2007 人大考研

最全面、最权威、最实用的数学真题解析

2007考研
数学四
最新历年真题题型解析

主　编　黄先开　曹显兵
副主编　施明存　殷先军

- 囊括20年全部真题
- 名师归纳总结94题型
- 附送6重好礼

- 全书按大纲考试要求设置结构，按章归纳题型、分类解析1987～2006年真题
- 题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
- 章章总结，将历年试题题型、分值分布情况列表，考试重点清晰可见
- 每章后附自测练习题，全部来自数一、二、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通
- 20年真题原样重现，附录在全书最后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

中国人民大学出版社

国内同类最畅销图书

考研

数学四最新历年真题题型解析

主　编　黄先开　曹显兵

副主编　施明存　殷先军

正版查询及服务程序

刮开涂层

获取16位数字编码

以编码作短信查真伪

上 www.1kao.net 注册

登录增值服务进免费课堂

2007

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学四最新历年真题题型解析/黄先开,曹显兵主编
北京:中国人民大学出版社,2006
ISBN 7-300-07366-2

Ⅰ.考…
Ⅱ.①黄…②曹…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 056051 号

考研数学四最新历年真题题型解析
主　编　黄先开　曹显兵
副主编　施明存　殷先军

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511239(出版部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net (中国 1 考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	210×285mm　16 开本	**版　　次**	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	23.25	**印　　次**	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	640 000	**定　　价**	28.00 元

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已整整 20 年，共命制试卷近百份，有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

"知己知彼，百战不殆"。拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题，可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心分析研究，并结合授课体会和学生的需要经过全新编写而成的，相信能够满足考生的要求。

本书具有以下特点：

1. 内容最全面。汇集了统考以来 20 年的所有试题，便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供（如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题），以便考生进一步巩固相关知识，**考生有了本书后，也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。**

2. 分类最精练。题是无限的，但题型是有限的。我们**将全部历年真题精心浓缩为 100 个左右的典型题型**，分别涵盖了考试大纲对四个卷种要求的全部内容，从而为考生节省大量宝贵的复习时间。

3. 题型最丰富。根据考试大纲的要求，**每一章节均按题型进行归类，并对每一题型进行了分析、归纳和总结。**这样考生可通过题型研究，把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通。

4. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法，然后详解——详细、规范的解答过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及到的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

5. 对照最直接。本书在每部分的开头，先列出了考试大纲规定的内容与要求，与此相对照再进行**题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一致，**便于考生对照复习。

6. 总结最完整。除**每类题型均有归纳总结外，每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结，**这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。前期复习建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查找原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。**整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，衷心祝愿广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，一定能够心想事成。

黄先开　曹显兵

2006 年 5 月 24 日于北京

目 录

第一部分 微积分

第二部分 线性代数

第三部分 概率论

附 录

PART ONE

第一部分

微积分

第一章　函数、极限、连续

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

题型 1.1　函数的概念及其特性

1. (90,3 分) * 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot \mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.　　(B) 无界函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 单调函数.　　【　】

【答案】 应选(B).

【详解 1】 令 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\infty$.

---

* (90,3 分) 表示该题为 1990 年考研数学四真题，其分值为 3 分. 全书同.

因此 $f(x)$ 是无界函数，故应选(B).

【详解 2】　可用排除法.

由于
$$f(-x)=-x\cdot\tan(-x)\cdot e^{\sin(-x)}=x\tan x e^{-\sin x}\neq f(x),$$
故 $f(x)$ 不是偶函数，显然 $f(x)$ 也不是周期函数.

而 $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时，$f(x)\to+\infty$；　$x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ 时，$f(x)\to-\infty$；　$x\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$ 时，$f(x)\to+\infty$，

故 $f(x)$ 也不是单调函数. 所以只有(B) 项正确.

【评注】　本题主要考查函数的基本性质：奇偶性、周期性、单调性、有界性.

---

2. (92,3 分) 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ______的定义域为________.

【答案】　应填 $\arcsin(1-x^2)$，$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【分析】　由 $f(x)$ 可得 $f[\varphi(x)]$，再由 $f[\varphi(x)]$ 表达式即可得 $\varphi(x)$.

【详解】　由 $f(x)=\sin x$，得
$$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2,\text{即 }\varphi(x)=\arcsin(1-x^2),$$
其定义域为 $|1-x^2|\leqslant 1$，即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

---

3. (04,4 分) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界？

(A)$(-1,0)$.　　(B)$(0,1)$.　　(C)$(1,2)$.　　(D)$(2,3)$.　　【　】

【答案】　应选(A).

【分析】　如 $f(x)$ 在(a,b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在(a,b) 内有界.

【详解】　当 $x\neq 0,1,2$ 时，$f(x)$ 连续，而
$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},\qquad \lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to 2}f(x)=\infty,$$
所以，函数 $f(x)$ 在$(-1,0)$ 内有界，故选(A).

【评注】　一般地，如函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上有界；如函数 $f(x)$ 在开区间(a,b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在开区间(a,b) 内有界.

◆◆

函数的概念及复合，包括分段函数的复合，本质上是函数关系的建立问题，而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性，奇偶性和周期性一般用定义检验；单调性则大多用导数符号分析；而有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2　极限概念与性质

1. (00,3 分) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.　　【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 若不能得出肯定的结论时,可举反例进行说明.

【详解】 若令 $\varphi(x)=1-e^{-|x|}$,$g(x)=1+e^{-|x|}$,$f(x)=1$,则有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\text{且}\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0,\lim_{x\to\infty}f(x)=1.$$

可排除(A),(C) 两个选项.

又如 $\varphi(x)=e^x-e^{-|x|}$,$g(x)=e^{-|x|}+e^x$,$f(x)=e^x$,显然 $\varphi(x)$,$g(x)$,$f(x)$ 满足题设条件,但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在,因此(B) 也可排除,剩下(D) 为正确选项.

【评注】 注意由 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 并不能推出 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 存在且相等.

2.(03,4 分,数学一) 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.　　【　】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限概念,极限值与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B);而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是"$0\cdot\infty$"型未定式,可能存在也可能不存在,举反例说明即可;极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属"$1\cdot\infty$"型,必为无穷大量,即不存在.故应选(D).

【详解 2】 用举反例法,取 $a_n=\dfrac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除(A),(B),(C),因此正确选项为(D).

【评注】 关于极限的存在性,以下几点是值得注意的:

(1) 若 $\lim f$ 存在,$\lim g$ 不存在,则 $\lim(f\pm g)$ 一定不存在,但 $\lim(fg)$,$\lim\dfrac{f}{g}$ 可能存在,也可能不存在;

(2) 若 $\lim f=l\neq 0$,$\lim g=\infty$,则 $\lim fg=\infty$;

(3) 若 f 有界,$\lim g=\infty$,则 $\lim[f\pm g]=\infty$,但 $\lim fg$ 不一定为 ∞.

题型 1.3　函数极限的计算

Ⅰ.利用左右极限求函数极限

1.(87,2 分)(是非题) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$.　　【　】

【答案】 应填"错".

【分析】 利用左右极限进行讨论.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,故 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$ 不正确.

2.(88,2 分)(是非题) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 均存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在.　　【　】

【答案】 应填"错".

【分析】 利用函数极限的运算性质可得.

【详解】 因为 $g(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$,故只有当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 均存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 才必存在.

反例:$\lim\limits_{x\to 0}x$,$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$ 均存在,但 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

---

3. (92,3 分,数学一) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.　　(C) 为 ∞.　　(D) 不存在,但不为 ∞.　　【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, 而 $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,　$\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,　故有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

可见, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在且不为 ∞.

【评注】 $\lim\limits_{x\to x_0}a^{\frac{1}{x-x_0}}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan\dfrac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形,遇此情形一般应通过左右极限进行讨论.

---

4. (00,5 分,数学二) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【分析】 本题函数关系式中含有绝对值,本质上是一分段函数,在分段点的极限应通过左右极限来讨论.

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{2}{1}-1=1$,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

可见,原式 $=1$.

【评注】 形如 $|f(x)|$, $\max\{f(x),g(x)\}$ 的函数,本质上是分段函数,在求极限、导数和积分时一般均应分段讨论.

◆◆

> 在讨论分段函数极限时一般用结论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,因此,当左右极限 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

Ⅱ. 求未定式 $\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0\right)$ 的极限

1. (87,4 分) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\arctan\dfrac{1}{x}}$.

【详解】 利用无穷小量的等价代换,当 $x\to+\infty$ 时,有 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$, $\arctan\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$,于是,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

---

2. (88,4 分) 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

【详解】　原式 $=\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{4}{\pi}$.

3.(89,5分)求极限 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

【分析】　本题为"1^∞"型未定式,直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

【详解】　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x+e^x-1)^{\frac{1}{x+e^x-1}}\right]^{\frac{x+e^x-1}{x}}=e^2$.

【评注】　对于"1^∞"型极限 $\lim f(x)^{g(x)}$,可按以下方法求解:

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1+f(x)-1]}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$$

(当 $f(x)\to1$ 时,$\ln[1+f(x)-1]\sim f(x)-1$).

于是

$$\lim_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}[x+e^x-1]}=e^2.$$

4.(91,3分)下列各式中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$.　　【　】

【答案】　应选(A).

【分析】　分别求四个极限即可.注意它们所属的未定式极限类型.

【详解】　因为

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\xlongequal{(\infty^0)}\lim_{x\to0^+}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right\}=e^0=1.$$

故应选(A).

5.(91,5分)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

【分析】　本题属"∞^0"型未定式,转化为指数函数后再用洛必达法则即可.

【详解】　原式可以化为

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right\}.$$

其中大括号内的极限是"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式.因此由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

【评注】　对于"1^∞"型极限,有 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1+f(x)-1]}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$(当 $f(x)\to1$ 时,$\ln[1+f(x)-1]\sim f(x)-1$).对于"∞^0","0^0"型极限,只能化为 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$.

6. (92,5分) 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

【分析】 利用洛必达法则求解即可.

【详解】 $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos(x-1)}[-\sin(x-1)]}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

【评注】 本题也可令 $x-1=y$,转化为 $y\to 0$ 时求极限,计算过程更简单.

7. (94,5分) 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

【分析】 作变换 $x=\frac{1}{t}$,再通分化为"$\frac{0}{0}$"型极限利用洛必达法则求解.

【详解】 作变换 $x=\frac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

8. (97,6分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$ $(a\neq 0)$.

【分析】 通分后化为"$\frac{0}{0}$"型未定式,再用洛必达法则求解即可.

【详解】 $$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a+2a^2x\ln(1+ax)-a(1-ax)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a^2\ln(1+ax)+\frac{2a^3x}{1+ax}+a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

9. (00,3分) 若 $a>0$, $b>0$ 均为常数,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ______.

【答案】 应填$(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【分析】 属于"1^∞"型未定式极限,可用第二类重要极限或转化为指数函数进行计算.

【详解1】 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right]^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\cdot\frac{3}{2}\frac{a^x+b^x-2}{x}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}}=e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{1}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}\ln ab}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

【详解2】 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(a^x+b^x)-3\ln 2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}3\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}=e^{\frac{3}{2}\ln ab}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$