们再来看本节的第一个例子. 我们知道，数列(1) 的通项是 $a_n=n+3(n\leqslant 7)$，只要依次用 $1,2,3,\cdots,7$ 代替公式中的 $n$，就可以求出这个数列的各项. 数列(1) 还可以用如下方法给出：在图 8-1 中，自上而下第一层的钢管数 $a_1$ 是 4，以下每一层的钢管数 $a_n$ 都比上一层的钢管数 $a_{n-1}$ 多 1(一共 7 层)，即 $a_n=a_{n-1}+$

$1(2 \leqslant n \leqslant 7)$.

也就是说，由数列(1)的第1项，以及项 $a_n$ 与 $a_{n-1}$ 间的关系式，可以写出这个数列的各项：

$$a_1 = 4,$$
$$a_2 = a_1 + 1 = 5,$$
$$a_3 = a_2 + 1 = 6,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_7 = a_6 + 1 = 10.$$

像上面这样，如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项（或前几项），且任一项 $a_n$ 与它的前一项 $a_{n-1}$（或前几项）间的关系可以用一个公式❶来表示，就可以写出这个数列的各项.

❶ 这个公式叫做这个数列的递推公式.

**例 3**　一个数列的第一项是1，以后各项由公式

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

给出，写出这个数列的前5项.

**解：** $a_1 = 1,$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{a_2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10},$$

$$a_5 = a_4 + \frac{1}{a_4} = \frac{29}{10} + \frac{10}{29} = \frac{941}{290},$$

所以，这个数列的前5项是：$1, 2, \frac{5}{2}, \frac{29}{10}, \frac{941}{290}$.

### 练　习

1. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前5项，并写出第7项与第10项：

(1) $a_n = \frac{1}{n^3}$；　　　(2) $a_n = n(n+2)$；

(3) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$；　　　(4) $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

2. 写出数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1)2,4,6,8;　　(2)15,25,35,45;

(3)$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}$;

(4)$1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

3. 观察下面数列的特点,据此在框内填上适当的数,并写出它们的一个通项公式:

(1) 2,4,$\boxed{\quad}$,8,10,$\boxed{\quad}$,14;

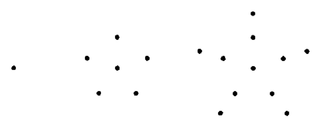
(2) 2,4,$\boxed{\quad}$,16,32,$\boxed{\quad}$,128;

(3) $\boxed{\quad}$,4,9,16,25,$\boxed{\quad}$,49;

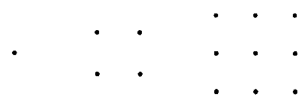
(4) $\boxed{\quad}$,4,3,2,1,$\boxed{\quad}$,$-1$,$\boxed{\quad}$;

(5) 1,$\sqrt{2}$,$\boxed{\quad}$,2,$\sqrt{5}$,$\boxed{\quad}$,$\sqrt{7}$.

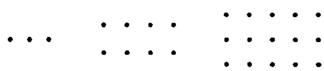
4. 根据下面图形及相应的点的个数,找出其中的一种规律,画出第 4 个、第 5 个图形,并写出相应的点的个数:

(1) 

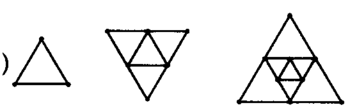
1　　6　　11　　______　______;

(2) 

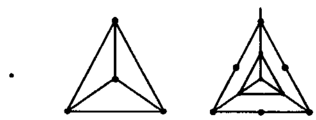
1　　4　　9　　______　______;

(3) 

3　　8　　15　　______　______;

(4) 

3　　6　　9　　______　______;

(5) 

1　　4　　10　　______　______.

(第 4 题)

**5.** 写出下面数列的前 5 项：

(1) $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 3$；

(2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$；

(3) $a_1 = 3, a_2 = 6, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$；

(4) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{a_n}$.

## 8.2　等差数列及其通项公式

上一节中我们提到过数列：

$$4,5,6,7,8,9,10. \tag{1}$$

再来看数列：

$$2,4,6,8,10,12,14; \tag{2}$$

$$1,4,7,10,13,16,\cdots. \tag{3}$$

这些数列有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都是相等的.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**. 这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 $d$ 表示.

例如，数列

$$1,3,5,7,\cdots$$

是等差数列，它的公差是 2.

又如，数列

$$0, -5, -10, -15,\cdots$$

也是等差数列，它的公差是 $-5$.

特别地，常数列，如

$$3,3,3,3,\cdots$$

是公差为 0 的等差数列.

如果数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 是等差数列，它的公差是 $d$，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$,

……

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

当 $n = 1$ 时,上面等式两边都是 $a_1$,即等式也是成立的,这表明当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时上面公式都成立,因而它就是等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

**例 1** (1) 已知等差数列的首项为 5,公差为 $\frac{2}{3}$,求这个数列的第 40 项;

(2) 求等差数列 8,5,2,… 的第 20 项.

**解:** (1) 由 $a_1 = 5, d = \frac{2}{3}, n = 40$,得

$$a_{40} = 5 + (40-1) \times \frac{2}{3} = 31;$$

(2) 由 $a_1 = 8, d = 5 - 8 = -3, n = 20$,得

$$a_{20} = 8 + (20-1) \times (-3) = -49.$$

**例 2** (1) 等差数列 1,3,5,… 的第几项是 401?

(2) $-53$ 是不是等差数列 $-5$, $-9$, $-13$ 的项?

**解:** (1) 由 $a_1 = 1, d = 3 - 1 = 2$,得到这个等差数列的通项公式

$$a_n = 1 + 2(n-1).$$

设 $a_n = 401$,则

$$401 = 1 + 2(n-1).$$

解这个方程,得 $n = 201$.

所以等差数列 1,3,5,… 的第 201 项是 401.

(2) 由 $a_1 = -5, d = -9 - (-5) = -4$,得到这个等差数列的通项公式

$$a_n = -5 - 4(n-1).$$

设 $a_n = -53$,则

$$-53 = -5 - 4(n-1).$$

解这个方程,得 $n = 13$.

所以 $-53$ 是这个等差数列的第 13 项.

**例 3** 梯子的最高一级宽33 cm，最低一级宽110 cm，中间还有10级，各级的宽度成等差数列.计算中间各级的宽.

**解：** 用$\{a_n\}$表示题中的等差数列，则$a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$.

由 $$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$ 即
$$110=33+11d,$$
解得
$$d=7.$$
因此
$$a_2=33+7=40,$$
$$a_3=40+7=47,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽(cm)从上到下依次是40，47，54，61，68，75，82，89，96，103.

**注意**：在一个等差数列中，如果已知$a_1,d,n,a_n$中的任意三个，就可以用等差数列的通项公式求出另一个.

如果在$a$与$b$中间插入一个数$A$，使$a,A,b$成等差数列，那么$A$叫做$a$与$b$的**等差中项**.

如果$A$是$a$与$b$的等差中项，那么$A-a=b-A$，所以
$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第2项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

### 练 习

1. (1) 求等差数列3，7，11，… 的第4，7，10项.

   (2) 求等差数列10，8，6，… 的第20项.

(3) 205 是等差数列 2,9,16,… 的项吗?

(4) $-12.5$ 是等差数列 $0,-3\frac{1}{2},-7,\cdots$ 的项吗?

2. 在等差数列$\{a_n\}$中:

(1) 已知 $d=-\frac{1}{3}, a_7=8$,求 $a_1$;

(2) 已知 $a_1=12, a_6=27$,求 $d$;

(3) 已知 $a_1=3, a_n=21, d=2$,求 $n$;

(4) 已知 $a_4=10, a_7=19$,求 $a_1$ 与 $d$.

3. 求下列各组数的等差中项:

(1) 48,36;　　　　　　(2) $-12$,24.

## 8.3　等差数列前 $n$ 项的和

在实际生活中,我们常常遇到要求等差数列前 $n$ 项和的问题,如求图 8-1 所示的钢管总数就是一例. 当然,逐项相加可以算出结果,但是当项数很多时,计算起来比较麻烦,所以有必要推导等差数列前 $n$ 项和的公式.

为了求出图 8-1 所示的钢管总数,我们设想在这堆钢管的旁边,如图 8-3 那样倒放着同样的一堆钢管. 这样,每层的钢管数都相等,即:

$$4+10=5+9=6+8=\cdots\cdots=10+4.$$

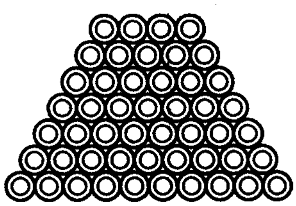


图 8-1

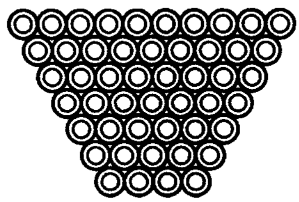


图 8-3

由于共有 7 层,两堆钢管总数是$(4+10)\times 7$,因此,所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times 7}{2}=49.$$

一般地,设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$