


高等学校“十一五”规划教材

 机械设计制造及其自动化系列

机械结构有限元分析

张文志 韩清凯 刘亚忠 戚向东 编著

哈尔滨工业大学出版社

机械工业出版社

机械结构有限元分析

王 强 王 强 王 强 王 强 王 强

机械工业出版社

高等学校“十一五”规划教材



机械设计制造及其自动化系列

机械结构有限元分析

张文志 韩清凯 刘亚忠 戚向东 编著

哈尔滨工业大学出版社



内 容 摘 要

本书对机械结构有限单元法的基本概念、力学模型和数值方法及其在工程中的应用进行了较全面系统的论述。内容除包括线性弹性力学基本问题有限元法,即除介绍平面、空间、轴对称问题和薄板弯曲问题外,还介绍了结构动力学分析、温度场和热应力问题。为适应部分学校机械类专业研究生应用,还对几何与物理非线性有限元法的基础知识进行了较深入和适用性的讨论。

本书可作为工科院校机械类本科生和研究生的教材,也可供相关专业工程设计和研究人员学习参考。

Abstract

This book systematically discusses the FEM basic conception, mechanical mode, numerical method and application in engineering. It contains FEM of plane, space, axial symmetry and sheet bending problem, additionally, it introduce the FEM of structure dynamics, the temperature field and thermal stress. Also, it deeply discusses the fundamental knowledge of nonlinear finite element of the geometrically nonlinear, physically nonlinear problems, in order to meet the need of the postgraduate's study in the mechanical disciplines.

This book is written for the college students and postgraduates of the mechanical disciplines. And it can also be used as reference for engineers who are engaged in the mechanically engineering design and research.

图书在版编目(CIP)数据

机械结构有限元分析/张文志等编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2006. 7

ISBN 7 - 5603 - 2333 - 2

I .机… II .张… III .机械-结构分析:有限元分析 IV .TH112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 013260 号

责任编辑 潘 鑫
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787 mm × 1 092 mm 1/16 印张 17.5 字数 426 千字
版 次 2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷
印 数 1 ~ 4 000 册
定 价 26.80 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

高等学校“十一五”规划教材

机械设计制造及其自动化系列

编写委员会名单

(按姓氏笔画排序)

主任 姚英学
副主任 尤波 巩亚东 高殿荣 薛开 戴文跃
编委 王守城 巩云鹏 宋宝玉 张慧 张庆春
郑午 赵丽杰 郭艳玲 谢伟东 韩晓娟

编审委员会名单

(按姓氏笔画排序)

主任 蔡鹤皋
副主任 邓宗全 宋玉泉 孟庆鑫 闻邦椿
编委 孔祥东 卢泽生 李庆芬 李庆领 李志仁
李洪仁 李剑峰 李振佳 赵继 董申
谢里阳

总 序

自1999年教育部对普通高校本科专业设置目录调整以来,各高校都对机械设计制造及其自动化专业进行了较大规模的调整和整合,制定了新的培养方案和课程体系。目前,专业合并后的培养方案、教学计划和教材已经执行和使用了几个循环,收到了一定的效果,但也暴露出一些问题。由于合并的专业多,而合并前的各专业又有各自的优势和特色,在课程体系、教学内容安排上存在比较明显的“拼盘”现象;在教学计划、办学特色和课程体系等方面存在一些不太完善的地方;在具体课程的教学大纲和课程内容设置上,还存在比较多的问题,如课程内容衔接不当、部分核心知识点遗漏、不少教学内容或知识点多次重复、知识点的设计难易程度还存在不当之处、学时分配不尽合理、实验安排还有不适当的地方等。这些问题都集中反映在教材上,专业调整后的教材建设尚缺乏全面系统的规划和设计。

针对上述问题,哈尔滨工业大学机电工程学院从“机械设计制造及其自动化”专业学生应具备的基本知识结构、素质和能力等方面入手,在校内反复研讨该专业的培养方案、教学计划、培养大纲、各系列课程应包含的主要知识点和系列教材建设等问题,并在此基础上,组织召开了由哈尔滨工业大学、吉林大学、东北大学等9所学校参加的机械设计制造及其自动化专业系列教材建设工作会议,联合建设专业教材,这是建设高水平专业教材的良好举措。因为通过共同研讨和合作,可以取长补短、发挥各自的优势和特色,促进教学水平的提高。

会议通过研讨该专业的办学定位、培养要求、教学内容的体系设置、关键知识点、知识内容的衔接等问题,进一步明确了设计、制造、自动化三大主线课程教学内容的设置,通过合并一些课程,可避免主要知识点的重复和遗漏,有利于加强课程设置上的系统性、明确自动化在本专业中的地位、深化自动化系列课程内涵,有利于完善学生的知识结构、加强学生的能力培养,为该系列教材的编写奠定了良好的基础。

本着“总结已有、通向未来、打造品牌、力争走向世界”的工作思路,在汇聚多所学校优势和特色、认真总结经验、仔细研讨的基础上形成了这套教材。参加编写的主编、副主编都是这几所学校在本领域的知名教授,他们除了承担本科生教学外,还承担研究生教学和大量的科研工作,有着丰富的教学和科研经历,同时有编写教材的经验;参编人员也都是各学校近年来在教学第一线工作的骨干教师。这是一支高水平的教材编写队伍。

这套教材有机整合了该专业教学内容和知识点的安排,并应用近年来该专业领域的科研成果来改造和更新教学内容、提高教材和教学水平,具有系列化、模块化、现代化的特点,反映了机械工程领域国内外的新发展和新成果,内容新颖、信息量大、系统性强。我深信:这套教材的出版,对于推动机械工程领域的教学改革、提高人才培养质量必将起到重要推动作用。

蔡鹤皋

哈尔滨工业大学教授

中国工程院院士

2005年8月10日

前 言

自从1960年 Clough 提出“有限单元法”的名称以来,有限单元法的理论研究工作与应用技术得到了迅速而蓬勃的发展。有限单元法是当今科学技术发展和工程分析中获得最广泛应用的数值方法之一。由于它的通用性和有效性,受到工程技术界的高等重视,它不仅已经成为机械结构分析中必不可少的工具,而且能够应用于连续介质力学的各类问题而成为现象分析的一种手段。伴随着计算机科学和技术的快速发展,现已成为计算机辅助设计(CAD)与计算机辅助制造(CAM)工程和数值仿真的重要组成部分。

对于复杂的机械结构的静态、动态与热态,线性与非线性或稳定性计算分析,采用有限元法借助计算机运算,均可获得满意的结果。有限元结构分析与计算机图形、优化技术、可靠性计算等相结合形成完整的计算机辅助设计与辅助制造系统。此外,有限元法已经从固体力学领域扩展到流体力学、传热学、电磁场等其他领域。

到目前为止,虽然在应用技术上已开发出很多商业化的有限元分析软件以及以有限元方法为核心的大型通用结构分析程序系统,一般结构分析问题均可采用通用程序或专用程序求解,但在深化理论基础、构造优质单元、扩展应用范围、提高计算效率与精度,特别是对复杂系统的过程模拟或仿真计算、多场耦合分析等方面仍有研究和发展的巨大空间和面临重大挑战。

当代从事机械设计与制造等的机械工程技术人员必须具备有限元法方面的知识。无论是为了合理使用或开发通用程序、准备数据和正确分析计算结果,以及对现有软件的二次开发,都必须掌握有限元法的基本原理和方法。

本书的编写意在给予学生关于机械结构有限元分析的全面系统的概念、原理和方法,深刻地理解有限元法的数学力学基础,能比较全面地掌握机械结构分析各类问题的理论和方法,以便正确地构造单元和建立有限元分析模型,从而为能有效地开发分析程序或利用现有软件进行结构分析建立坚实的基础。

本书是为工科院校机械工程各专业学生学习有限元法而编写的,我们在编写中结合以往的教学经验,力求做到由浅入深,难点分散,循序渐进,从物理概念上说明问题。本书未引入典型程序,读者可根据各自的情况采用合适的计算程序。

全书共十章,内容分三部分:即基本部分、专题部分和提高部分。第1~4章为基本部分;第5~7章为专题部分;第8~10章为提高部分。书的内容比较广泛,在讲授中可以根据专业需要做适当的选择。在深度上还有一定的伸缩性,所以本书既能适用于机械类专业的高年级本科生,提高部分又可作为机械工程学科研究生的教学内容。

本书由燕山大学张文志教授、东北大学韩清凯教授、哈尔滨工业大学刘亚忠副教授、燕山大学戚向东副教授主编；燕山大学杜凤山教授主审。书中第1~3章由韩清凯教授编写；第5、6章由刘亚忠副教授编写；第4、7章由戚向东副教授编写；第8~10章由张文志教授编写。杜凤山教授认真而详细地审阅了全部稿件，并提出许多宝贵意见。燕山大学机械学院的博士生董志奎、硕士生张娜为本书出版做了许多有益的工作。在此一并表示感谢。另外，本书在编写过程中参考了许多文献，在此向其作者表示衷心感谢。限于我们的水平，书中难免有一些缺点和不妥之处，欢迎读者予以批评指正。

编著者

2006.2

目 录

// 第1章 绪论

1.1 有限单元法简介	1
1.2 有限单元法的基本思想	4
1.3 有限单元法的基本步骤	7
1.4 机械结构分析中的常用单元	9
习题	10

// 第2章 弹性力学基础

2.1 引言	11
2.2 弹性力学的几个基本概念	13
2.3 应力分析	16
2.4 应变分析	21
2.5 物理方程	26
2.6 弹性力学中的几个典型问题	31
2.7 弹性力学问题的一般求解方法	37
2.8 能量法与虚位移原理	42
习题	44

// 第3章 平面问题

3.1 平面梁单元	47
3.2 平面三角形常应变单元	51
3.3 平面三角形单元应用举例	61
3.4 单元形函数的构造	72
3.5 等效结点载荷列阵	84
3.6 矩形单元与平面等参元	87
习题	96

// 第4章 轴对称与空间问题

4.1 轴对称问题	101
4.2 空间问题	108
4.3 空间等参元与空间轴对称等参元	113
4.4 应用实例	117

习题	119
第 5 章 薄板弯曲问题	
5.1 弹性力学薄板弯曲问题的基本方程式	121
5.2 矩形薄板单元的刚度矩阵	126
5.3 三角形薄板单元的刚度矩阵	133
5.4 板和梁单元的组合问题	137
习题	141
第 6 章 结构动力学问题	
6.1 结构系统的动力学方程式	142
6.2 结构的无阻尼自由振动方程式	146
6.3 单元质量矩阵	147
6.4 单元阻尼矩阵	149
6.5 求解自由振动问题简例	150
6.6 特征值问题及其解法	152
6.7 振动系统动力响应计算	165
习题	170
第 7 章 温度场和热应力问题	
7.1 热传导问题的有限元分析	172
7.2 热弹性应力问题的有限元分析	182
7.3 应用实例	184
习题	191
第 8 章 材料非线性问题	
8.1 非线性方程组的解法	193
8.2 塑性基本法则及应力应变关系	198
8.3 弹塑性问题的有限元解法	207
8.4 蠕变问题的有限元计算	211
8.5 应用实例	214
习题	216
第 9 章 几何非线性问题	
9.1 小变形几何非线性有限元方程的建立与求解	218
9.2 有限变形几何非线性的几何描述	223
9.3 格林(Green)应变与阿尔曼西(Almansi)应变	227
9.4 欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)和克希荷夫(Kirchhoff)应力	231
9.5 有限变形几何非线性有限元方程的建立与求解	235
9.6 大变形增量问题的求解方法	241

9.7 算例	249
习题	250

// 第 10 章 结构稳定性问题

10.1 弹性结构的稳定性	252
10.2 结构稳定的判别	255
10.3 屈曲后的平衡路径分析	259
10.4 带初始缺陷的结构稳定性问题	265
10.5 数值算例	266

第 1 章

绪 论

1.1 有限单元法简介

1.1.1 有限单元法简介

有限单元法(finite element method, 简称 FEM)是求解数理方程的一种数值计算方法,是将弹性理论、计算数学和计算机软件有机结合在一起的一种数值分析技术,是解决工程实际问题的一种有力的数值计算工具。由于这一方法灵活、快速和有效,其迅速发展成为求解各领域数理方程的一种通用的近似计算方法。目前,有限单元法在许多科学技术领域和实际工程问题中都得到了广泛的应用,如机械制造、材料加工、航空航天、土木建筑、电子电气、国防军工、船舶、铁道、汽车和石化能源等,并受到了普遍重视。现有的商业化有限元软件已经成功应用于固体力学、流体力学、热传导、电磁学、声学 and 生物力学等领域,能够求解由杆、梁、板、壳和块体等各类单元构成的弹性(线性和非线性)、弹塑性或塑性问题(包括静力和动力问题),求解各类场分布问题(流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题),求解水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用等问题。

有限单元法的主要思想,是对连续体的求解域(物体)进行单元剖分和分片近似,通过边缘结点相互连接而成为一个整体,然后用每一单元内所假设的近似场函数(如位移场或应力场等)来分片表示全求解域内的未知场变量,利用相邻单元公共结点场函数值相同的条件,将原来待求场函数的无穷自由度问题,转化为求解场函数结点值的有限自由度问题,最后采用与原问题等效的变分原理或加权余量法,建立求解场函数结点值的代数方程组或常微分方程组,并采用各种数值方法求解,从而得到问题的解答。

有限单元法具有如下优点:

(1)分析对象的几何形状适应性强。有限单元法可以处理任意的几何形状和一般的边界条件,还可以处理非均匀的和各向异性的材料,即可以处理由许多不同材料组成的、任意几何形状的对象。

(2)适用范围广。有限单元法的场函数选择灵活,一般能够应用于固体、流体、热传导、电磁学和声学等多种场问题的分析。

(3)较好的稳定性和收敛性。有限单元法的数学基础是积分形式的变分原理或加权余量法,把数理方程的求解等效成为定积分运算和线性代数方程组或常微分方程组的求解,只要保证数学模型的正确性和方程组求解算法的稳定性和收敛性,并选择收敛的单元形式,其近似解总能收敛于数学模型的正确解。

(4)便于计算机进行处理。有限单元法采用矩阵形式和单元组装方法,每一个步骤都便于实现计算机软件模块化,有利于计算机软件的处理。

1.1.2 有限单元法的发展

从应用数学的角度考虑,有限单元法的基本思想可以追溯到 20 世纪 40 年代初,当时就有人尝试使用三角形区域定义分片连续函数并与最小位能原理相结合,以求解扭转问题。到了 50 年代中期,开始利用这种思想对飞机结构进行矩阵分析,其中基本思路是将整个结构视为由有限个力学小单元相互连接而形成的集合体,把每个单元的力学特性组合在一起以提供整体结构的力学特性。1960 年,这一方法开始用于求解弹性力学的平面应力问题,并开始使用“有限单元法”这一术语,人们更清楚地认识到有限单元法的特性和功效。到 20 世纪 70 年代以后,随着计算机软件技术的发展,有限单元法也随之迅速地发展起来,相关方面发表的论文犹如雨后春笋,学术交流频繁,期刊、专著不断出现,可以说进入了有限单元法的鼎盛时期。大型有限元分析软件已成为现代工程设计中不可缺少的工具,并且与 CAD 等相结合,形成了大规模集成的 CAE(计算机辅助工程分析)系统。发展到今天,工程技术人员使用有限单元法已经十分简便。例如,完成一项结构分析的主要内容将主要包括如何将复杂的工程实际问题加以简化、如何建立合理的计算模型力学,然后再按有限元程序的要求准备所需数据和信息,最后再检查计算结果是否合理等几个方面。

当前有限单元法的发展趋势是:(1)需要建立更多新材料的单元形式,以适应工程中新材料和新复杂结构分析的需要,特别是复合材料、高分子材料、陶瓷材料、纳米材料、环境材料、智能材料和功能材料等;(2)研究模拟复杂和极端载荷工况下的结构力学行为、结构非线性特性、多场耦合等问题,以及相应的自适应数值计算方法;(3)加强与网络化 CAD/CAM/CAE 等大型软件的无缝集成,实现产品从设计、制造、运行直至失效的分析与模拟,以达到全面提高并保证产品综合质量的目标。

1.1.3 机械结构分析的有限单元法应用及有关软件

在机械结构的分析中,有限元的应用主要分为以下几个方面:

①静力学分析,即求解所受的外部载荷不随时间变化或随时间变化缓慢的机械系统平衡问题。

②模态分析,即求解关于系统的某种特征值或稳定值的问题。

③瞬态动力学分析,即求解所受的外部载荷随时间发生变化的动力学响应问题。

④非结构力学分析,主要有机械系统的热传导(温度场)、噪声分析与控制以及结构、热、噪声等多维场有限元耦合分析。

在机械结构分析的软件方面,最早的是美国国家宇航局(NASA)在 1965 年委托美国计算科学公司和贝尔航空系统公司开发的 NASTRAN 有限元分析系统,该系统发展到现在已有几十个版本。此外,比较知名的有限元分析软件有德国 ASKA,英国 PAFEC,法国 SYSTUS,美国 ABAQUS、ADINA、ANSYS、BERSAFE、BOSOR、COSMOS、ELAS、MARC、STAR-DYNE 等。下面仅介绍几种当前比较流行的有限元软件系统。

①ANSYS。ANSYS是融结构、流体、电场、磁场和声场分析于一体的大型通用有限元分析软件。其主要特点是具有较好的前处理功能,如几何建模、网格划分、参数设置等;具有分析计算模块,主要包括结构分析、流体动力学分析、电磁场分析、声场分析、压电分析以及多物理场的耦合分析,可以模拟多种物理介质的相互作用,具有灵敏度分析及优化分析能力;后处理的计算结果有多种显示和表达能力。ANSYS软件系统主要包括 ANSYS/Multiphysics 多物理场仿真分析工具、LS-DYNA 显式瞬态动力分析工具、Design Space 设计前期 CAD 集成工具、Design Xploere 多目标快速优化工具和 FE-SAFE 结构疲劳耐久性分析等。ANSYS 已在工业界得到较广泛的认可和应用。

②MSC/NASTRAN。MSC/NASTRAN 是在原 NASTRAN 基础上进行大量改进后的系列软件,主要包括 MSC.Patran 并行框架式有限元前后处理及分析系统、MSC.GS-Mesher 快速有限元网格、MSC.MARC 非线性有限元软件等。其中 MSC.MARC 具有较强的结构分析能力,可以进行线性和非线性结构分析,如线性/非线性静力分析、模态分析、简谐响应分析、频谱分析、随机振动分析、动力响应分析、静/动力接触、屈曲/失稳、失效和破坏分析等。它提供了丰富的结构单元、连续单元、特殊单元的单元库,几乎每种单元都具有处理大变形几何非线性、材料非线性和包括接触在内的边界条件非线性以及组合的高度非线性的能力。MARC 的结构分析材料库提供了模拟金属、非金属、聚合物、岩土、复合材料等多种线性和非线性复杂材料行为的材料模型。MARC 软件还提供了多种加载步长自适应控制技术,能够自动确定分析屈曲、蠕变、热弹塑性和动力响应的加载步长。此外,它还具有分析非结构场问题(温度场、流场、电场、磁场等)、模拟流-热-固、土壤渗流、声-结构、耦合电磁、电-热、电-热-结构以及热-结构等多种耦合场的能力。

③ADINA System。ADINA System 主要包括 ADINA、ADINAT 和 ADINAF,能够完成结构和流体流动分析。基本线性结构分析效率高,能够有效地考虑非线性效应,如几何非线性、材料非线性和接触状态等,对于流体能够计算可压缩和不可压缩流动,具有流体-结构全耦联分析功能。

④ABAQUS。ABAQUS 是能够解决线性分析和许多复杂的非线性分析问题的一个通用有限元软件。ABAQUS 带有丰富的单元库和材料模型库,可以模拟金属、橡胶、高分子材料、复合材料、钢筋混凝土,可压缩超弹性泡沫材料以及土壤和岩石等典型工程材料和地质材料。ABAQUS 还可以模拟热传导、质量扩散、热电耦合分析、声学分析、岩土力学分析(流体渗透/应力耦合分析)、压电介质分析等。ABAQUS 有两个主求解器模块(ABAQUS/Standard 和 ABAQUS/Explicit),对某些特殊问题还提供专用模块。ABAQUS 具有解决庞大复杂问题和模拟高度非线性问题的独特优点。

⑤COSMOS。COSMOS 是一套强大的有限元分析软件,能够提供广泛的分析工具以检验和分析复杂零件及其装配,能够进行应力分析、应变分析、变形分析、热分析、设计优化、线性和非线性分析。COSMOS 的主要功能模块为:前、后处理器是一个在交互图形用户环境中完全结合特征几何造型和前后处理的处理器;静力分析模块提供一个完全集成的前后处理器,在操作环境中即时显示设计过程。此外,还包括频率及屈曲分析模块、热效分析模块、动力分析模块、非线性分析模块、疲劳分析模块、优化和灵敏度分析模块、流体分析模块、紊流分析加强模块、低频电磁分析模块、高频电磁分析模块等。同时 COSMOS 的强大而完整的分析能力,能够在设计造型与机构模拟之后,快速且直接地取得该设计的有限

元分析信息。

⑥LS-DYNA。LS-DYNA 是以显式为主、隐式为辅的通用非线性动力分析有限元程序,特别适合求解各种二维、三维非线性结构的高速碰撞、爆炸和金属成形等非线性动力冲击问题,同时可以求解传热、流体及流固耦合问题。LS-DYNA 程序是功能齐全的几何非线性(大位移、大转动和大应变)、材料非线性(材料动态模型)和接触非线性程序。它以 Lagrange 算法为主,兼有 ALE 和 Euler 算法;以显式求解为主,兼有隐式求解功能;以结构分析为主,兼有热分析、流体-结构耦合功能;以非线性动力分析为主,兼有静力分析功能(如动力分析前的预应力计算和薄板冲压成形后的回弹计算);军用和民用相结合的通用结构分析非线性有限元程序。LS-DYNA 利用 ANSYS、LS-INGRID、ETA/FEMB 及 LS-POST 强大的前后处理模块,具有多种自动网格划分选择,并可与大多数的 CAD/CAE 软件集成并有接口。前处理:有限元直接建模与实体建模;布尔运算功能,实现模型的细雕刻;模型的拖拉、旋转、拷贝、蒙皮和倒角等操作;完整、丰富的网格划分工具,自由网格划分、映射网格划分、智能网格划分、自适应网格划分等。后处理:结果的彩色等值线显示,梯度显示,矢量显示,等值面,粒子流迹显示,立体切片,透明及半透明显示,变形显示及各种动画显示;图形的 PS、TIFF 及 HPGL 格式输出与转换等。

1.2 有限单元法的基本思想

有限单元法的基本思想是将结构离散化,用有限个容易分析的单元来表示复杂的对象,单元之间通过有限个结点相互连接,然后根据变形协调条件综合求解。由于单元的数目是有限的,结点的数目也是有限的,所以称为有限单元法。

有限单元法的概念源于结构力学分析理论,下面以结构力学中的杆件系统求解为例描述有限元的基本过程。对于一个杆系结构,通常是由许多结构杆件(单元)组成,这些单元仅在有限个结点上彼此相连。对每个单元而言,力与位移之间的关系等结构特性可以用结点上所确认的自由度来惟一地加以规定,而整体杆系的结构特性则可以通过组集这些单元特性加以描述。

图 1.1 所示的是一个由二根杆件组成的铰接桁架。杆件的截面积为 A ,弹性模量为 E ,长度分别为 l_1 和 l_2 。该桁架在各铰接点处有外力 $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ 。因杆件在结点处是铰接,不承受弯矩,只能承受轴向力,所以,每个结点的力和位移各有两个分量,即每个结点均具有两个自由度,因此每个单元则有四个自由度。为此,用四个方程来描述每个单元的力与位移之间的关系。对于单元 ①,有

$$\left. \begin{aligned} U_1^1 &= k_{11}u_1^1 + k_{12}v_1^1 + k_{13}u_2^1 + k_{14}v_2^1 \\ V_1^1 &= k_{21}u_1^1 + k_{22}v_1^1 + k_{23}u_2^1 + k_{24}v_2^1 \\ U_2^1 &= k_{31}u_1^1 + k_{32}v_1^1 + k_{33}u_2^1 + k_{34}v_2^1 \\ V_2^1 &= k_{41}u_1^1 + k_{42}v_1^1 + k_{43}u_2^1 + k_{44}v_2^1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 U_1^1, V_1^1 ——结点 1 施于单元 ① 的结点力沿坐标轴方向的分量;

U_2^1, V_2^1 ——结点 2 施于单元 ① 的结点力沿坐标轴方向的分量;

u_1^1, v_1^1 ——结点 1 的位移沿相应坐标轴方向的分量;

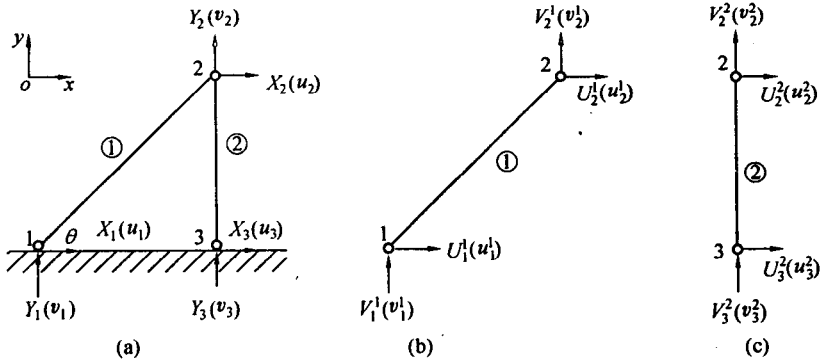


图 1.1 铰接桁架

u_2^1, v_2^1 ——结点 2 的位移沿相应坐标轴方向的分量。

上标是单元编号,下标为结点编号。

可将式(1.1)写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} U_1^1 \\ V_1^1 \\ U_2^1 \\ V_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

或简记为

$$R^1 = k^1 \delta^1 \quad (1.3)$$

式中 δ ——单元 ① 的结点位移向量, $\delta^1 = [u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_2^1 \quad v_2^1]^T$;

R^1 ——单元 ① 的结点力向量, $R^1 = [U_1^1 \quad V_1^1 \quad U_2^1 \quad V_2^1]^T$;

k^1 ——单元 ① 的刚度矩阵,其中 $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{44}$ 为刚度系数。

若令

$$u_1^1 = 1$$

及

$$v_1^1 = u_2^1 = v_2^1 = 0$$

则有

$$U_1^1 = k_{11} \quad V_1^1 = k_{21} \quad U_2^1 = k_{31} \quad V_2^1 = k_{41}$$

这表明,当结点 1 沿 x 方向产生一单位位移($u_1^1 = 1$),而其余结点、其余自由度方向上的位移为零时,刚度系数就等于施加于该单元各自由度方向上的力。

如图 1.2 所示,在此状态下,单元的长度将缩短 $\Delta l_1 = \cos \theta$ 。根据材料力学知识,在结点 1 处需要向单元 ① 施加的轴向压力为

$$\left(\frac{EA}{l_1}\right) \Delta l_1 = \frac{EA \cos \theta}{l_1}$$

由此可以求得作用于单元 ① 结点 1 处两个自由度方向上的力,即该轴向压力在 x 和 y 方向上的分量