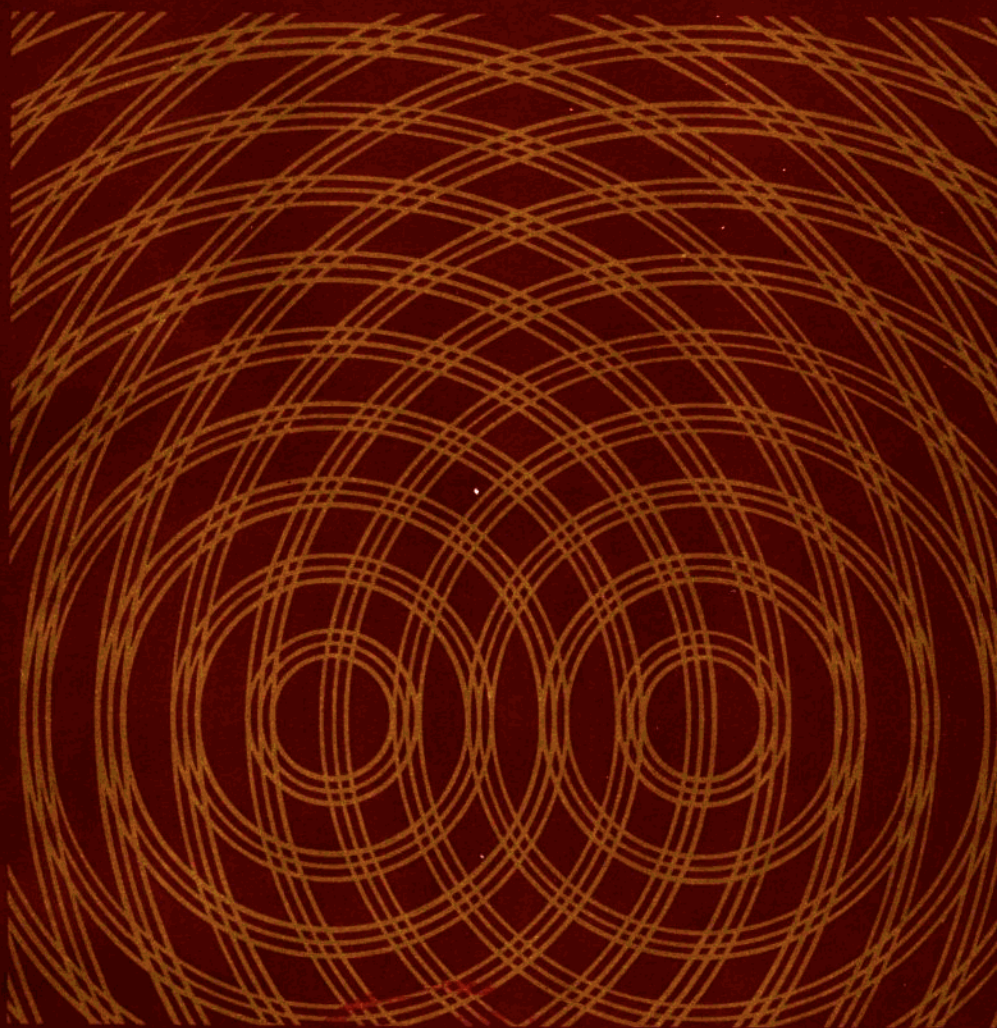


物理教学



2 1979

WULIJIAOXUE · WULIJIAOXUE

物 理 教 学

目 录

相对论天体物理学的兴起	
..... 中国科学技术大学 方励之 (1)	
向心加速度公式的推导	
..... 上海教育学院 汪思谦 (5)	
关于向心力教学中两个问题的商讨	
..... 武汉市长虹中学 李润民 (7)	
碰撞速度的可取值范围	
..... 上海市建江中学 葛起超 (10)	
关于摩擦力的作用点的选择	
..... 上海市曹阳中学 丁忠孚 (14)	
开展幻灯教学的一点体会	
..... 上海市市北中学 于彝陵 (16)	
关于“自由落体”的演示实验	
..... 上海市交大附中 吴玉保 (20)	
爱因斯坦的科学历程	
..... 上海师大 张瑞琨 蔡宾牟 (23)	
爱因斯坦与光量子假设	
..... 上海师大 沈珊雄 (29)	
用洛伦兹变换直接证明 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	
..... 中南矿冶学院 蔡领 (33)	
一种新颖习题——程序习题	
..... 本刊资料室摘译 (34)	
莫斯科大学入学试题(物理)摘选	
..... 上海科技大学物理教研组 (42)	

2
1979

相对论天体物理学的兴起

方 励

从一九〇七年开始,爱因斯坦便致力于发展广义相对论。经过七、八年的努力,到一九一五年末,他终于找到了自己认为满意的场方程。当时,他兴奋地写信给索末菲说:“上个月是我一生中最激动、最紧张的时期之一,当然也是收获最大的时期之一。”我感到高兴的是,不仅牛顿理论作为第一级近似得出了,而且,水星近日点运动(每一百年 $43''$)作为第二级近似也得出了”。这封信说明,爱因斯坦在创建广义相对论的最初时刻,他就是把他的理论同天体现象紧密地联系在一起的。他对他找到的场方程之所以满意,原因之一就是在第二级近似上得到了水星近日点运动的正确结果。

因而,如果说相对论天体物理学就是一门应用广义相对论来研究天体现象的学科,那么,原则上说,从广义相对论诞生那一天起,相对论天体物理学也就同时诞生了。然而,在广义相对论创立之后的四十多年间,相对论对于天体物理并没有产生多大影响,一直到近十几年来情况才大为改观。相对论天体物理学迅速发展,成了当代天体物理的一个新方向。

相对论天体物理之所以长期没有受到重视,其原因就是在“通常”的天文学问题中,引力场太弱了,以至没有应用广义相对论的必要。尽管广义相对论在基本观念上与牛顿的万有引力理论有质的差别,但是,对绝大多数已知的天体现象来说,这种差别的量是十分微小的。在弱引力场情况,只要应用广义相对论的最低级近似就可以了,而在这一级上广义相对论与牛顿理论是等价的。太阳系中只有寥寥三、四个效应同较高级近似有关,即引力红移、光线弯曲、雷达信号的时延以及水星近日点进动等几个著名的验证,它们还不足以充分显示广义相对论与牛顿引力理论之间的巨大差别。

只有在强引力场情况,才能真正感到广义相对论的必要。用什么来区别引力场的强弱呢?粗略地说,如果在引力的作用下,物体的运动速度远小于光速,这个场就是弱的;反之,如果物体运动速度接近光速,场就是强的。地球公转的速度只有20公里/秒,远比光速(三十万公里/秒)要小,所以太阳引力场是弱的。一般地说,在一个质量为 M 的物体附近的引力场中,运动速度大体是

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

其中 G 是万有引力常数, R 是物体 M 的空间尺度。由此可见,弱场的条件是 $\sqrt{\frac{GM}{R}} \ll c$,或

$\frac{GM}{c^2 R} \ll 1$, 强场的条件是 $\sqrt{\frac{GM}{R}} \lesssim c$, 或 $\frac{GM}{c^2 R} \lesssim 1$ 。在下面的表中,列出一些物体的 $\frac{GM}{c^2 R}$ 值:

名 称	质 子	人	地 球	太 阳	银 河
$\frac{GM}{c^2 R}$	10^{-40}	10^{-25}	10^{-10}	10^{-6}	10^{-6}

这些值都远远小于1。这正是我们可以放心地在天体等许多问题中使用牛顿力学的根据。

还可以从另外一个角度来看这个问题,如果质量 M 的体系所产生的引力场是强的,它们的空间尺度 R 就应当是 $R \sim GM/c^2$ 。换句话说,倘若我们想把质量为 M 的体系变成强引力场的源,我们就应当把这个体系压缩到 R 那么小的空间范围之内。下面的表中给出一些物体的 R 值。

名 称	质 子	人	地 球	太 阳	银 河
$R = \frac{GM}{c^2}$ (厘米)	10^{-52}	10^{-23}	10^{-1}	10^6	10^{16}

根据我们在地面实验室中获得的经验,要想完成表中所要求的压缩,是完全不可能的,最强有力的压缩机也不能使水的体积缩小原来的十分之一。所以,要想把偌大的太阳压缩成一个直径仅几公里的球,似乎只是戏谈。

自然界到底有没有强大的压缩机能把弱场物体压缩成强场呢?上面的经验使许多人对这个问题持否定态度,对强引力场的存在表示怀疑。

然而,有时候,比较起狭隘的经验来,物理学家更加相信他们得到的一些具有普遍意义的规律。根据物理规律所做的理论分析,其结果与我们在地面环境中得到的印象正好相反:自然界不仅存在威力无比的压缩机,而且大多数天体几乎都逃不脱被压缩的命运,这种压缩机不是别的,就是天体自身的引力。

这个问题是从分析星的平衡性质开始的。一颗星的性质最主要的决定于两种力,一种是星体自身的引力,一种是星中物质的压力。若压力大于引力,则星将发生膨胀;若引力大于压力,则星将发生坍缩。当两者相等时,星体达到平衡。

早在1930年, Milne 分析过一种没有能源的、由经典理想气体构成的星。他发现在这种情况下压力总是不足以与引力相抗衡。任何质量的这种体系,在自身引力的作用下,总是无限地坍缩下去一直到空间尺度缩小到零、物质密度增加到无穷为止。

随后不久, Chandrasekhar 和 Landau 都指出 Milne 的分析不完备。因为,在高密度下物质的性质远远不能用经典理想气体来描写,这时必须考虑量子力学中的不相容原理。这种不相容性质能使物质产生巨大的抵抗坍缩的力量。这种压力通常叫做简并性压力。具体计算表明,考虑了简并性压力后,的确使问题有所好转,在一定质量范围内的天体,不会出现 Milne 所说的无限坍缩,而是压缩到一定的空间尺度上稳定下来,成为一种致密的星。但是,简并性压力也并不能彻底排除无限坍缩的威胁。特别是对于质量大于1.5个太阳质量的天体来说,

摆在它们面前的命运依旧是无垠坍缩。

Chandrasekhar 曾经这样来描述当时的境遇:“我们的结论是,在我们能够回答下列基本问题之前,有关恒星结构的分析不可能获得大的进展:给定一个含有电子及原子核(总体是电中性的)的封闭体,如果我们无限地压缩这些材料,将会发生什么事情?”

到三十年代末, Oppenheimer 和 Volkoff 利用广义相对论进一步分析了简并中子压力的作用,结果仍然无济于事。虽然他们证明了在一定质量范围内能存在稳定的中子星,但是,他们接着说“当所有热核能源耗尽之后,一颗足够重的星将会坍缩。”

引力无限坍缩这个概念就象潘多拉从“灾祸之匣”中放出的东西一样,它一旦从“物理之匣”中放出之后,就再也没有能力将它收回了,一切都逃不脱引力压缩或引力坍缩的最终结局,引力的存在本身就必然导致强引力场的存在。这就是三十年代理论探索的基本结论。按照这个结论,宇宙间不仅一定有强引力场天体,而且数量应当很多,问题是如何找寻这些遭到压缩或坍缩的强场天体。1934年, Baade 和 Zwicky 就这个问题发表了一篇短文。这篇文章行文之短、涉及面之广、预测之大胆而准确,在物理学和天文学史上是罕见的。与其复述他们的观点,不如全文照录。

超新星及宇宙线

W. Baade F. Zwicky

在每个星系(星云)中每几百年要发生一次超新星爆发。一个超新星的寿命大约是二十天,当它的绝对亮度极大时,可高达 $M_{\text{abs}} = -14^{\text{M}}$ 。超新星的可见辐射 L_v 大约为我们太阳辐射的 10^5 倍,即 $L_v = 3.78 \times 10^{41}$ 尔格/秒。计算指出,总辐射(包括可见的和不可见的在内)数量大约是 $L_r = 10^7 L_v = 3.78 \times 10^{48}$ 尔格/秒。所以,超新星在它的整个寿命中发射的总能为 $E_r \geq 10^5 L_r = 3.78 \times 10^{53}$ 尔格/秒。如果超新星最初是十分普通的、质量为 $M < 10^{34}$ 克的恒星,则 E_r/c^2 与它本身的 M 同量级。在超新星过程中,

大块的物质湮没了。此外，还可设想，宇宙线是由超新星产生的。假定在每个星云中每一千年左右有一颗超新星出现，则在地球上所观测到的宇宙线强度预期将为 $\sigma = 2 \times 10^{-8}$ 尔格/(厘米²·秒)量级。现在的观测值约为 $\sigma = 3 \times 10^{-8}$ 尔格/(厘米²·秒)。作为存照，我们还提出这样的观点：超新星是表示从普通星到中子星的过渡，所谓中子星，就是星的最终阶段，它全由挤得极紧的中子所构成。

三十多年来的观测证明，Baade 及 Zwicky 的“立此存照”的观点是正确的。不过，证明的过程却是很曲折的。

最重要的观测是对蟹状星云的一系列研究。蟹状星云是银河系中一个弥漫的气状星云。因为它的光度很大，差不多相当于 100 个太阳的光度。这些能量是从哪里来的？这个问题引起了许多天文学家的兴趣。

早在 1928 年，当哈勃正在作那项有名的星系红移工作的时候，他也很关注蟹状星云问题。正是他第一个提出蟹状星云与中国宋代所记录的一颗客星，即公元 1054 年的超新星有关。后来，对比二十年代与四十年代所拍摄的星云照片，发现这个星云如今还在膨胀，膨胀速度大约是 800 公里/秒。由此可以估算出星云膨胀到现在这样大总共约用了 800 年。这个数字与 1054 年到现在的時間非常相近，进一步支持了哈勃的观点。

以后，又研究蟹状星云当中的一颗发光的恒星。这颗星也有点奇特，它的光度很大，约为太阳的 100 倍，但是光谱是连续的，其间看不到吸收线或发射线，无法进行常规的恒星光谱分类，或者说，它不属于任何一种通常的光谱型。

到这个时候，关于蟹状星云的研究似乎是积累的问题多，解决的问题少。1054 年超新星爆发留下了什么？星云辐射的能量是由什么提供的？中心恒星到底属于哪一类？等等，都令人费解。然而，问题越多、越明确、越尖锐，往往预示着越接近解决。解决这些问题的关键一步是进行了光变观测，利用快速测光方法发现，蟹状星云中恒星的光度并不是不变的，而是有极

其规则的周期脉冲式变化。周期非常稳定以致我们可以精确地写出：

周期 = 0.03310615370 秒。

周期的稳定说明它是由天体自转引起的。周期的短促说明自转天体的空间尺度一定很小。另一方面，光度很大又表示它的质量不会太小。这样一个大质量而小体积的天体，不正是那种遭到过引力压缩后的致密天体吗？根据这个启示，蟹状星云中的许多问题就迎刃而解了。首先，这颗中心的致密星正是在 1054 年观测到的超新星爆发过程中从普通恒星坍缩而来的。普通恒星的自转周期一般是一个月的量级，因此由于角动量守恒，在坍缩的过程中角速度将加快，在形成致密星后，它的自转周期就可以缩短到几毫秒。其次，精确的测量发现，脉冲周期有极慢的变长趋势，这反映着致密星的自转在减慢，转动能量在减少。这个能量减少值又正好等于通过星云及中心星辐射出去的能量。这一系列定性和定量上的满意的说明，最终支持了 Baade 及 Zwicky 的观点：超新星是表示从普通星到中子星的过渡。

虽然，蟹状星云中心星并不是第一个被发现的脉冲星，但是脉冲星是一种中子星，这个重要的结论却主要是依据对蟹状星云的大量观测而得到确认的。说来也很有趣，尽管几十年来有不少人都观测过蟹状星云中的恒星，但它的光变性质却一直没有被发现。这也不奇怪，因为人眼的视觉暂留效应，使肉眼不能看到比 60 毫秒更短的周期式光强变化，蟹状星云脉冲星的 33 毫秒周期刚好被视觉暂留模糊掉了。如果蟹状星云脉冲星的周期稍微长一点，那么，发现脉冲星或中子星的故事也许早就结束了。大自然这样的安排似乎是有意要考验人们的智慧。

的确，中子星的发现是人的智慧的多方面的结晶。在物理理论上，它用到了相对论、量子论、核物理及辐射理论，在天文观测上涉及了关于星云膨胀的天体测量、恒星光谱的分析、测量短周期光变的技术等等，除此之外，九百年前的中国天文学家的忠实而详尽的记录也起着重要的作用。

今天，在银河系中已经记录到三百多颗脉冲星了。如果每颗脉冲星的寿命大约是 10^5 年，那么，银河系中产生脉冲星的速率大约是 $400/10^5 = 4 \times 10^{-3}$ /年，也就是说平均每 250 年产生一颗。银河系的寿命大约是 100 亿年，因而，我们估计银河中至少有 $4 \times 10^{-3} \times 10^{10} = 4 \times 10^7$ 颗中子星。这还是偏于保守的估计，真正的值可能有 10^8 颗之多。

中子星只是引力压缩的产品之一。质量更大的恒星结局是引力坍缩形成黑洞。七十年代以来通过 X 射线密近双星中的 X 射线的研究证明，某些密近双星中的 X 射线源可能就是黑洞，象天鹅座 X-1、圆规座 X-1 等都属于这种类型。这种黑洞在银河中也很多，可能也有 10^6 个。最近又有报导说，在星系核中心还可能有大质量的黑洞，也许还有宇宙早期留下来的小黑洞。

总之，今天我们已经知道，有许多天体它们的 $\frac{GM}{c^2 R}$ 值近于 1。如下表

名 称	脉冲星	武仙座 X-1 等	天鹅座 X-1 等	星系核中心	宇 宙
$\frac{GM}{c^2 R}$	$\sim 10^{-1}$	$\sim 10^{-1}$	~ 1	$\sim 1(?)$	1

$\frac{GM}{c^2 R} \sim 1$ 的天体的品种之多、数量之大完全改变了我们以前对于宇宙环境的旧有观念。广义相对论再也不是仅仅在三、四个验证上才有它的用武之地了。

如果说相对论天体物理有什么重要成果的话，那么其中第一个就是从理论上及观测上证明：自然界存在着、而且大量存在着强引力场的天体。相对论天体物理也正是通过它自己的这第一项论证，表明了它是一个新兴的重要学科。

(上接第 9 页)

对车的弹力 N_s 的合力则构成了地面斜向上方的支承力 N 。可见，这个提供了向心力的水平分力原来就是地面对车胎的侧向静摩擦力 N_s ，离心力则是车胎对地面的静摩擦力 N_s' 。这个法则还可以从分析在光滑斜面上下滑的物体得到证实。如图 1，使物体得到加速度 a 的力可以说是重力 mg 、斜面支承力 N 的合力 F ，但实际上正如各书阐述的那样，这个力乃是重力作用的一个结果，即是下滑力 $mg \sin \theta$ ，而从未认

为这个力是由 mg 与 N 这两力，或者说是由地球与斜面这两个物体共同提供的。原因就在于 N 力的方向与 a 的方向垂直，因而在下滑的方向上不存在作用。

综上所述，我们在理解和运用合力就是向心力的结论时，必须注意它只适用于匀速圆周运动，并且不能以此认为合力中的每个力均对向心力有贡献；而根据在向心加速度方向上能起作用的力来确定向心力的提供者，既符合客观事实，也适用于变速圆周运动。

向心加速度公式的推导

汪思谦

在进行匀速圆周运动的教学时,学生虽已具备匀变速直线运动的知识,但对曲线运动的特点却是陌生的。因此,首先通过运动的合成与分解,分析一下抛体运动的规律,从而使学生了解质点作曲线运动的条件是非常必要的。对此可以在复习匀变速直线运动的基础上进行。当加速度的方向与初速度的方向一致时,质点作加速运动;当加速度的方向与初速度的方向相反时,质点作减速运动。在上述情况下,质点的运动是不会偏离所在的直线的。平抛物体的运动情况就不同,其加速度 g 的方向与速度方向是成角度的。这时,加速度的作用不仅改变速度的大小,而且还改变速度的方向,因而平抛物体的运动轨迹是一条曲线。这里还必须强调,作曲线运动的质点,它的速度方向是在不断改变的,但始终沿着其曲线轨道的切线方向。

既然匀速圆周运动是曲线运动,质点作匀速圆周运动时,就一定具有一个与速度不在一直线上的加速度。由于匀速圆周运动速度的大小是不变的,因此这个加速度必然与速度垂直,否则就会影响速度的大小。这样就可以初步得出匀速圆周运动的加速度的方向是法向的结论。

匀速圆周运动的加速度(向心加速度)公式的推导始终是教学上的一个难点。这里介绍两种不同的推导方法。

(一) 应用运动的合成与分解的推导方法

假设作匀速圆周运动的质点在 A 点的速度为 v (图1),经过一段时间 t 后到达 B 点,位移为 $\overrightarrow{AB}$ 。根据运动的合成与分解的概念,可以把位移 $\overrightarrow{AB}$ 分解成沿速度 v 方向上的位移 $\overrightarrow{AC}$ 和沿 B 点法线方向上的位移 $\overrightarrow{CB}$ 。可以认为位移 $\overrightarrow{AC}$ 是质点以速度 v 在时间 t 内作匀速直线

运动的结果,而位移 $\overrightarrow{CB}$ 就是质点同时在向心加速度作用下运动的结果。为了计算位移 $\overrightarrow{CB}$

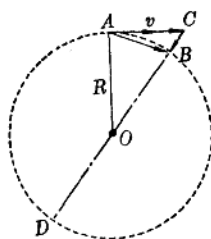


图1

之长,可以利用初等几何学中关于圆外同一点所作割线与切线的关系公式,得出

$$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}^2,$$

即 $(\overrightarrow{CB} + 2R) \times \overrightarrow{CB} = v^2 t^2$,

式中 R 是圆半径。当时间 t 非常小时,位移 $\overrightarrow{CB}$ 也非常小, $\overrightarrow{CB}$ 与常数 $2R$ 相比较显然可以忽略不计。于是上式可以简化为

$$\overrightarrow{CB} = \frac{v^2}{2R} \cdot t^2,$$

式中 v 、 R 都是常数。上式表明位移 $\overrightarrow{CB}$ 与时间 t 的平方成正比,这是符合匀加速直线运动的规律的。与初速为零的匀加速直线运动的位移公式

$$S = \frac{a}{2} t^2$$

相比较,可以得出匀速圆周运动的加速度(向心加速度)的公式

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

牛顿本人研究向心加速度时所采用的就是上述的方法。

(二) 应用速端曲线(Hodograph)的推导方法

在研究质点的曲线运动时, 其加速度的规律往往可以通过质点运动的速端曲线的规律来推导。如图 2(a) 所示, 假设 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 为

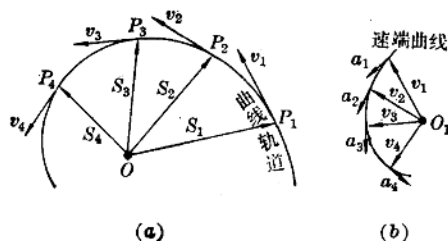


图 2

质点在曲线轨道上运动的一系列连续位置, $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ 依次为质点在这些点上以 O 点为原点的位置矢量, 而 $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$ 是质点经过这些点时相应的速度矢量。如果将这些速度矢量依次平移至一点 O_1 上〔图 2(b)〕, 则由这些速度矢量的端点连接而成的曲线就叫做这个质点运动的速端曲线。当质点在曲线轨道上运动的同时, 其速度矢量的端点也在速端曲线上作相应的运动。就象质点在曲线轨道上运动的快慢(速率)等于其位移随时间的变化率一样, 质点的速度矢量的端点在速端曲线上运动的快慢(速率)就等于其速度随时间的变化率, 即质点的加速度。因此, 找出质点运动的速端曲线, 根据其速度矢量的端点在速端曲线上各点运动的快慢就可以算出质点在曲线轨道上相应的即时加速度。

对于匀速圆周运动说来, 由于质点的速度矢量 v 的长度不随时间变化, 其速端曲线就是以速度矢量 v 为半径的圆周(图 3)。因此要推导质点作匀速圆周运动的即时加速度, 只要计算其速度矢量的端点在速端曲线上运动的速度即可。从前面的分析可知, 质点在圆轨道上运

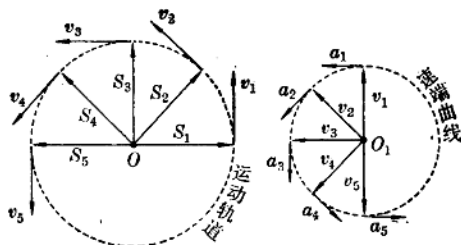


图 3

动一周, 其速度矢量的端点也在速端曲线上运动一周, 即它们的运动周期 T 是相同的。于是可以得到匀速圆周运动的加速度

$$a = v_{\text{速端}} = \frac{2\pi v}{T},$$

式中 $2\pi v$ 表示速端曲线的圆周长, T 表示速端的运动周期, 也就是质点作匀速圆周运动的周期, 即

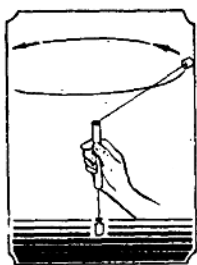
$$T = \frac{2\pi R}{v},$$

代入上式可得匀速圆周运动的加速度公式

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

根据速端速度 $v_{\text{速端}}$ 的方向始终与速端曲线的圆半径垂直, 即始终与匀速圆周运动的速度 v 垂直, 可以推知这个加速度的方向始终是指向圆轨道中心的, 因而称为向心加速度或法向加速度。

上述两种推导方法各有优点和缺点。前者比较容易为学生所接受, 因为它所采用的方法、涉及到的知识都是学生原来已经掌握了。缺点就在于这个加速度的方向必须通过分析事前确定是法向的, 否则就很难解释为什么会想到把位移 $\vec{AB}$ 分解成 $\vec{AC}$ 、 $\vec{CB}$ 。后者论证过程比较严密, 但要涉及到学生所不熟悉的速端曲线的概念, 这个概念不易讲清。



关于向心力教学中两个问题的商讨

武汉市长虹中学 李 润 民

现行中学物理教材和一些力学参考书中,对向心力的定义以及向心力与离心力的关系均作了较为明确的论述。但有两个问题:(一)向心力不是某一种类型的力,论述中或者是避而不谈,或者是摆出了结论,但未作必要的阐述;(二)物体受到几个力作用时,向心力应如何确定?各书往往只是通过个别例子十分简略地指出:向心力就是这些力的合力。既缺乏必要的分析,又忽视了物体必须是作匀速圆周运动这个前提条件。本文意在对这些涉及向心力的本质问题作一些肤浅的商讨。

向心力不是某一种新类型的力

中学物理教材是从作圆周运动的物体必然有一个向心加速度 a_n 存在,然后根据牛顿第二定律导出向心力 $F_n (=ma_n)$,并定义向心力是作用在作圆周运动的物体上,与线速度方向垂直,沿着半径指向圆心的力。有鉴于此,为了使学生真正弄懂向心力并不是某一种新的力,建议讲授本课时注意以下几点:

1. 首先引导学生根据牛顿第二定律分析一、两个简单事例:

例如,在光滑斜面上以加速度 a 下滑的物体(图1),有加速度存在,说明有力作用。这个

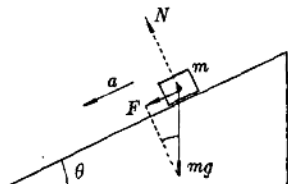


图 1

使物体获得加速度 a 的力,实际上是重力的一

个分力——下滑力 $mg\sin\theta$ 。

又如,在平直路面上慢慢停下来的车辆(图2),有一个与运动方向相反的加速度 a 存在,说

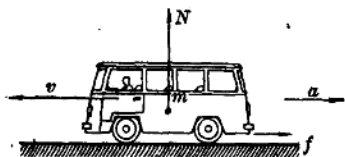


图 2

明有阻力 f 作用。这个使物体得到加速度 a 的力 f ,实际上是路面对车辆的摩擦力 $f=KN$ 。

2. 再转入讨论在光滑水平桌面上作圆周运动的小球 m 的情况(图3),

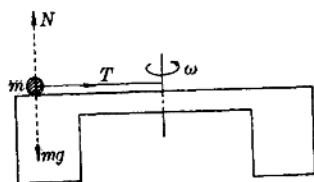


图 3

m 的速度方向时刻在改变,因而有指向圆心的加速度,即向心加速度 a_n 存在,同样应有指向圆心的力 F_n 存在。根据第二定律有 $F_n = ma_n$ 。实际上这个力乃是绳的拉力 T (弹力)。

再如,搁在转动圆盘上的物体(图4),它随

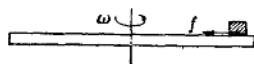


图 4

圆盘一起转动所需指向圆心的力,则是由圆盘对它的摩擦力 f 提供。

3. 然后提出向心力定义、公式, 并进一步阐明本观点:

力学中为了研究圆周运动这个特殊情况, 把这个引起向心加速度的力, 加上一个特殊的名称——向心力, 即作圆周运动的物体受到的与线速度方向垂直, 沿着半径指向圆心的力叫做向心力。

再提出表达式: $F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$ 。

根据不同情况, 这个向心力可能是重力、弹力、摩擦力, 还可能是电场力、磁场力等各种客观存在的不同类型的力, 或是其中几个力的合力, 因此向心力并不是某一种新类型的力, 在分析物体受力情况时, 不能把它当作一个力与其他力并列考虑。

多力作用下向心力的确定

在几个力作用下, 作匀速圆周运动的物体, 其向心力的确定是以牛顿第二定律为理论根据的。物体既是作匀速圆周运动, 就表明它获得了一个向心加速度(也只有这一个加速度), 因而必然有一个向心力存在。根据 $\Sigma F = ma$, 这个引起向心加速度的力自然应当是这几个力的合力 ΣF 。所以多力作用下作匀速圆周运动的物体, 其所需的向心力就是这些力的合力。兹以圆锥摆为例说明如下: 摆球 m 在水平面内绕圆心 O 作半径为 R 的匀速圆周运动 (图 5), m

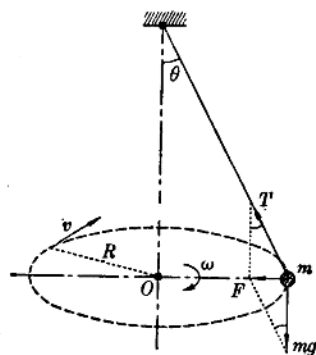


图 5

受到细线的拉力 T 和地球作用的重力 mg 两个力的作用。根据上述结论, 这两个力的合力 F

就是摆球作圆周运动的向心力。

$$T \sin \theta = F \text{ 或 } mg \tan \theta = F,$$

$$\text{而 } F = ma_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R.$$

为了正确理解和运用向心力就是合力这个结论, 根据教学中存在的问题, 尚有以下两点是必须澄清的:

1. “向心力就是合力” 这个结论只有在匀速圆周运动的条件下才有普遍的意义, 对于变速圆周运动通常是不适用的。

试以变速圆周运动的单摆 (图 6) 为例,

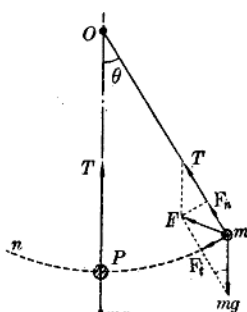


图 6

小球 m 同时受到重力 mg 和悬线拉力 T 的作用, 这两个力的合力 F 不在悬线方向上。 F 沿圆弧 $\widehat{mPn}$ 切线方向的分力 $F_t (= mg \sin \theta)$ 是使小球获得切向加速度 a_t 的力 (正是这个不断变化的力使单摆作变速圆周运动); F 沿悬线 mO 方向的分力 $F_n (= T - mg \cos \theta)$ 是使摆球获得法向加速度 a_n 的力。这就是说, 在单摆运动中, 向心力只是重力 mg 与拉力 T 这两个合力 F 的一部分, 而不是整个合力。

又如如图 7 所示, 小球在竖直平面内作的圆周运动也是变速圆周运动, 在圆周的顶点 A 和底点 B 这两个位置时, 球的重力和绳的拉力的合力等于向心力, 在其他任何位置如 C , 合力并不等于向心力。

总之, 多力作用下作圆周运动的物体, 如果存在产生切向加速度的力或分力, 这个运动必然是变速圆周运动, 就不能断言向心力就是这些力的合力。

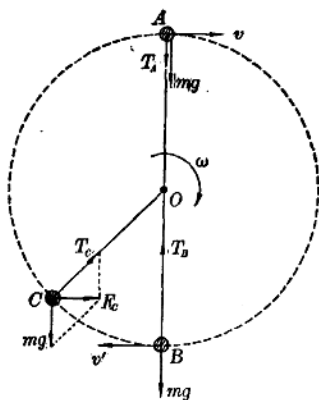


图 7

2. “向心力就是合力”这个结论不能理解成向心力就是这几个力或这几个施力物体共同提供的！要确定向心力的提供者，必须根据不同的问题进行具体分析。

统一这个认识关键在于对合力这个概念的理解：一个物体同时受到几个力作用时，可以找到这样一个力，它作用于物体产生的效果跟原来几个力共同作用产生的效果相同，那末这个力就叫做原来几个力的合力。可见，用找到的这个合力代替原来的几个力只是反映了作用效果的一致性，不等于也不能代替反映物体间相互作用的全部内容。因此，不能根据“向心力就是合力”的结论而认定向心力就是由这几个力或这几个施力物体共同提供的。下面从一些具体事例来进行分析。

(1) 如图 3 分析过的在光滑水平桌面上作圆周运动的小球共受到三个力的作用：地球作用的重力 mg ，桌面支承力 N ，绳子的拉力 T ，其中 mg 与 N 互相抵消，因而这三个力的合力就是 T 。事实上 mg 和 N 两力的方向均垂直于圆半径，与向心加速度的产生无关；只有 T 才是提供向心加速度的力。所以许多教材往往撇开 mg 与 N ，直接提出绳子的拉力 T 就是向心力。显然，从客观存在的事实出发，决不会得出向心力是重力、支承力、拉力三个力或是地球、桌面、绳子这三个物体共同提供的推论。

(2) 图 6 所示单摆，当小球位于底点 P 时，按 $\Sigma F = ma$ ，拉力 T 和重力 mg ，以及与向心力

的关系为 $T - mg = ma_n$ ，移项得 $T = ma_n + mg$ 。这就是说，拉力 T 由两部分组成：一部分抵消小球的重力，一部分提供小球圆周运动的向心力。这可用极简单的实验证实：用弹簧秤提住小球不动时，弹簧的拉力恰好等于小球的重力。然后摆动小球，这时弹簧秤显示它用的力增加了，这增加的部分就是小球作圆周运动所需要的向心力。因此，这时单摆运动的向心力乃是悬线对小球作用力的一部分，离心力则是小球对悬线反作用力的一部分，并且都是弹力。把向心力说成是 T 和 mg 两个力或是悬线和地球两个物体共同提供，与事实不符。

(3) 圆锥摆也是如此：其重力 mg 与圆半径的方向垂直，因而在向心加速度的方向上不存在影响。实际是细线拉力 T 的水平分力 $T \sin \theta$ 提供了向心力。因此，圆锥摆的向心力是 T 和 mg 的合力，但不能说是由细线和地球这两个施力物体共同提供；或者说 T 和 mg 各提供了一部分向心力。正因为如此，解题时把重力分解成水平方向产生向心加速度的分力和斜向下的分力是不严格的。

根据上述一系列实例的分析可得出这样的结论：在向心加速度的方向上存在的作用力或者力的一个分量才是向心力的真实提供者（它对变速圆周运动也是成立的）。由此可知，自行车转弯时的向心力是总重力 mg 和地面斜向支承力 N 的合力，而向心力的真实提供者则是 N 的水平分力。仔细分析起来，转弯时，车子绕地面某点 O 以半径为 OA 作圆周运动（图 8）：车身内倾，车胎有向外侧滑动的趋势，地面给车胎一个阻碍滑动的静摩擦力 N_s ，这个 N_s 和地面

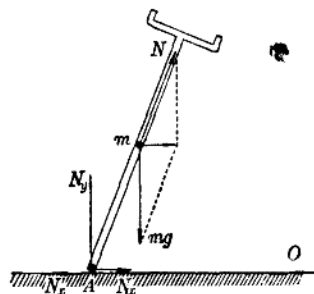
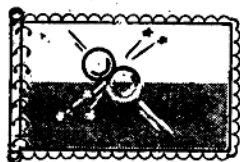


图 8

(下转第 4 页)



碰撞速度的可取值范围

上海市建江中学 葛 起 超

一、问题的提出

有这样一道题：“在一光滑的水平面上有一个 300 克的小球以 8 米/秒的速度向前滚动，撞上前面一个 500 克的球，这个球原来是以 4 米/秒的速度和第一球同向滚动的。碰撞后第一球以 2 米/秒速度向后退回，求第二球碰撞后的速度。”

解：根据动量守恒定律：

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (0)$$

得出 $v'_2 = 10$ 米/秒。

这道题的解法看来是无可置疑的。但是如果核算一下碰撞前后两球的总动能，则发现：

$$\begin{aligned} \text{碰撞前：} E &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \\ &\times 0.3 \times 8^2 + \frac{1}{2} \times 0.5 \times 4^2 = 13.6 \text{ 焦耳。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{碰撞后：} E' &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.3 \times (-2)^2 + \frac{1}{2} \\ &\times 0.5 \times 10^2 = 25.6 \text{ 焦耳。} \end{aligned}$$

碰撞后两球总动能增加，这显然与能量守恒定律——自然界的普遍规律——不符，也就是说这道题的题设条件是错误的。错误的原因就是本文要讨论的课题：碰撞后第一球的速度超出了可取值范围。那么，速度的可取值范围如何确定？下面就来研究这个问题。

二、碰撞的三种类型

现在来研究两球的对心碰撞。所谓球的对心碰撞，就是碰撞前的速度、碰撞时相互作用的冲量和碰撞后的速度都在两球心连线上的碰撞。

对心碰撞一般可分为两个阶段(图 1)：

第一阶段：压缩阶段。

因为 $v_1 > v_2$ ，后面的 m_1 追上并推前面的 m_2 ，所以两球相互挤压而变形。由于 m_2 的阻

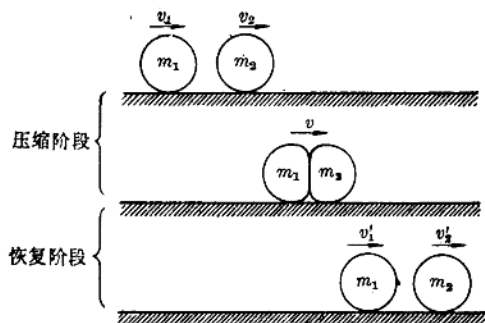


图 1

挡， m_1 的速度由 v_1 减小，而 m_2 由于被 m_1 推动，速度由 v_2 增大，直到它们的速度达到共同的速度 v 为止。这时 m_1 和 m_2 的变形达最大值。

第二阶段：恢复阶段。

两球达最大变形后，由于弹性形变所产生的弹力力图恢复原状，这就引起了新的挤压。于是使 m_1 的速度由 v 继续减小， m_2 的速度继续增大，直到它们分别以 v'_1 和 v'_2 的速度分离而告终。

从能量观点来看，碰撞可分为三类：

(1) 完全弹性体的碰撞。

所谓完全弹性体，就是在外力撤消后物体形变能完全跟着消除恢复至原状的物体。在碰撞的第一阶段，物体发生了弹性形变，一部分动能转化为两球的弹性势能；在第二阶段，弹性势能又全数转化为动能。因此碰撞前后两球的总动能不变。

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (1)$$

(2) 非弹性体的碰撞。

所谓非弹性体，就是在外力撤消后物体形变丝毫不能跟着消除的物体。在碰撞的第一阶段，物体发生了永久性的范性形变，一部分动能

损耗转化为热能和促使物体产生永久变形。由于内部没有弹性,所以碰撞没有恢复阶段,第一阶段结束就是碰撞过程的结束。这样原来速度不同的两球碰撞后不再分开,而以共同速度 v 前进。因此碰撞后两球的总动能减少。

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 > \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad (2)$$

(3) 非完全弹性体的碰撞。

所谓非完全弹性体,就是在外力撤消后物体形变只能部分消除的物体。在碰撞的第一阶段,两球同时发生了弹性形变和范性形变。一部分动能转化为弹性势能;在第二阶段,这些弹性势能又将转化为动能,另一部分动能损耗,转化为热能等散失掉。因此碰撞后总动能减少。

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 > \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (3)$$

三、恢复系数和三类碰撞的关系

牛顿根据实验发现:两物体对心碰撞前后速度的变化与碰撞物体的材料有关,其中一物体相对于另一物体的碰撞后的分离速度与碰撞前的趋近速度的比值是不变的,这个比值称为恢复系数 K 。

$$K = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad (4)$$

式中的 v_1, v_1' 分别表示 m_1 碰撞前、后的速度, v_2, v_2' 分别表示 m_2 碰撞前、后的速度。

现在来求三类材料的碰撞中 K 值的范围。

(1) 完全弹性碰撞

$$\begin{aligned} \text{由(1)式得} \quad & \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 \\ & = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{整理后得} \quad & \frac{1}{2}m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') \\ & = \frac{1}{2}m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \end{aligned} \quad (5)$$

由动量守恒定律得 $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$,
即 $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (6)$

$$(5) \text{式除以(6)式得} \quad v_1 + v_1' = v_2' + v_2,$$

$$\text{即} \quad v_2' - v_1' = v_1 - v_2,$$

$$K = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = 1 \quad (7)$$

(2) 非弹性碰撞

碰撞后不再分开,也就是 $v_2' = v_1' = v$,

$$\text{即} \quad v_2' - v_1' = 0.$$

得

$$K = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{0}{v_1 - v_2} = 0 \quad (8)$$

(3) 非完全弹性碰撞

$$\text{由(3)式得} \quad \frac{1}{2}m_1(v_1^2 - v_1'^2) > \frac{1}{2}m_2(v_2'^2 - v_2^2),$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & \frac{1}{2}m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') \\ & > \frac{1}{2}m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \end{aligned} \quad (9)$$

非完全弹性碰撞也遵循动量守恒定律,所以也满足(6)式。又因碰撞后 m_1 速度必减慢,即, $v_1' < v_1$, 故 $v_1 - v_1' > 0$,

$$\text{得} \quad m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) > 0.$$

$$\text{所以由(9)式除以(6)式得} \quad v_1 + v_1' > v_2' + v_2,$$

$$\text{则} \quad v_1 - v_2 > v_2' - v_1', \quad \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} < 1,$$

$$\text{即} \quad K < 1 \quad (10)$$

要发生碰撞,必须有 $v_1 > v_2$, 即 $v_1 - v_2 > 0$ 。

碰撞后要分离,必须有 $v_2' > v_1'$ (取 v_1 方向为正),

$$\text{即} \quad v_2' - v_1' > 0.$$

$$\text{所以} \quad \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} > 0, \text{即} K > 0 \quad (11)$$

合并(10)、(11)式,得 K 的范围是,

$$0 < K < 1 \quad (12)$$

严格说来,所有物体的恢复系数都在 $0 \sim 1$ 范围内。表一是一些材料间碰撞的恢复系数:

表一 恢复系数表

碰撞物体的材料	K 值
木球—胶木球	0.26
木球—木球	0.5
钢球—钢球	0.56
象牙球—象牙球	0.89
玻璃球—玻璃球	0.94

玻璃球、象牙球等的碰撞可以近似地看作完全弹性碰撞。

四、决定碰撞后速度变化的因素

由上述可知,恢复系数是碰撞材料的一种属性,它要求 v_1, v_2 和 v'_1, v'_2 符合 $K = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}$ 关系;同时 v_1, v_2, v'_1, v'_2 和 m_1, m_2 必须遵循动量守恒定律。因此得方程组:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 & (0) \\ K = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} & (4) \end{cases}$$

上面方程组共包含七个物理量,只要任意决定其中五个量,就可求得剩下两个量。一般 K 是作为已知量给出的。

现在我们使用上面方程组来确定碰撞后速度的可取值范围。解方程组可得

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - K m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} & (13) \\ v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + K m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} & (14) \end{cases}$$

(1) 对于完全弹性碰撞,根据(7)式将 $K=1$ 代入(13)、(14)式,经整理可写成

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} & (15) \\ v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} & (16) \end{cases}$$

在下述两种特殊情况下, v'_1, v'_2 的值为:

① 设两球质量相等

将 $m_1 = m_2$ 代入(15)、(16)式得 $v'_1 = v_2$ 和 $v'_2 = v_1$,即在两球质量相等情况下,碰撞后两球速度互换。

② 设前面的 m_2 碰撞前静止

将 $v_2 = 0$ 代入(15)、(16)式得

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

再设 m_2 质量远大于 m_1 , 即 $m_2 \gg m_1$ 时,

$$\text{则 } \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{-m_2}{m_2} = -1, \quad \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \approx 0.$$

得 $v'_1 \approx -v_1, v'_2 \approx 0$ 。即在大球质量远大于小球质量的条件下,小球撞击静止的大球后,小球将以原来大小的速率弹回,大球仍不动。乒乓球与铅球相撞就是这种情况。

(2) 对于非弹性碰撞,根据(8)式将 $K=0$ 代入(13)、(14)式则

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v \quad (17)$$

即两球在碰撞的压缩阶段完成后就不再分开,而以共同速度 v 前进。 v 的方向永远与原来动量较大的物体的速度方向一致,当两球同向前进时 v 的大小介于 $v_1 \sim v_2$ 之间。

再设若两球相向运动,速度大小和质量成反比。即 $v_1/v_2 = -m_2/m_1$ (负号表示 v_1, v_2 方向相反),则 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ 代入(17)式得 $v'_1 = v'_2 = 0$ 。即在这种情况下碰撞后两球停止运动。

用粘土或油灰制成的小球做此实验,可以验证上述非弹性碰撞的结果。

(3) 对于非完全弹性碰撞,将(13)式变形后得

$$K = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2)v'_1}{m_2(v_1 - v_2)} \quad (18)$$

根据(12)式先将 $K < 1$ 代入(18)式:

$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2)v'_1}{m_2(v_1 - v_2)} < 1,$$

两边乘 $m_2(v_1 - v_2)$ 得 $m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2)v'_1 < m_2(v_1 - v_2)$ 。(变形时注意到:① v_1, v_2 相向时,取 v_1 方向为正;② v_1, v_2 同向时, m_1 要追上 m_2 必有 $v_1 > v_2$, 所以 $m_2(v_1 - v_2)$ 恒大于0)经整理后得

$$v'_1 > \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (19)$$

再将 $K > 0$ 代入(18)式:

$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) v_1'}{m_2 (v_1 - v_2)} > 0,$$

上式中因 $m_2 (v_1 - v_2) > 0$, 所以

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) v_1' > 0,$$

解得
$$v_1' < \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (20)$$

合并(19)、(20)式可得:

$$\begin{aligned} \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} &< v_1' \\ &< \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

同理, 将 $K < 1$ 、 $K > 0$ 先后代入变形后的(14)式可得:

$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} < v_1' < \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

综上所述, 在编写物体碰撞前、后的题设条件(包括速度方向)时, 不能单从动量守恒的角度来考虑而随意取定, 否则有可能造成错误的题设条件。这点在编写碰撞习题时是必须注意的。

五、结论应用

中学物理中, 碰撞习题的类型主要有两种:

一种是根据一些条件求碰撞后(或前)的速度; 另一种是已知系统碰撞前、后的运动情况, 求碰撞时的冲量或碰撞力。由于质量一般都作为最初确定的值, 则命题合理与否的关键是取决题设条件中的速度。

现行中学物理教学大纲中并不引出恢复系数概念, 因此碰撞习题中只要求学生根据动量守恒一个方程求未知量。除非弹性碰撞($v_1' = v_2' = v$)外, 碰撞涉及 m_1 、 m_2 、 v_1 、 v_2 、 v_1' 、 v_2' 六个量。其中一个量是题中所求的, 余下五个量是已知的或间接知道的。那么在编题时任意四个量是可以先随意确定下来, 而剩下的第五个量就受前面四个量的约束, 所以要按下述方法确定:

(1) 若题设为非完全弹性碰撞, 则应代入(13)、(14)式去求第五个量, 式中的 K 值可按碰撞物体材料参考表一估定;

若题中不指明碰撞物体材料, 则 K 只要在 0~1 之间任定一值即可。

(2) 若题设为完全弹性碰撞, 则应代入(15)、(16)式去求第五个量。

有时为了编题简便起见, 在 m_1 、 m_2 、 v_1 、 v_2 已确定的情况下, v_1' (或 v_2')可在下面表二范围内选取。

表二 v_1' 、 v_2' 的可取值范围

碰撞种类 撞后速度	完全弹性	非完全弹性	非弹性
v_1'	$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} < v_1' < \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$	$v_1' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$
v_2'	$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$	$\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} < v_2' < \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$	$v_2' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$

[例一] 在本文开头所举习题中, 碰撞后第一球速度取多少才是合理的?

已知: $m_1 = 0.3$ 千克, $m_2 = 0.5$, 千克 $v_1 = 8$ 米/秒, $v_2 = 4$ 米/秒。

求: v_1' 的值是多大?

解: 根据表二经计算可知:

若题设为完全弹性碰撞, 则 v_1' 应取 3

米/秒;

若为非弹性碰撞, 则 v_1' 应取 5.5 米/秒;

若为非完全弹性碰撞, 则 v_1' 在 3 米/秒~5.5 米/秒范围内任取一值都是合理的(因题中未指明碰撞质料)。原题中取 $v_1' = -2$ 米/秒, 实际上是不可能达到的。

(下转第 19 页)

关于摩擦力的作用点的选择

上海市曹阳中学 丁 忠 孚

摩擦力的作用点,常见到的有两种画法,如图1(甲)、(乙)。到底哪一种是正确的?两种画

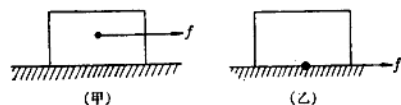


图 1

法是否可以任意选取?对这个问题,我认为有探讨的必要。

甲的画法,便于解题,用者甚多。但摩擦力是发生在两种物体的接触面上,而今却把它平移上去,显然是不恰当的。

乙的画法,注意了摩擦力的意义,但在解题时却遇到了困难。到底应该怎样画呢?(如把物体看成是质点,当然就不用研究了,实际上,两种看法明显地反映出此物体不是质点。)

下面就几种情况进行分析:

一、物体处于静止状态

在物体只受重力 P 和弹力 N 时,重力 P 和弹力 N 必在同一直线上,且大小相等,方向相反。

物体受一个外力 F 作用,又处于静止状态,必受一个静摩擦力 f ,其大小相等,方向相反,但不在一直线上,力 F 和力 f 要产生一个力偶矩 M 。假定物体是均匀的,其高为 a ,质心在 $\frac{a}{2}$ 高

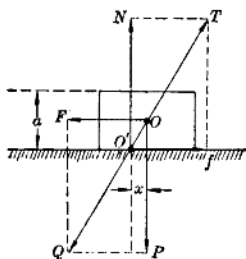


图 2

的地方,

$$\text{则} \quad M = \frac{1}{2}fa,$$

要使物体仍处于静止状态,必有一个反力矩,此反力矩只能由重力 P 和弹力 N 产生。重力的作用点是不变的,这就意味着弹力 N 的作用点必向左方平移 x 距离,此时反力矩为:

$$M_{\text{反}} = Px,$$

$$M = M_{\text{反}},$$

$$Px = \frac{1}{2}fa,$$

$$\therefore x = \frac{f}{2P}a.$$

也就是说,在这样的情况下,物体所受的弹力和重力不再在同一直线上了。重力 P 和拉力 F 合成为 Q ,弹力 N 和静摩擦力 f 合成为 T ,则合力 T 和合力 Q 必在同一直线上。

如果拉力加大,静摩擦力也相应增大,根据

$$x = \frac{f}{2P}a,$$

弹力 N 的作用点就会相应移动,仍使 T 和 Q 两个力平衡,保证物体仍处于静止状态。

当拉力等于最大静摩擦力时, x 有最大值

$$x_{\text{最大}} = \frac{f}{2P}a = \frac{\mu_{\text{静}}N}{2P}a = \frac{1}{2}\mu_{\text{静}}a,$$

如图3所示。所以,当外力在最大静摩擦力范

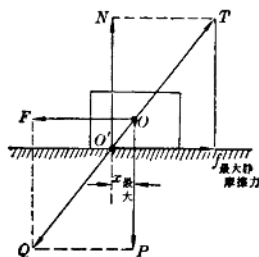


图 3

围内变化时,弹力 N 的作用点会调正位置,使物体始终处于静止状态。

二、物体作匀速直线运动

物体受力情况与物体处于静止状态时差不多,只需将静摩擦力改成滑动摩擦力,其 x 值为

$$x_{\text{滑}} = \frac{1}{2} \mu_{\text{滑}} a.$$

所以,当物体作匀速直线运动时, $x_{\text{滑}}$ 值将小于 $x_{\text{最大}}$ 。

三、物体作匀加速直线运动

物体作匀加速直线运动时,拉力 F 将大于摩擦力 $f_{\text{滑}}$,如取质心 O 为支点,则拉力 F ,重力 P 不产生力矩,此时,摩擦力 $f_{\text{滑}}$ 产生的力矩:

$$M_{\text{滑}} = \frac{1}{2} a f_{\text{滑}}.$$

弹力 N 产生的力矩:

$$M_{\text{弹}} = N x_{\text{滑}}.$$

物体无转动时

$$M_{\text{滑}} = M_{\text{弹}}$$

$$N x_{\text{滑}} = \frac{1}{2} a f_{\text{滑}},$$

$$x_{\text{滑}} = \frac{f_{\text{滑}}}{2N} a = \frac{1}{2} \mu_{\text{滑}} a.$$

所以,物体作匀加速直线运动时或作匀速直线运动时, $x_{\text{滑}}$ 值是一样的。如果把弹力 N 和摩擦力 $f_{\text{滑}}$ 合成为 T ,拉力 F 和重力 P 合成为 Q ,合力 Q 通过质心,合力 T 也必定通过质心(物体无转动,其合力矩为零)。再将合力 T 的作用点沿着力的作用线方向由 O' 移到质心 O 处,如图4中的力 T' (力的作用效果不变)。将力 T' 与 Q

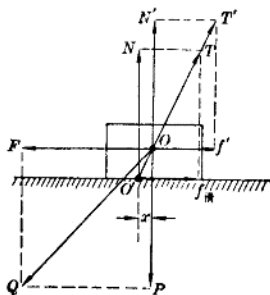


图 4

合成(共点力),这两个力在 y 方向上的分力 N' 和 P 相等,即 y 方向上合力为零。这两个力在 x 方向上的分力各为 F 和 f' ,其中 $f' = f_{\text{滑}}$ (两个三角形全等)。所以 F 和 f' 合成的量值是 $F - f_{\text{滑}}$,整个物体所受的合力就是 $F - f_{\text{滑}}$ 。

当 $F > f_{\text{滑}}$ 时,物体作匀加速直线运动;

$F = f_{\text{滑}}$ 时,物体作匀速直线运动;

$F < f_{\text{滑}}$ 时,物体作匀减速直线运动。

所以处于静止状态或匀速直线运动状态,只是物体作匀变速直线运动的特殊情况。

根据以上分析,摩擦力虽然是作用在相互滑动物体的接触面上,但由于弹力位置的调正,其效果跟作用在质心上是一样的。

对 $x = \frac{1}{2} \mu a$ 进行讨论又发现:

当 $a \rightarrow 0$ (物体很薄时),即 $x \rightarrow 0$ 时,

F, f, P, N 全作用在质心上,就不存在图1(甲)、(乙)之间的矛盾了。

当 a 较大, μ 也较大时, x 可能较大,以至于 $x > \frac{b}{2}$ (b 为物长),弹力 N 将作用到物体之外去了,显然,这是不可能的,前面的结论就绝对不能用了。

水平往前拖一直立长杆,长杆往往要被拖倒,而不是平动。(图5)当然在理想情况下,即

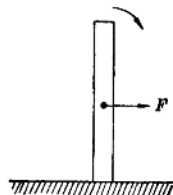


图 5

$\mu \rightarrow 0$ 时, $x \rightarrow 0$,此杆仍可平动。

综上所述:

摩擦力的作用点不能任意选取,它应该在相互滑动(滑动趋势)物体的接触面上,我们应该按图1(乙)的画法作力图,但在解题时,可平移至质心处。对这点必须对同学加以说明,如有条件的话,可证明给学生看,这样既讲清了摩擦力的概念,又便于解题。