

2006

硕士学位研究生入学资格考试

刘庆华 主编

GCT

数学

模拟试题与解析

Graduate Candidate Test



清华大学出版社

2006

硕士学位研究生入学资格考试

GCT

数学

模拟试题与解析

刘庆华 主编

刘庆华 关 治 傅志明 王飞燕 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据硕士学位研究生入学资格考试指南的要求,编写了 12 套模拟试题,每套试题包含 25 道单项选择题,其中算术、代数、几何三部分有 15 道题,一元函数微积分、线性代数两部分有 10 道题。书中给出了每套模拟试题的答案与解析过程,供考生们参考。

本书可供准备参加硕士学位研究生入学资格考试的备考人员以及辅导教师使用。

版权所有,翻印必究。举报电话: 010-62782989 13501256678 13801310933

本书扉页为防伪页,封面贴有清华大学出版社防伪标签,无上述标识者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

硕士学位研究生入学资格考试 数学模拟试题与解析/刘庆华主编; 刘庆华, 关治, 扈志明, 王飞燕 编。—北京: 清华大学出版社, 2006. 6

ISBN 7-302-13086-8

I. 硕… II. ①刘… ②刘… ③关… ④扈… ⑤王… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 052868 号

出 版 者: 清华大学出版社 地 址: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175 客户服务: 010-62776969

责任编辑: 刘 颖

印 装 者: 清华大学印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×230 印张: 9.25 防伪页: 1 字数: 200 千字

版 次: 2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-13086-8/O · 546

印 数: 1 ~ 60000

定 价: 19.00 元

说明

Introduction

硕士学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test, GCT)是国

务院学位委员会办公室组织的全国统一考试。考试始于 2003 年, 当时名为“工程硕士专业学位研究生入学资格考试”(简称 GCT-ME), 考试适用范围为报考工程硕士的考生。2004 年, 适用范围增加了报考农业推广和兽医专业硕士的考生, 考试名称去掉了“工程”二字。2005 年, 国务院学位委员会办公室组织专家对 2003 版考试大纲进行了修订, 同时考试适用范围又增加了报考风景园林硕士, 以及高等学校教师、中等职业学校教师在职攻读硕士学位的考生, 考试名称改为“硕士学位研究生入学资格考试”。GCT 考试属于综合素质型考试。考试试卷由 4 部分构成: 语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试、外国语运用能力测试。试卷满分 400 分, 每部分各占 100 分。考试时间为 3 个小时, 每部分为 45 分钟。考试试题均为客观选择题。

清华大学出版社是国内最早出版 GCT 考前辅导用书的出版机构。2003 年, 我们出版了由全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织编写的《全国工程硕士专业学位研究生入学资格考试考前辅导教程》丛书, 包括语文、数学、英语、逻辑共 4 册。2004 年, 在对考前辅导教程系列进行修订再版的基础上, 又特别邀请教程系列的作者编写了《硕士专业学位研究生入学资格考试模拟试题与解析》系列, 同样分为语文、数学、英语、逻辑 4 册, 作为考前辅导教程的配套资料, 供考生考前模拟训练之用。2005 年, 我们又根据新大纲的要求, 对考前辅导教程系列和模拟试题与解析系列进行了全面修订。多年来, 我们一直同有关管理机构和学术研究组织紧密合作, 伴随 GCT 考试走过诞生、改革和

发展的进程,在深入研究 GCT 的发展趋势和广大在职考生的实际需求的基础上,不断改进、完善。经过多年的积累和提高,清华版 GCT 考前辅导用书以其权威性、严谨性、全面性和实用性,给广大考生复习和备考提供了方便,赢得了广大考生的欢迎和信赖,成为广大考生考前复习、模拟训练的第一选择。

以国务院学位委员会办公室组织制定的《硕士学位研究生入学资格考试指南(2006 年版)》为依据,根据近几年考试命题的发展趋势,结合考生使用本套图书的反馈意见,以及作者在考试辅导课程教学过程中积累的经验,我们对上述 8 种考前辅导用书进行了细致的修订,推出了这套 2006 年版的 GCT 考前辅导用书。新版本反映了考试大纲的一些细微变化,同时更加贴近在职考生的实际需求,更加精确和细致。例如,为更便于考生复习,对《数学考前辅导教程》的篇幅进行了适当精简,删去一些较难或较繁的例题或典型例题,同时对一些比较边缘的知识点也做了相应的处理。根据新指南,对《语文模拟试题与解析》中阅读理解部分的结构进行了调整,适当降低了难度,等等。同时,我们还最新组织编写了《英语核心词汇精解》和《综合模拟试卷》两本书,以供考生深入复习和临考前进行实战模拟。相信新版的图书一定会为考生备考提供更大的帮助。

为满足考生备考的深入需求,清华在线(www.qinghuaonline.com)开通了由本系列图书作者主讲的“新大纲辅导网络课程”,同时还将在全国部分城市开展面授串讲活动(需交费购买或参加)。读者可以登录清华在线的“GCT 购书赠课专区”,输入密码 tup,获得清华在线为本套丛书的用户特别提供的部分免费资料,包括语文(百科知识串讲)、GCT 英语词汇精讲、部分高校历年录取分数线等三项内容。此外,集齐 4 份本“出版说明”,还可以以优惠价格参加串讲活动。详情可登录清华在线查询。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社

2006 年 5 月

前

硕士学位研究生入学资格考试

言

Foreword

本书是根据硕士学位研究生入学资格考试指南编写的数学辅导材料，以方便考生备考。

按照现在的复习备考方式，大致将复习的过程分为3个阶段：全面复习阶段、归纳总结阶段和冲刺阶段。在每个阶段考生所选用的辅导材料是有区别的。在全面复习阶段，一般选用涵盖考试大纲所涉及的知识点的教材（我们所编写的《硕士学位研究生入学资格考试 数学考前辅导教程》就是为此准备的），此阶段的主要任务是将所要考的知识点搞清楚、弄明白，扫清知识上的盲点。在归纳总结阶段，是对前一阶段所复习知识的浓缩和提升，以便于自己从全局上把握所复习的知识，突出重点和难点。由于各自的知识背景和复习效果不同，所以浓缩和提升的程度也不同，因此，这一阶段可选择的材料较少，一些辅导教师开设串讲课来帮助备考者归纳总结，考生也可根据自身特点，自己总结或提炼此阶段的复习材料和复习方法。在冲刺阶段，大多采取做模拟题的方式，通过做模拟题来检查自己对知识点的掌握程度以及灵活运用所学知识处理问题的能力，同时也可从中发现自己的薄弱点，以便及时调整复习的方式和方法。很多考生在第二阶段就开始有针对性地做一些题目，帮助自己归纳总结，训练提高。另一方面，也可以通过做模拟题来熟悉试卷的出题方式和应对考试的一些措施及技巧。

在职攻读硕士学位研究生入学资格考试的考试内容和考试形式都很新，考生在备考的时候可参考和借鉴的材料较少。针对这种情况，我们在编写《硕士学位研究生入学资格考试 数学考前辅导教程》的基础上，编写了本书，以帮助考生在备考阶段准备得更加充分，在考试中取得好的成绩。

根据新的考试大纲中关于数学内容的考试要求：测试考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法，逻辑思维能力、数学运算能力、空间想像能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。因此，在模拟试题的选择上，既考虑到试题的知识覆盖面，又注意到难易程度，以利于考生通过做模拟试题能够全面检查对所复习知识的掌握程度。在模拟试题的设计上，既侧重知识的重点和难点，也注意考察重点和难点的方式与方法，以便于考察考生对重点和难点的掌握程度以及对这些知识点的灵活运用情况。

根据考试大纲的要求，我们在此模拟试题集中编写了 12 套模拟试题。每套试题包含 25 道单项选择题，其中算术、代数、几何三部分有 15 道题，一元函数微积分、线性代数两部分有 10 道题。在书的后半部分给出了每套模拟试题的答案与解析过程，供考生们参考。

由于 GCT 在国内是一种类型比较新颖的考试，准备 GCT 考试与准备传统的考试有所不同，为了使考生尽快地熟悉和掌握这一考试形式，对过去的考题做一点总结和分析是十分必要的。下面用表格的形式对过去 3 年中数学基础能力测试题涉及的知识点做一下总结，以便考生能够更有针对性地进行复习备考。

科 目	内 容	试题编号	具体知识点
算术	数的运算	200302	分数运算
		200303	连和号、有限个数求和
		200304	素数概念、算术平均值
		200401	有限个数求和
		200501	有限个数求和、求积
	比与比例	200305	百分数
		200404	比、百分数
		200504	比、单位量与总量
		200506	比、百分数
	简单应用问题	200301	种树问题
		200402	种树问题、公倍数
		200405	汽车相遇问题
代数	数和代数式	200309	开方运算
		200407	绝对值的概念
		200409	复数的辐角
		200502	因式分解、代数式相乘
		200505	配方运算
		200507	复数乘积的模
	集合、函数	200308	函数图形的对称性
	代数方程	200307	一元二次函数的图像
		200408	一元二次方程的求根公式
	不等式	200403	一次联立不等式
		200406	分式不等式
	数列	200508	等差数列、等比数列
	排列、组合、古典概率	200310	独立事件同时发生、对立事件
		200410	组合公式、等可能事件
		200509	数的运算、等可能事件

续表

科 目	内 容	试题编号*	具体知识点
几何	平面几何	200312	三角形的重心、三角形的面积
		200411	三角形的外角与内角的关系
		200412	勾股定理、三角形面积
		200413	圆的弦
		200415	三角形的中线
		200503	三角形面积
		200511	圆周角、四边形的内角和
	空间几何体	200313	线线平行、面面平行
		200314	圆锥表面积
		200510	圆锥体积、球的体积
	平面解析几何	200311	圆的切线、直线方程
		200315	直线与圆的位置关系
		200414	关于直线对称的点、直线方程
		200513	曲线方程、三角形面积
		200514	圆的弦的垂直平分线、两点间距离
		200515	圆的方程、圆锥曲线的方程
	三角函数	200512	特殊角的三角函数值、两角和公式
一元微积分	函数、极限、连续	200323	连续函数的介值定理
		200516	函数定义域、三角函数
	一元微分学	200321	极值点的充分条件、变限定积分求导
		200322	微分定义
		200324	方程根的个数
		200416	导数的几何意义、复合函数求导
		200417	导数的几何意义、定积分的几何意义、洛必达法则
		200418	函数不等式
		200517	渐近线
		200518	利用导数定义求极限
		200519	微分中值定理
	一元积分学	200325	定积分性质及换元积分法
		200419	定积分性质及换元积分法
		200420	平面图形的面积
		200520	元函数的概念、分部积分法
		200521	反函数的概念、定积分的几何意义

续表

科 目	内 容	试题编号*	具体知识点
线性代数	行列式	200316	行列式按行展开
		200421	行列式性质
		200525	三次方程的根、三阶行列式的值
	矩阵	200317	矩阵运算、乘积矩阵的秩、秩与行列式的关系
		200318	伴随矩阵的概念、矩阵的秩
		200422	矩阵乘法的定义及运算律
		200524	矩阵运算(乘法)
		200423	线性相关的概念、齐次方程组有非零解的条件
		200522	向量组的极大线性无关组
	线性方程组	200319	齐次方程组只有零解的充要条件
		200424	矩阵乘法、齐次方程组有非零解的条件、基础解系
	特征值、特征向量	200320	特征值和特征向量的概念、矩阵运算
		200425	矩阵相似的条件
		200523	特征值和特征向量的概念、矩阵运算

* 试题编号中的前 4 位表示试题的年份,后两位表示在试题中的题号,如 200302 表示 2003 年的第 2 题.

由于 GCT 考试只有四选一这种形式的客观题,考生除了复习好有关的内容外,还应掌握一些处理选择题时的一些常用方法.下面就以往年的真题为例,简要地介绍几种方法.

1. 排除法

这种方法是建立在四个选项中有且仅有一个选项正确,如果能将错误的排除,剩下的自然就是正确选项.大部分情况下,即使只排除掉一、两个错误选项,对找到正确选项也是很有帮助的.因此排除法是处理选择题的一个有效方法.

例如,2003 年的 B 卷第 23 题:甲乙两人百米赛跑成绩一样,那么_____.

- A. 甲乙两人每时刻的瞬时速度必定一样
- B. 甲乙两人每时刻的瞬时速度都不一样
- C. 甲乙两人至少在某时刻的瞬时速度一样
- D. 甲乙两人到达终点时的瞬时速度必定一样

根据常识却很容易将选项 A,B,D 排除掉,因此正确选项为 C.

又如 2003 年的第 5 题:某工厂产值三月份比二月份的增加 10%,四月份比三月份的减少 10%,那么_____.

- A. 四月份与二月份产值相等
- B. 四月份比二月份产值增加 $\frac{1}{99}$

- C. 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{99}$ D. 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{100}$

根据题意可知四月份的产值不会多于二月份,因此选项 A,B 可以直接排除掉. 这样此题就变成了一个二选一的是非题,难度就降低了.

2. 特殊值代入法

通过选取合适的特殊值,将正确选项找出是处理选择题的最有效方法之一.

例如,设 a,b,m 均为大于零的实数,且 $b > a$,则 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 谁大?

- (A) 前者 (B) 后者 (C) 一样大 (D) 无法确定

对此题,如果令 $a=1, b=2, m=1$,及 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$,便知选项 A 正确.

再如 2003 年的第 8 题:函数 $y_1 = f(a+x)$ ($a \neq 0$) 与 $y_2 = f(a-x)$ 的图形关于_____.

- A. 直线 $x=a=0$ 对称 B. 直线 $x+a=0$ 对称
C. x 轴对称 D. y 轴对称

在此,若取 $f(x)=x$,则 $y_1=a+x, y_2=a-x$,从而易知选项 D 正确.

3. 选项代入法

将题中给出的选项代入题干中进行验证也是处理选择题的一个常用方法.

例如,2004 年的第 6 题:设 a,b,c 均为正数,若 $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{c+a}$,则_____.

- A. $c < a < b$ B. $b < c < a$ C. $a < b < c$ D. $c < b < a$

本题直接求解题干中的分式不等式比较复杂,但如果将选项 A 代入题干进行验证则非常简单.

又如 2005 年的第 2 题:设 p 为正数,则 $x^2 + px - 99 =$ _____.

- A. $(x-9)(x-11)$ B. $(x+9)(x-11)$
C. $(x-9)(x+11)$ D. $(x+9)(x+11)$

这是一个典型的选项代入处理的选择题.

再如 2005 年的第 23 题:设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,则 A 的对应于特征值 2 的一个特征向量是_____.

- A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

本题根据特征值和特征向量的定义,利用选项代入法易知正确选项为 D.

从已举行的 3 次 GCT 考试汇总情况来看, 尽管 25 道题都是 4 选 1 的单项选择题, 但在 45 分钟内完成这些题目, 时间还是很紧张的。因此考生在做这些模拟题时, 最好按正式考试的要求来做, 即在 45 分钟内做完一套模拟题, 然后再核对答案, 进行分析总结。而不要一遇到疑难问题就停下来, 翻答案和解析过程。这样才能真正体现出模拟试题的效用。

由于编者的经验和水平所限, 书中难免会有疏漏和不足之处。欢迎广大读者、辅导教师及各方面的专家批评指正。

编者

2006 年 5 月

目

硕士学位研究生入学资格考试

录

Contents

模拟试题(1)	1
模拟试题(2)	5
模拟试题(3)	9
模拟试题(4)	13
模拟试题(5)	17
模拟试题(6)	21
模拟试题(7)	25
模拟试题(8)	28
模拟试题(9)	32
模拟试题(10)	36
模拟试题(11)	40
模拟试题(12)	43
模拟试题(1)答案与解析	47
模拟试题(2)答案与解析	55
模拟试题(3)答案与解析	63
模拟试题(4)答案与解析	70
模拟试题(5)答案与解析	77
模拟试题(6)答案与解析	85

模拟试题(7)答案与解析.....	93
模拟试题(8)答案与解析	100
模拟试题(9)答案与解析	108
模拟试题(10)答案与解析.....	115
模拟试题(11)答案与解析.....	122
模拟试题(12)答案与解析.....	130

模拟试题(1)

本试题满分为 100 分,共 25 个选择题,每题 4 分. 每小题所给出的 4 个选项中,只有一项是正确的.

(C) $f_3(x) = x^2 - 4x + 1, x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(D) $f_4(x) = x^2 + 2x - 1, x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

9. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2} > ax$ 的解集是 $(0, 4]$, 则 a 的取值范围是 [].

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $(-\infty, 0]$ (C) $(-\infty, 4)$ (D) $(0, 4)$

10. 已知数列 $\left\{\frac{1}{(n+2)^2-1}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = []$.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) 不存在

11. 已知 α, β 为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 则 $\alpha + \beta = []$.

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

12. 平面直角坐标系中向量的集合

$$A = \{ \mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (2, -1) + t(1, -1), t \in \mathbb{R} \},$$

$$B = \{ \mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (-1, 2) + t(1, 2), t \in \mathbb{R} \},$$

则 $A \cap B = []$.

- (A) $\{(2, -1)\}$ (B) $\{(-1, 2)\}$
 (C) $\{(2, -1), (-1, 2)\}$ (D) \emptyset

13. 设 $r > 0$. 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 属第一象限部分的任意点作圆的切线, 切线被两坐标轴截下的线段长度的最小值是 [].

- (A) r (B) $\sqrt{2}r$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ (D) $2r$

14. 双曲线 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 的离心率 $e = \frac{3}{2}$, 则实数 m 的值是 [].

- (A) 9 (B) ± 9 (C) $\frac{13+\sqrt{22}}{9}$ (D) $\frac{13\pm\sqrt{22}}{9}$

15. 已知一个圆锥的高和底面半径相等, 它的一个内接圆柱的高和圆柱的底面半径也相等, 则圆柱的全面积和圆锥的全面积之比等于 [].

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{3}-1$

16. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 0]$, 则 $f\left(x - \frac{1}{3}\right) + f(\sin \pi x)$ 的定义域是 [].

- (A) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ (D) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

17. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+3}{\ln(x-1)} = 1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 [].

- (A) $y=x-5$ (B) $y=2x-7$ (C) $y=x+5$ (D) $y=2x+7$

18. 在区间 $[0, +\infty)$ 内, 方程 $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + \sin x - 1 = 0$ [].

- (A) 无实根 (B) 有且仅有一个实根
(C) 有且仅有两个实根 (D) 有无穷多个实根

19. 设 $f(x) = \int_0^{x^2} \sin t dt$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 [].

- (A) 高阶无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 低阶无穷小

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 并且对任意的 $x \in [0, 1]$ 都有 $f(1-x) = -f(1+x)$, 则

$$\int_0^\pi f(1+\cos x) dx = [].$$

- (A) 1 (B) 0
(C) -1 (D) (A)、(B)、(C)都不正确

21. 曲线 $y=1-x^2$ ($0 \leq x \leq 1$)、 x 轴、 y 轴所围平面区域被曲线 $y=ax^2$ ($a>0$) 分成面积相等的两部分, 则 $a=[]$.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

22. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$, 那么 $\begin{vmatrix} 3a_{31} & a_{11} + 2a_{21} & a_{11} \\ 3a_{32} & a_{12} + 2a_{22} & a_{12} \\ 3a_{33} & a_{13} + 2a_{23} & a_{13} \end{vmatrix}$ 的值为 [].

- (A) -6 (B) -9 (C) -18 (D) 18

23. 下列向量组中, 线性无关的向量组是 [].

- (A) $(2, 0, 1), (0, 2, 3), (0, 0, 0)$
(B) $(-1, 2, 3), (2, -4, -6), (5, 3, 7)$

- (C) $(1, 2), (2, 3), (5, 6)$
(D) $(1, 1, 1, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 3, 5)$

24. A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $m < n$, $Ax = \mathbf{0}$ 是 $Ax = b$ 的导出组, 则下述结论正确的是 [].

- (A) $Ax = b$ 必有无穷多组解 (B) $Ax = \mathbf{0}$ 必有无穷多组解
(C) $Ax = \mathbf{0}$ 只有零解 (D) $Ax = b$ 必无解

25. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 的三个特征值是 [].

- (A) $-2, 1, 4$ (B) $0, 1, 2$ (C) $1, 2, 3$ (D) $1, 1, 3$